ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-106-123

Гипотеза о «заградительном ряде» для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых[1]

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университет.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Балаба Ирина Николаевна — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: ibalaba@mail.ru
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе продолжено изучение нового класса рядов Дирихле — дзета-функции моноидов натуральных чисел. Прежде всего детально изучена дзета функция $\zeta(M(q)|\alpha)$ геометрической прогресс $M(q)$ с первым членом равным 1 и произвольным натуральным знаменателем $q > 1$, которая является простейшем моноидом натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы моноида. Для мероморфной функции $\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^\alpha}{q^\alpha - 1}$, имеющей множество полюсов

$$S(M(q)) = \left\{ \frac{2\pi i k}{\ln q} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$$

получены представления:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} =$$
$$= \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right).$$

Для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ моноида $M(\vec{p})$ с конечным числом простых чисел $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ получено разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2}\right)^{-1},$$

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

где $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \dots \ln p_n$, и найдено функциональное уравнение

$$\zeta(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}.$$

Для моноида натуральных чисел $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ с однозначным разложением на простые множители, состоящим из натуральных чисел n взаимно простых с $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, и для эйлерово произведение $P(M^*(\vec{p})|\alpha)$, состоящего из сомножителей по всем простым числам отличным от $p_1, \dots, p_n$, найдено функциональное уравнение

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = M(\vec{p}, \alpha)\zeta(M^*(\vec{p})|1 - \alpha),$$

где

$$M(\vec{p}, \alpha) = M(\alpha) \cdot \frac{M_1(\vec{p}, \alpha)}{M_1(\vec{p}, 1 - \alpha)}, \quad M_1(\vec{p}, \alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right).$$

Доказано, что для любого бесконечного множества простых $\mathbb{P}_1$ не существует аналитической функции равной

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$$

на всей комплексной плоскости.

Сформулирована гипотеза о заградительном ряде для любого экспоненциального множества PE простых чисел.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, логарифм эйлерова произведения.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Гипотеза о «заградительном ряде» для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 106–123.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-106-123

About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, assistant professor, professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: ibalaba@mail.ru
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The work continues the study of a new class of Dirichlet series — Zeta function of monoids of natural numbers. First of all, we study in detail the Zeta function $\zeta(M(q)|\alpha)$ of geometric progress $M(q)$ with the first term equal to 1 and an arbitrary natural denominator $q > 1$, which is the simplest monoid of natural numbers with a unique decomposition into simple elements of the monoid. For a meromorphic function $\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^\alpha}{q^\alpha - 1}$ with many poles

$$S(M(q)) = \left\{ \frac{2\pi i k}{\ln q} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$$

representations are received:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} =$$
$$= \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right).$$

For the Zeta function $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ of the monoid $M(\vec{p})$ with a finite number of primes $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ the decomposition into an infinite product is obtained

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2}\right)^{-1},$$

where $P(\vec{p}) = p_1 \ldots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \ldots \ln p_n$, and a functional equation is found

$$\zeta(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}.$$

For the monoid of positive integers $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ with a unique Prime factorization consisting of positive integers n mutually Prime with $P(\vec{p}) = p_1 \ldots p_n$, and for the Euler product $P(M^*(\vec{p})/\ alpha)$, consisting of factors for all primes other than $p_1, \ldots, p_n$, a functional equation is found

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = M(\vec{p}, \alpha)\zeta(M^*(\vec{p})|1 - \alpha),$$

where

$$M(\vec{p}, \alpha) = M(\alpha) \cdot \frac{M_1(\vec{p}, \alpha)}{M_1(\vec{p}, 1 - \alpha)}, \quad M_1(\vec{p}, \alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right).$$

It is proved that for any infinite set of Prime $\mathbb{P}_1$ there is no analytic function equal to

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$$

on the whole complex plane.

The protective series conjecture is formulated for any exponential set of PE primes.

In conclusion, topical problems with zeta-functions of monoids of natural numbers that require further investigation are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, logarithm of the Euler product.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

1. Введение

Гиперболическая дзета-функция решёток задаётся в правой полуплоскости $\alpha > 1$ дзета рядом[2]

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1} \dots \overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{1}$$

Очевидно, что при $s = 1$ гиперболическая дзета-функции решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

В работе [5] приводятся необходимые факты из истории создания и развития теории гиперболической дзета-функции решёток. Выделены основные направления современных исследований по развитию этой теории.

Не повторяясь в перечислении основных достижений в области развития теории гиперболической дзета-функции решёток, укажем на одно новое направление исследований. Проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции решёток на всю комплексную плоскость в последнее время привела к необходимости сосредоточиться на одномерном случае, а именно, на гиперболической дзета-функции Гурвица.

В процессе анализа различных одномерных случаев неожиданно возник вопрос о дзета-функциях моноидов натуральных чисел. Среди всех моноидов натуральных чисел особое место занимают моноиды с однозначным разложением на простые элементы, так как именно для них имеет место разложение дзета-функциях моноида в эйлерово произведение. Здесь важно подчеркнуть, что среди простых элементов моноида встречаются как простые числа, так и псевдопростые числа. В работе [9] начаты эти исследования, а в [10] они продолжены.

Обратим внимание, что простейшем примером моноида с однозначным разложением на простые элементы является геометрическая прогрессия $M(q)$ с начальным членом равным единице и знаменателем $q > 1$ — произвольным натуральным числом. В следующем разделе мы более подробно обсудим этот случай и возникающие проблемы.

В работе [9] введено понятие экспоненциальной системы PE простых чисел и показано, что дзета-функция минмального моноида $M(PE)$ натуральных чисел, образованного произвольной экспоненциальной системой PE простых чисел, обладает эйлеровым произведением, сходящемся в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 0$. Таким образом, голоморфная дзета-функция $\zeta(M(PE)|\alpha)$ принимает все значения, кроме 0.

Цель данной статьи сформулировать гипотезу, что не существует аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$ из-за наличия всюду

[2]Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

плотного на мнимой оси заградительного ряда

$$S(M(PE)) = \left\{ \frac{2\pi ik}{\ln p_n} \middle| k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad PE = \{p_n | n \in \mathbb{N}\},$$

состоящего из объединения множеств полюсов дзета-функций $\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$.

2. Дзета-функция геометрической прогрессии и теоремы Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера

Прежде всего, рассмотрим целую функцию $q^\alpha - 1$, которая имеет бесконечно много нулей, а, именно, $\alpha = 0$ и $\alpha_n = \frac{2\pi ni}{\ln q}$ $(n = \pm1, \pm2, \ldots)$.

Лемма 1. *Справедливо равенсто*

$$e^\alpha - 1 = e^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Хорошо известно разложение в бесконечное произведение (см. [14], стр. 235)

$$\sin \alpha = \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Применяя формулу Эйлера $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, получим

$$e^\alpha - 1 = e^{\frac{\alpha}{2}} \left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right) = 2ie^{\frac{\alpha}{2}} \frac{e^{-i\frac{i\alpha}{2}} - e^{i\frac{i\alpha}{2}}}{2i} = -2ie^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{i\alpha}{2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$e^\alpha - 1 = -2ie^{\frac{\alpha}{2}} \frac{i\alpha}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^2}{n^2\pi^2}\right) = e^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}\right)$$

и утверждение леммы доказано. □

Следствие 1. *Справедливо равенсто*

$$q^\alpha - 1 = q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Действительно,

$$q^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln q} - 1 = e^{\frac{\alpha \ln q}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\alpha \ln q)^2}{4\pi^2 n^2}\right) =$$
$$= q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right).$$

□

Таким образом, для целой функции $q^\alpha - 1$ теорема Вейерштрасса имеет вид:

$$q^\alpha - 1 = q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right). \tag{4}$$

Дзета-функция геометрической прогрессии $M(q)$ задается формулой

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n)^\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{q^\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > 0). \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что дзета-функция геометрической прогрессии аналитическая функция во всей α-плоскости кроме точек $\alpha_0 = 0$, где у неё простой полюс с вычетом

$$\mathrm{Res}_0\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

и точек $\alpha_k = \frac{2ki\pi}{\ln q}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, в которых простые полюса с вычетами

$$\mathrm{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}}\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

Действительно, применяя правило Лопиталя, получим

$$\mathrm{Res}_0\zeta(M(q)|\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{1-\frac{1}{q^\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{q^\alpha - 1} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\ln q q^\alpha} = \frac{1}{\ln q}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}}\zeta(M(q)|\alpha) = \lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}} \frac{\alpha - \frac{2ki\pi}{\ln q}}{1-\frac{1}{q^\alpha}} = \lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}} \frac{\alpha - \frac{2ki\pi}{\ln q}}{q^\alpha - 1} = \lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}} \frac{1}{q^\alpha \ln q} = \frac{1}{\ln q}.$$

Отсюда следует, что $\zeta(M(q)|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α-плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1}. \tag{6}$$

А следовательно, к ней применима теорема Миттаг–Леффлера (см. [14], стр. 225). Таким образом, мы получаем, что для некоторой целой функции $h_q(\alpha)$ и некоторых многочленов $P_{n,q}(\alpha)$ для $\zeta(M(q)|\alpha)$ справедливо разложение в ряд

$$\zeta(M(q)|\alpha) = h_q(\alpha) + \frac{1}{\alpha \ln q} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\left(\alpha - \frac{2ni\pi}{\ln q}\right)\ln q} + P_{n,q}(\alpha) + \frac{1}{\left(\alpha + \frac{2ni\pi}{\ln q}\right)\ln q} + P_{-n,q}(\alpha) \right). \tag{7}$$

Теперь возникают два естественных вопроса: Как найти целую функцию $h_q(\alpha)$? И как найти многочлены $P_{n,q}(\alpha)$, которые обеспечат сходимость ряда?

На второй вопрос ответ несложно найти в книге Б. В. Шабата (см. [14], стр. 226). Надо положить $P_{n,q}(\alpha) = \frac{1}{2ni\pi}$.

Действительно,

$$\frac{1}{\left(\alpha - \frac{2ni\pi}{\ln q}\right)\ln q} + \frac{1}{2ni\pi} = \frac{\alpha \ln q}{(\alpha \ln q - 2ni\pi)2ni\pi}.$$

Далее имеем:

$$\frac{\alpha \ln q}{(\alpha \ln q - 2ni\pi)2ni\pi} + \frac{\alpha \ln q}{(\alpha \ln q + 2ni\pi)(-2ni\pi)} = \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(M(q)|\alpha) = h_q(\alpha) + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2}.$$

Для дзета-функции геометрической прогрессии легко найти функциональное уравнение. Действительно,

$$\zeta(M(q)|-\alpha) = \frac{q^{-\alpha}}{q^{-\alpha}-1} = \frac{1}{1-q^{\alpha}} = -\frac{\zeta(M(q)|\alpha)}{q^{\alpha}}.$$

И так, целая функция $h_q(\alpha)$ задаётся равенством

$$h_q(\alpha) = 1 + \frac{1}{q^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha \ln q} - 2\alpha \ln q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,q}}{n!}\alpha^n,$$

где

$$a_{n,q} = h_q^{(n)}(\alpha)\Big|_{\alpha=0}.$$

Так как

$$h_q(-\alpha) = 1 + \frac{1}{q^{-\alpha}-1} + \frac{1}{\alpha \ln q} + 2\alpha \ln q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,q}(-1)^n}{n!}\alpha^n,$$

то

$$h_q(\alpha) + h_q(-\alpha) = 2 + \frac{1}{q^{\alpha}-1} + \frac{1}{q^{-\alpha}-1} = 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n,q}}{(2n)!}\alpha^{2n},$$

поэтому $a_{0,q} = \frac{1}{2}$ и $a_{2n,q} = 0$ $(n \geqslant 1)$,

$$h_q(\alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1,q}}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1}.$$

По правилу Лопиталя для $a_{0,q}$ находим аналогичный результат:

$$a_{0,q} = \lim_{\alpha\to 0}\left(1 + \frac{1}{q^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha \ln q}\right) = 1 + \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha \ln q - q^{\alpha} + 1}{(q^{\alpha}-1)\alpha \ln q} = 1+$$
$$+ \lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln q - \ln q q^{\alpha}}{\ln q q^{\alpha} \alpha \ln q + (q^{\alpha}-1)\ln q} = 1 + \lim_{\alpha\to 0} \frac{1-q^{\alpha}}{q^{\alpha}\alpha \ln q + q^{\alpha} - 1} =$$
$$= 1 - \lim_{\alpha\to 0} \frac{q^{\alpha}\ln q}{q^{\alpha}\alpha \ln^2 q + q^{\alpha}\ln q + q^{\alpha}\ln q} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию $M(e) = \{e^n | n \geqslant 0\}$. Она не является моноидом натуральных чисел, но — моноид трансцендентных чисел. Нетрудно видеть, что дзета-функция $\zeta(M(q)|\alpha)$ моноида $M(q)$ для любого $q > 1$ легко выражается через дзета-функцию $\zeta(M(e)|\alpha)$: $\zeta(M(q)|\alpha) = \zeta(M(e)|\alpha \ln q)$.

Положим

$$h(\alpha) = 1 + \frac{1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!}\alpha^n,$$

тогда

$$\zeta(M(e)|\alpha) = h(\alpha) + \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2}, \quad h_q(\alpha) = h(\alpha \ln q), \quad a_{n,q} = a_n \ln^n q.$$

Численные расчёты в Mathcad позволяют сделать предположение, что $h(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Лемма 2. *Справедливо равенство* $h(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что целая функция $h(\alpha)$ ограничена по модулю на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для этого, прежде всего, установим, что $h(\alpha)$ периодична с периодом $2\pi i$.

Действительно,

$$h(\alpha) = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} - 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1} - f(\alpha),$$

где

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha - 2n\pi i} + \frac{1}{\alpha + 2n\pi i}\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha - 2n\pi i}.$$

Далее имеем:

$$f(\alpha + 2\pi i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha + 2\pi i - 2n\pi i} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha - 2n\pi i} - \frac{1}{\alpha - 2N\pi i} + \frac{1}{\alpha + 2(N+1)\pi i}\right) = f(\alpha).$$

И в силу периодичности e^α периодичность $h(\alpha)$ доказана.

Рассмотрим полосу $\alpha = \sigma + it$ с $-\infty < \sigma < \infty$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$.

Положим $g(\alpha) = 1 + \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}$ и

$$f_1(\alpha) = 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = f(\alpha) - \frac{1}{\alpha},$$

тогда

$$h(\alpha) = g(\alpha) + f_1(\alpha), \quad h(0) = g(0) = \frac{1}{2}, \quad f_1(0) = 0.$$

В прямоугольнике $|\sigma| \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ функция $g(\alpha)$ непрерывна, следовательно ограниченна.

При $\sigma > 2\pi$ справедливы оценки

$$|g(\alpha)| = \left|1 + \frac{1}{e^{\sigma+it} - 1} - \frac{1}{\sigma + it}\right| \leqslant \frac{e^\sigma}{e^\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \to 1 \text{ при } \sigma \to \infty.$$

При $-\sigma < -2\pi$ справедливы оценки

$$|g(\alpha)| = \left|1 + \frac{1}{e^{-\sigma+it} - 1} - \frac{1}{-\sigma + it}\right| \leqslant \frac{1}{e^\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \to 0 \text{ при } \sigma \to \infty.$$

Отсюда следует, что $g(\alpha)$ ограниченно в рассматриваемой полосе.

Так как $f_1(-\alpha) = -f_1(\alpha)$, то достаточно рассмотреть полосу $\sigma \geqslant 0$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. Имеем при $\sigma > \pi$:

$$|f_1(\alpha)| \leqslant 2(\sigma + \pi)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{dx}{\sigma^2 + 4\pi^2 x^2} = 2(\sigma + \pi)\left(\left.\frac{\arctan\left(\frac{2\pi x}{\sigma}\right)}{2\pi\sigma}\right|_0^\infty\right) = \frac{\sigma + \pi}{2\sigma} \leqslant 1.$$

При $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ имеем:

$$|f_1(\alpha)| \leqslant 2(\sigma+\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2\pi^2} = \frac{\sigma+\pi}{12} < 1.$$

Отсюда следует, что $f_1(\alpha)$ ограниченно в рассматриваемой полосе.

Таким образом, целая периодическая функция ограничена в полосе основного периода, следовательно, она ограничена на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, что доказывает, что она константа: $h(\alpha) = \frac{1}{2}$. $\square$

И так, теорема Миттаг–Леффлера для дзета-функции геометрической прогрессии записывается следующим образом:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha\ln q} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha\ln q}{\alpha^2\ln^2 q + 4n^2\pi^2}.$$

3. Дзета-функция геометрической прогрессии и гамма-функция Эйлера

Хорошо известна формула (см. [3], стр. 326)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha e^{\gamma\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}. \tag{8}$$

Из неё следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)} = -\alpha^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2\ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} = -\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)^2\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right).$$

Но тогда из равенства (6) следует, что

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}\alpha\ln q}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right). \tag{9}$$

Из формулы (9) сразу следует, что дзета-функция геометрической прогрессии имеет полюса в точках $\alpha = \frac{2\pi ni}{\ln q}$, $(n \in \mathbb{Z})$, так как гамма функция имеет полюса в 0 и в отрицательных целых точках.

Также из формулы (9) сразу следует функциональное уравнение для дзета-функции геометрической прогрессии:

$$\zeta(M(q)|-\alpha) = \frac{q^{\frac{-\alpha}{2}}(-\alpha)\ln q}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right) = -\frac{\zeta(M(q)|\alpha)}{q^{\alpha}}. \tag{10}$$

Так как

$$\lim_{\sigma\to\infty}\zeta(M(q)|\alpha) = 1 \quad (\alpha = \sigma + it),$$

то

$$\lim_{\sigma\to\infty}\zeta(M(q)|-\alpha) = 0 \quad (\alpha = \sigma + it).$$

4. Дзета-функция моноида с конечным числом простых чисел

Пусть $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — произвольный вектор с простыми $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Через $M(\vec{p})$ обозначим минимальный моноид натуральных чисел, образованный простыми числами $p_1, \ldots, p_n$, тогда, очевидно, что для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо равенство

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \zeta(M(p_\nu)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}}. \tag{11}$$

Из равенств (11) и (6) следует, что дзета-функция $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α-плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{p_\nu^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln p_\nu} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2} \right)^{-1} \right). \tag{12}$$

Если положить $P(\vec{p}) = p_1 \ldots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \ldots \ln p_n$, то равенство (12) можно переписать в следующем виде:

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2} \right)^{-1}. \tag{13}$$

Будем через $S(A)$ обозначать множество полюсов дзета-функции

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 1)$$

произвольного множества натуральных чисел A. Если A — конечное множество, то $S(A) = \emptyset$.

Используя эти обозначения, получим равенство

$$S(M(\vec{p})) = \bigcup_{\nu=1}^{n} S(M(p_\nu)) = \left\{ \frac{2\pi k i}{\ln p_\nu} \middle| k \in \mathbb{Z},\, \nu = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо функциональное уравнение

$$\zeta(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}. \tag{14}$$

Обозначим через $\zeta(A, B|\alpha)$ функцию отношения двух дзета-функций:

$$\zeta(A, B|\alpha) = \frac{\zeta(A|\alpha)}{\zeta(B|\alpha)}.$$

Рассмотрим $\zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha)$. Эта функция в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ задается дзета-рядом

$$\zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \vec{p}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right)^{-1} = P(M^*(\vec{p})|\alpha),$$

где моноид натуральных чисел $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ с однозначным разложением на простые множители состоит из натуральных чисел n взаимно простых с $P(\vec{p}) = p_1 \ldots p_n$, а эйлерово произведение $P(M^*(\vec{p})|\alpha)$ состоит из сомножителей по всем простым числам отличным от $p_1, \ldots, p_n$.

В следующих разделах мы изучим аналитическое продолжение дзета-функции

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha).$$

Рассмотрим обратный ряд $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. По принципу вложенности из работы [10] получаем, что

$$\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n\in M(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right),$$

$$\zeta^*(M^*(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n\in M^*(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{p\neq p_\nu(\nu=1,\dots,n)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right),$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Функция $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ задается своим эйлеровым произведением на всей комплексной плоскости и является целой функцией, для которой множество нулей совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. Для неё справедливо функциональное уравнение

$$\zeta^*(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n P(\vec{p})^\alpha \zeta^*(M(\vec{p})|\alpha).$$

5. Множитель Римана и модифицированный множитель Римана

Через

$$M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \tag{15}$$

будем обозначать множитель из функционального уравнения для дзета-функции Римана (См. [12], стр. 19)

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha). \tag{16}$$

Легко проверить, что

$$M(\alpha)\cdot M(1-\alpha) = 1. \tag{17}$$

Действительно,

$$M(\alpha)\cdot M(1-\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{2\Gamma(\alpha)}{(2\pi)^{\alpha}} \sin\frac{\pi(1-\alpha)}{2} =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sin\pi\alpha = 1$$

согласно формулы дополнения для гамма-функции (см. [13], стр. 19).

Множитель $M(\alpha)$ будем называть *множителем Римана*, а формулу (17) — *формулой дополнения для множителя Римана*.

Из свойств гамма-функции, определения (15) и формулы дополнения (17) следует, что множитель Римана — аналитическая функция для любого комплексного α, кроме точек $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ — нечетных натуральных значений, где он имеет полюс первого порядка.

Действительно, при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется полюс первого порядка у гамма-функции $\Gamma(1-\alpha)$ и это все полюса, а множитель $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ имеет значения

$$\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^m, & \text{при } n = 1+2m,\ m = 0,1,2,\dots. \\ 0, & \text{при } n = 2m,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Поэтому при нечетных натуральных значениях $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ множитель Римана $M(\alpha)$ имеет полюса с вычетом

$$\mathrm{Res}_{\alpha=1+2n} M(\alpha) = \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{-2n}} \mathrm{Res}_{\alpha=-2n}\Gamma(\alpha) = \frac{2(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!}. \tag{18}$$

При натуральных четных значений $\alpha = 2n$, $(n \in \mathbb{N})$ имеем:

$$M(\alpha) = \lim_{\alpha\to 2n} \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \lim_{\alpha\to 2n} \Gamma(1-\alpha)(1-\alpha-(1-2n)) \cdot$$

$$\cdot \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)} \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)}{2n-\alpha} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n-1)!}.$$

По свойствам гаммы функции $\Gamma(1+2n) = (2n)!$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому в четных отрицательных значениях α множитель Римана имеет нули первого порядка

$$M(-2n) = \frac{2\Gamma(1+2n)}{(2\pi)^{1+2n}} \sin(-\pi n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}. \tag{19}$$

Так как гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то нули множителя Римана являются нулями функции $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ и формулой (19) исчерпываются все нули множителя Римана, которые являются тривиальными нулями дзета-функции Римана.

Наконец, в точках $\alpha = -1, -3, -5, \ldots$ имеем:

$$M(\alpha) = M(1-2n) = \frac{2\Gamma(2n)}{(2\pi)^{2n}} \sin\frac{\pi(1-2n)}{2} = \frac{2(2n-1)!(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Теорема 1. *Для дзета-функции моноида $M^*(\vec{p})$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = M(\vec{p}, \alpha)\zeta(M^*(\vec{p})|1-\alpha), \tag{20}$$

где

$$M(\vec{p}, \alpha) = M(\alpha) \cdot \frac{M_1(\vec{p}, \alpha)}{M_1(\vec{p}, 1-\alpha)}, \quad M_1(\vec{p}, \alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right).$$

Доказательство. Действительно, при $\alpha = -\sigma + it$, $\sigma \geqslant 0$ имеем:

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)} = \frac{M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)} = \frac{M(\alpha)\zeta(M(\vec{p})|1-\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)} \zeta(M^*(\vec{p})|1-\alpha).$$

Отсюда следует, что

$$M(\vec{p}, \alpha) = M(\alpha) \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}}{1 - \frac{1}{p_\nu^{1-\alpha}}} = M(\alpha) \cdot \frac{M_1(\vec{p}, \alpha)}{M_1(\vec{p}, 1-\alpha)},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Из утверждения теоремы сразу следует, что

$$M(\vec{p}, \alpha)M(\vec{p}, 1-\alpha) = 1, \quad M\left(\vec{p}, \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Другое важное следствие доказанной теоремы состоит в том, что дзета-функция моноида $M^*(\vec{p})$ имеет эйлеровское произведение, модифицированное функциональное уравнение и дополнительное множество *"тривиальных нулей"*, которое совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ моноида $M(\vec{p})$.

6. Экспоненциальная последовательность простых чисел

В работе [9] дано следующее определение экспоненциальной последовательности простых чисел и доказана теорема.

Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [15]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел.

Теорема 2. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

Естественно возникает вопрос о возможности аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$. Как будет показано дальше, ответ на этот вопрос будет, скорее всего, отрицательный. Отсюда будет следовать и отрицательный ответ на вопрос об аналитическом продолжении дзета-функции $\zeta(M^*(PE))|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, M(PE))|\alpha)$ моноида $M^*(PE) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(PE)$ с однозначным разложением на простые множители, который состоит из натуральных чисел n взаимно простых с простыми из экспоненциального множества простых PE, а эйлерово произведение $P(M^*(PE)|\alpha)$ состоит из сомножителей по всем простым числам отличным от простых из PE.

Для решения поставленной задачи рассмотрим для любого моноида $M(\vec{p})$ две аналитические функции:

$$\zeta^-(M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M(\vec{p})|\alpha) \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma \leqslant 0), \tag{21}$$

$$\zeta^+(M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M(\vec{p})|\alpha) \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma \geqslant 0). \tag{22}$$

Пусть $\mathbb{P}_1$ — произвольное бесконечное подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$, $p_1 < < p_2 < p_3 < \ldots$ — естественная нумерация всех простых чисел из $\mathbb{P}_1$ и $\vec{p}_n = (p_1, \ldots, p_n)$ для любого натурального n.

Теорема 3. *Для любого $\mathbb{P}_1$ справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^-(M(\vec{p}_n)|\alpha) = 0 \quad \textit{при } \sigma < 0, \tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^+(M(\vec{p}_n)|\alpha) = \zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha) \quad \textit{при } \sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}, \tag{24}$$

где $\sigma_{\mathbb{P}_1} \leqslant 1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$.

При этом для любой полуплоскости с $\sigma \leqslant \sigma_0 < 0$ сходимость в (23) равномерная, а в (24) эта сходимость равномерная для любой полуплоскости с $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma_{\mathbb{P}_1}$.

Доказательство. Действительно, предельное соотношение (24) и соответствующая равномерная сходимость доказывается аналогично случаю дзета-функции Римана (см. [12], стр. 7).

Для доказательства предельного соотношения (23) заметим, что согласно функциональному уравнению (14) при $\sigma < 0$ имеем:

$$|\zeta(M(\vec{p_n})|\alpha)| = \frac{|\zeta(M(\vec{p_n})| - \alpha)|}{|P(\vec{p_n})^{-\alpha}|} \leqslant \frac{\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma)}{P(\vec{p_n})^{-\sigma}} \leqslant \frac{\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma_0)}{P(\vec{p_n})^{-\sigma_0}} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

так как $P(\vec{p_n}) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\sigma_0 < 0$ и $\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma_0) \leqslant \zeta(-\sigma_0)$. Тем самым теорема полностью доказана. □

Следствие 2. *Для любого бесконечного множества простых* $\mathbb{P}_1$ *не существует аналитической функции равной*

$$\lim_{n\to\infty}\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$$

на всей комплексной плоскости.

Доказательство. Действительно, пусть такая функция $f(\alpha)$ существует, тогда $f(\alpha)\equiv 0$ при $\sigma<0$, но тогда она тождественный ноль на всей плоскости, что противоречит тому, что при $\sigma>\sigma_{\mathbb{P}_1}$ она должна быть равна дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$. □

Аналогичное утверждение справедливо для $\sigma>\sigma_{\mathbb{P}_1}$

$$\lim_{n\to\infty}\zeta^*(M(\vec{p}_n)|\alpha),$$

так как в правой полуплоскости предел равен $\zeta^*(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$, а в левой полуплоскости $\sigma<0$ каждая точка будет особой точкой предельной функции.

Объяснением данного явления, по-видимому, следующее. Если рассмотреть последовательность дзета-функций $\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$ мероморфных функций на комплексной α-плоскости, то мы имеем вложенную последовательность множеств полюсов этих функций:

$$S(M(\vec{p}_1))\subset S(M(\vec{p}_2))\subset\ldots\subset S(M(\vec{p}_n))\subset\ldots,$$

которая сходится к множеству $S(M(\mathbb{P}_1))$, заданному равенством

$$S(M(\mathbb{P}_1))=\bigcup_{n=1}^{\infty}S(M(\vec{p}_n)).$$

Нетрудно видеть, что множество $S(M(\mathbb{P}_1))$ всюду плотно на мнимой оси, поэтому если доказать что $S(M(\mathbb{P}_1))$ является множеством особых точек, то оно будет выполнять функции заградительного ряда для аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$, когда $\sigma_{\mathbb{P}_1}=0$.

Для случая $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}$ это заведомо не так, так как $\sigma_{\mathbb{P}}=1$ и на прямой $\sigma=1$ имеется только один полюс дзета-функции Римана. Предыдущее обсуждение позволяет сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. *Для любого экспоненциального множества* PE *простых чисел множество* $S(M(PE))$ *является множеством особых точек дзета-функции* $\zeta(M(PE)|\alpha)$ *моноида* $M(PE)$ *и образует заградительный ряд для существования аналитического продолжения дзета-функции* $\zeta(M(PE)|\alpha)$ *в левую полуплоскость* $\sigma\leqslant 0$.

Аналогично, $S(M(PE))$ *является множеством нулей функции* $\zeta^*(M(PE)|\alpha)$ *и образует заградительный ряд для существования аналитического продолжения дзета-функции* $\zeta^*(M(PE)|\alpha)$ *в левую полуплоскость* $\sigma\leqslant 0$.

7. Заключение

Авторы выражают свою благодарность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

В процессе этих обсуждений наметились следующие актуальные и перспективные направления исследований.

Во-первых, встает вопрос о существовании таких бесконечных последовательностей $\mathbb{P}_1$ простых чисел, для которых дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$ моноида $M(\mathbb{P}_1)$ с однозначным разложением на простые числа и эйлеровым произведением имела бы $\sigma_{\mathbb{P}_1}\leqslant 1$ — абсциссу абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$ равной заданному числу β с $0<\beta<1$.

Особый интерес представляют те последовательности, для которых $\beta = \frac{1}{2}$, так как для таких последовательностей множество полюсов дзета-функции соответствующего минимального моноида будет входить в множество нетривиальных нулей дзета-функции Римана.

Во-вторых, встает вопрос о связи распределения простых чисел в произвольном моноиде с однозначным разложением на простые числа и нулями дзета-функции этого моноида.

В-третьих, в случае моноидов с однозначным разложением на простые элементы, среди которых не только простые числа, но и псевдо-простые числа, какие законы распределения существуют?

Ещё более сложный вопрос — это распределение простых элементов в моноидах без однозначности разложения на простые элементы моноида.

В-четвертых, когда множество натуральных чисел разбивается на классы вычетов по модулю $q > 2$, то соответствующие дзета-функции классов вычетов, которые выражаются через дзета-функцию Гурвица, по теореме Дэвенпорта — Хейльброна имеют нули при $\sigma > 1$. Возникает вопрос, а справедлив ли аналог теоремы Дэвенпорта — Хейльброна при разбиении произвольного моноида с однозначным разложением на простые множители на классы вычетов по модулю $q > 2$?

В-пятых, для каких дзета-функций моноидов натуральных чисел существуют заградительные ряды из полюсов, наличие которых запрещает существование аналитического продолжения.

Наконец, на наш взгляд, важным направлением исследований является вопрос о разложении дзета-функции Римана в произведение различных дзета-функций множеств натуральных чисел и рядов Дирихле и изучение множеств их полюсов и нулей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

2. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.

3. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

4. А. Гурвиц, Р. Курант Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

5. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.

6. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4–107.

7. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.

8. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

9. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

10. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С.

11. Г. Дэвенпорт Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971. — 200 с.

12. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953. 408 с.

13. Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. — М.: Физматгиз, 1963. 516 с.

14. Б. В. Шабат Введение в комплексный анализ — М.: Наука, 1969. — 576 с.

15. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

16. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

17. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, “Around the Davenport–Heilbronn function”, *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

2. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.

3. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

4. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

5. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

6. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

7. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

8. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, № 3 pp. 72–105.

9. Dobrovolsky N. N., 2017, *The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, № 4. P. 187–207.

10. Dobrovolsky N. N., 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, № 1. P.

11. Davenport H., 1971, *Mul'tiplikativnaja teorija chisel*, Izd-vo Nauka, Moskva, 200 p.

12. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.

13. Whittaker E. T., Watson D. N., 1963, *A Course in modern analysis. Part two. Transcendental function.* — Moscow: Fizmatgiz, 516 p.

14. Shabat B. V., 1969, *Introduction to complex analysis* — M.: Science, — 576 p.

15. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

16. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

17. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.