ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-79-105

О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы¹

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университета.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

В работе продолжены исследования нового класса рядов Дирихле — дзета-функций моноидов натуральных чисел. Изучаются обратные ряды Дирихле для дзета-функций моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы и для дзета-функций множеств простых элементов моноидов с однозначным разложением на простые элементы.

Для любого $\beta > 1$ построены примеры рядов Дирихле, у которых абсцисса абсолютной сходимости $\sigma = \frac{1}{\beta}$. И для любого натурального $\beta > 1$ построены примеры пары дзета-функций $\zeta(B|\alpha)$ и $\zeta(A_{B,\beta}|\alpha)$ с равенством $\sigma_{A_{B,\beta}} = \frac{\sigma_B}{\beta}$.

Определено понятие сходимости последовательности множеств натуральных чисел. Доказано, что соответствующая последовательность дзета-функций этих множеств натуральных чисел будет равномерно сходиться в подходящей правой полуплоскости к дзета-функции предельного множества.

Рассматриваются различные примеры моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов. Получены ряд свойств дзета-функций моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители.

Найден явный вид обратного ряда к дзета-функции множества простых чисел, дополненного единицей. Найден явный вид отношения дзета-функции Римана к дзета-функции множества простых чисел, дополненного единицей.

Рассмотрены вложенные последовательности моноидов, порожденные простыми числами. Для дзета-функций этих моноидов сформулирован принцип вложенности, который позволяет переносить результаты о коэффициентах одних дзета-функций на коэффициенты других дзета-функций.

В работе удалось впервые описать общий вид всех моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 106–123.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194 _p_центр_a

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 1

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-79-105

On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

The paper continues research on a new class of Dirichlet series — zeta functions of monoids of natural numbers. The inverse Dirichlet series for zeta functions of monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements and for zeta-functions of sets of prime elements of monoids with unique factorization into prime elements are studied.

For any $\beta > 1$ examples of Dirichlet series with an abscissa of absolute convergence $\sigma = \frac{1}{\beta}$ are constructed. For any natural $\beta > 1$ examples of a pair of zeta functions $\zeta(B|\alpha)$ and $\zeta(A_{B,\beta}|\alpha)$ with the equality $\sigma_{A_{B,\beta}} = \frac{\sigma_B}{\beta}$ are constructed.

Various examples of monoids and corresponding zeta functions of monoids are considered. A number of properties of the zeta functions of monoids of natural numbers with unique factorization into prime factors are obtained.

An explicit form of the inverse series to the zeta-function of the set of primes supplemented by one is found. An explicit form of the ratio of the Riemann zeta-function to the zeta-function of the set of primes supplemented by one is found.

Nested sequences of monoids generated by primes are considered. For the zeta-functions of these monoids the nesting principle is formulated, which allows to transfer the results about the coefficients of one zeta-functions to the coefficients of other zeta-functions.

In this paper the general form of all monoids of natural numbers with unique factorization into prime factors was described for the first time.

In conclusion, topical problems for zeta-functions of monoids of natural numbers that require further study are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

N. N. Dobvol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

1. Введение	81
2. Обращение дзета-функций произвольных множеств натуральных чисел	82
3. Дзета-функция множества простых чисел	86
4. Вложенные последовательности моноидов, порожденные простыми числами	89
5. Примеры моноидов с однозначным разложением на простые элементы	93
6. Дзета-функция множества простых элементов моноида	97
7. Общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы	99
8. Заключение	103
Список цитированной литературы	103

1. Введение

В данной работе продолжают исследования из работы [8] и сохраняются обозначения и определения из этой работы.

Будем через $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ обозначать множество всех простых чисел вида $3n + 1$ и $3n + 2$, соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{3,1} &= \{7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, \dots\}, \\ \mathbb{P}_{3,2} &= \{2, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, \dots\}\end{aligned}$$

и согласно теореме Дирихле о простых в арифметической прогрессии множества простых $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ — бесконечные множества.

Рассмотрим мультипликативные функции $\chi_{3,1}(n)$ и $\chi_{3,2}(n)$, заданные равенствами

$$\chi_{3,1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha, p = 3m + 1, \alpha \geq 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha, p = 3, 3m + 2, \alpha \geq 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{3,1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}; \end{cases}$$

$$\chi_{3,2}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha, p = 3m + 2, \alpha \geq 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha, p = 3, 3m + 1, \alpha \geq 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{3,2}(p^{\alpha_p}), & \text{при } n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}. \end{cases}$$

Основными объектами исследования в данной работе будут моноиды $M_{3,1}$, $M_{3,1,1}$, $M_{3,1,2}$ и $M_{3,1,2,0}$, заданные равенствами

$$\begin{aligned}M_{3,1} &= \{n = 3k + 1 | k \geq 0\}, \quad M_{3,1,1} = \{n = 3k + 1 | \chi_{3,1}(n) = 1\}, \\ M_{3,1,2} &= \{n = 3k + 1 | \chi_{3,2}(n) = 1\}, \quad M_{3,1,2,0} = \{n \in M_{3,1,2} | n \neq p^\alpha\}.\end{aligned}$$

Ясно, что $M_{3,1} = M_{3,1,1} \cdot M_{3,1,2}$, поэтому $\zeta(M_{3,1}|\alpha) = \zeta(M_{3,1,1}|\alpha) \cdot \zeta(M_{3,1,2}|\alpha)$.

Нетрудно описать $P(M)$ — множество простых элементов для этих моноидов.

$$P(M_{3,1,1}) = \mathbb{P}_{3,1}.$$

$P(M_{3,1,2}) = \mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}$ и состоит из псевдопростых чисел вида $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — произвольные простые числа вида $3m + 2$. В частности, в это множество псевдопростых чисел входят квадраты простых.

Множество простых элементов $P(M_{3,1,2,0})$ состоит из псевдопростых чисел вида $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — произвольные различные простые числа вида $3m + 2$.

Таким образом, $P(M_{3,1,2,0}) \subset P(M_{3,1,2})$ и в $P(M_{3,1,2,0})$ не входят квадраты простых.

Ясно, что $P(M_{3,1}) = \mathbb{P}_{3,1} \cup (\mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2})$.

Обозначим через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

В частности,

$$\zeta(M_{3,1,1}|\alpha) = P(M_{3,1,1}|\alpha).$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \dots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \dots < r_k, \quad r_1, \dots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x , тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Так как в моноиде $M_{3,1,2}$ нет однозначности разложения на простые элементы, то

$$\zeta(M_{3,1,2}|\alpha) \neq P(M_{3,1,2}|\alpha).$$

Цель данной статьи — описать моноиды натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, изучить их свойства, дзета-функции этих моноидов натуральных чисел и найти их обратные ряды Дирихле.

2. Обращение дзета-функций произвольных множеств натуральных чисел

Для произвольного непустого множества A натуральных чисел рассмотрим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$, заданную равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > \sigma_A), \quad (1)$$

где $\sigma_A \leq 1$ — абсцисса сходимости дзета-ряда, и через $\zeta^*(A|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть $\zeta^*(A|\alpha) = \zeta^{-1}(A|\alpha)$.

Если A — конечное множество натуральных чисел, то дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ задается конечной суммой, которая определяет аналитическую функцию на всей комплексной α -плоскости, поэтому $\sigma_A = -\infty$.

Если A — бесконечное множество натуральных чисел, то ряд для дзета-функции $\zeta(A|\alpha)$ при $\alpha = 0$ расходится, поэтому $\sigma_A \geq 0$. По теореме Ландау (см. [15], стр. 156) в точке $\alpha = \sigma_A$ будет особая точка дзета-функции $\zeta(A|\alpha)$.

Пусть $\beta > 1$ и множество натуральных чисел $A_{\mathbb{N},\beta}$ имеет вид

$$A_{\mathbb{N},\beta} = \left\{ \left[n^\beta \right] \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

ЛЕММА 1. *Для любого натурального n справедливо неравенство $[n^\beta] < [(n+1)^\beta]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим при $\beta \geq 1$ функцию $f(\beta) = (n+1)^\beta - n^\beta$. Так как $f'(\beta) = (n+1)^\beta \ln(n+1) - n^\beta \ln n > 0$, то при $\beta > 1$ имеем $f(\beta) > f(1) = 1$. Отсюда следует, что $[(n+1)^\beta] > n^\beta$ и, следовательно, $[n^\beta] < [(n+1)^\beta]$, что и требовалось доказать. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *Для $\beta > 1$ и дзета-функции $\zeta(A_{\mathbb{N},\beta}|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_{A_{\mathbb{N},\beta}} = \frac{1}{\beta}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства предыдущей леммы следует, что

$$\zeta(\beta\sigma) - \frac{1}{2^{\beta\sigma}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\beta\sigma}} < \zeta(A_{\mathbb{N},\beta}|\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n^\beta]^\sigma} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\beta\sigma}} = 1 + \zeta(\beta\sigma).$$

Так как ряд для $\zeta(\beta\sigma)$ сходится при $\beta\sigma > 1$ и расходится при $\beta\sigma \leq 1$, то утверждение теоремы доказано. $\square$

Доказанная теорема допускает следующее частичное обобщение. Пусть B — произвольное множество натуральных чисел с единицей и $\beta > 1$ — натуральное число. Определим множество натуральных чисел $A_{B,\beta}$ равенством

$$A_{B,\beta} = \left\{ n^\beta \mid n \in B \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для натурального $\beta > 1$ и дзета-функции $\zeta(A_{B,\beta}|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_{A_{B,\beta}} = \frac{\sigma_B}{\beta}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\zeta(B|\beta\sigma) = \sum_{n \in B} \frac{1}{n^{\beta\sigma}} = \sum_{m \in A_{B,\beta}} \frac{1}{m^\sigma} = \zeta(A_{B,\beta}|\sigma).$$

Так как ряд для $\zeta(B|\beta\sigma)$ сходится при $\beta\sigma > \sigma_B$ и расходится при $\beta\sigma \leq \sigma_B$, то утверждение теоремы доказано. $\square$

Нетрудно понять, что если $1 \in A$, то

$$\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}, \quad (2)$$

где коэффициенты $x_A(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$x_A(1) = 1, \quad \sum_{m|n, m \in A} x_A\left(\frac{n}{m}\right) = 0 \quad (n \in M(A), n > 1) \quad (3)$$

и $M(A)$ — минимальный моноид, порожденный множеством A .

Обозначим через $\sigma_{A,1}$ число, такое что для $A^* = A \setminus \{1\}$ и

$$S(A, \alpha) = \sum_{n \in A^*} \frac{1}{n^\alpha}$$

выполнено $|S(A, \alpha)| < 1$ при $\sigma > \sigma_{A,1}$, тогда

$$\begin{aligned} \zeta^{-1}(A|\alpha) &= \frac{1}{1 + S(A, \alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu S^\nu(A, \alpha) = \\ &= 1 - \sum_{n \in A^*} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{n_1, \dots, n_\nu \in A^*} \frac{1}{(n_1 \dots n_\nu)^\alpha} = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha} \end{aligned}$$

и для $x_A(n)$ выполнены соотношения

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{\nu \geq 1} (-1)^\nu y_\nu(n) \quad n \in M^*(A^*),$$

где $y_\nu(n)$ — количество решений уравнения $n = n_1 \dots n_\nu$ в натуральных $n_1, \dots, n_\nu \in A^*$. Ясно, что $M(A) = M^*(A^*) \cup \{1\}$.

Таким образом, если σ_A^* определяет правую полуплоскость $\sigma > \sigma_A^*$ абсолютной сходимости обратного ряда $\zeta^*(A|\alpha)$, то $\sigma_A^* \leq \sigma_{A,1}$.

Определим последовательно следующие множества натуральных чисел:

$$\mathbb{N}_1(A^*) = A^*, \quad \mathbb{N}_{\nu+1}(A^*) = \mathbb{N}_\nu(A^*) \cdot A^* \quad (\nu \geq 1).$$

Моноид $M(A)$ называется свободным, если $\mathbb{N}_\nu(A^*) \cap \mathbb{N}_\mu(A^*) = \emptyset$ для любых $\nu \neq \mu$.

ЛЕММА 2. Если $M(A)$ — свободный моноид, то $P(M(A)) = A^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если найдется элемент $a \in A^*$ такой, что

$$a = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_\nu \quad (\nu \geq 2),$$

то $a \in \mathbb{N}_\nu(A^*)$ и $\mathbb{N}_\nu(A^*) \cap \mathbb{N}_1(A^*) \neq \emptyset$, что доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 3. Для любого множества A натуральных чисел, для которого $M(A)$ — свободный моноид, справедливы соотношения

$$S(A, \sigma_{A,1}) = 1, \quad \sigma_A^* = \sigma_{A,1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $S(A, \sigma)$ монотонно убывает при росте σ , то найдётся $\sigma_{A,1} \geq 0$ такое, что $S(A, \sigma_{A,1}) = 1$. Очевидно, что при $\sigma > \sigma_{A,1}$ будет выполнено неравенство $|S(A, \alpha)| < 1$. Тем самым доказано первое утверждение леммы.

Далее заметим, что при $\sigma > \sigma_{A,1}$ выполняется равенство

$$\frac{1}{1 - S(A, \alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} S^\nu(A, \alpha).$$

Так как $M(A)$ — свободный моноид, то

$$M(A) = \{1\} \cup \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathbb{N}_\nu(A^*) \right)$$

и

$$\frac{1}{1+S(A, \alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}(A^*)} \frac{y_{\nu}(n)}{n^{\alpha}},$$

$$\frac{1}{1-S(A, \alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}(A^*)} \frac{y_{\nu}(n)}{n^{\alpha}}.$$

Отсюда следует, что если ряд для $\frac{1}{1+S(A, \sigma)}$ сходится абсолютно, то и ряд для $\frac{1}{1-S(A, \sigma)}$ сходится. Так как ряд для $\frac{1}{1-S(A, \sigma)}$ при $\sigma = \sigma_{A,1}$ расходится, то следовательно $\sigma_A^* = \sigma_{A,1}$ и лемма полностью доказана. $\square$

ЛЕММА 4. Для любого множества A натуральных чисел справедливо неравенство

$$\sigma_{A,1} < 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для $\alpha = \sigma + it$ справедливы неравенства

$$|S(A, \alpha)| \leq S(A, \sigma) \leq S(\mathbb{N}, \sigma).$$

Далее имеем

$$S(\mathbb{N}, 2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1,$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Пусть имеется бесконечная вложенная последовательность множеств натуральных чисел с единицей:

$$\{1\} \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \subset A. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что бесконечная последовательность (4) сходится к A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A,$$

если для любого натурального T найдется натуральное $n(T)$ такое, что для любого $n \geq n(T)$ выполняется равенство

$$[1; T] \cap A_n = [1; T] \cap A.$$

ТЕОРЕМА 3. Для любой сходящейся последовательности (4) выполняются соотношения

$$\sigma_{A_1} \leq \sigma_{A_2} \leq \dots \leq \sigma_{A_n} \leq \dots \leq \sigma_A \quad (5)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(A_n | \alpha) = \zeta(A | \alpha) \quad (6)$$

равномерно сходится в любой α -полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > \sigma_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения сходимости следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и $\sigma_0 > \sigma_A$ найдётся натуральное $T(\varepsilon, \sigma_0)$ такое, что для любого $T \geq T(\varepsilon, \sigma_0)$ выполняется

$$0 \leq \zeta(A, T | \sigma_0) = \sum_{n \in A, n > T} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого натурального $n \geq n(T)$ выполняются неравенства

$$0 \leq \zeta(A | \sigma_0) - \zeta(A_n | \sigma_0) \leq \zeta(A, T | \sigma_0) < \varepsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость предела (6). Соотношения (5) очевидны. $\square$

3. Дзета-функция множества простых чисел

В работе [8] важную роль играл ряд Дирихле

$$L(\alpha) = \sum_p \frac{1}{p^\alpha},$$

через который выражается логарифм дзета-функции

$$\ln \zeta(\alpha) = L(\alpha) + \theta_1(\alpha) \quad (\sigma > 1), \quad \theta_1(\alpha) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Если $\mathbb{P}$ — множество всех простых, то $L(\alpha) = \zeta(\mathbb{P}|\alpha)$.

Будем через $\mathbb{P}_0$ обозначать множество простых дополненное 1. Тогда $\zeta(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \zeta(\mathbb{P}|\alpha)$. Так как согласно лемме 4 $|\zeta(\mathbb{P}|\alpha)| < 1$ при $\sigma \geq 2$, то справедливо равенство

$$\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha) \quad (\sigma > \sigma_{\mathbb{P}_0}^*), \quad 1 < \sigma_{\mathbb{P}_0}^* < 2.$$

Пусть $\nu(n)$ — количество различных простых делителей числа n , а $V(n)$ — общее число простых делителей числа n с учётом их кратности. Таким образом, если $n = \prod_{j=1}^{\nu(n)} p_j^{\alpha_j}$ — каноническое разложение числа n на простые множители $1 < p_1 < \dots < p_{\nu(n)}$, то $V(n) = \sum_{j=1}^{\nu(n)} \alpha_j$.

Функция $\nu(n)$ является аддитивной арифметической функцией, так как для любых взаимно простых n и m имеем $\nu(nm) = \nu(n) + \nu(m)$. Функция $V(n)$ является вполне аддитивной арифметической функцией, так как для любых натуральных n и m имеем $V(nm) = V(n) + V(m)$.

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu$ ($\nu \geq 0$) множество всех натуральных чисел n с $V(n) = \nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$\mathbb{N} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{N}_\nu, \quad \mathbb{N}_0 = \{1\}, \quad \mathbb{N}_\nu \cap \mathbb{N}_\mu = \emptyset \quad (\nu \neq \mu). \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{P}, \quad \mathbb{N}_\nu = \mathbb{N}_{\nu-1} \cdot \mathbb{P} \quad (\nu \geq 0).$$

Для дальнейшего нам потребуется ещё одна мультипликативная функция $\text{rad}(n)$ — радикал натурального числа, которая определяется следующими условиями

$$\text{rad}(n)|n, \quad \nu(n) = \nu(\text{rad}(n)), \quad \nu(\text{rad}(n)) = V(\text{rad}(n)).$$

Другими словами, если $n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}$, то $\text{rad}(n) = \prod_{p|n} p$.

В силу разбиения (7) можно определить единую функцию $x(n)$ такую, что

$$\zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu} \frac{x(n)}{n^\alpha} \quad (\nu \geq 0).$$

ЛЕММА 5. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$x(1) = 1, \quad x(n) = \sum_{p|n} x\left(\frac{n}{p}\right) \quad (n > 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение тривиально.

Пусть $\nu = 1$, тогда $\mathbb{N}_1 = \mathbb{P}$ и $x(p) = 1$ и утверждение леммы выполнено.

Пусть $\nu > 1$, тогда

$$\zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu-1}} \frac{x(n)}{n^\alpha} \right) \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{p|n} x\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 6. *Справедливо равенство*

$$x(n) = \frac{(V(n))!}{\prod_{p|n} (\alpha_p)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём индукцию по n .

При $n = 1$ утверждение леммы тривиально.

Пусть $n = m > 1$ и для всех $n < m$ утверждение леммы выполнено. Предположим, что $m = \prod_{\nu=1}^k p_\nu^{\alpha_\nu}$, тогда по лемме 5 имеем:

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{\nu=1}^k x\left(\frac{n}{p_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^k \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k - 1)! \alpha_\nu}{\prod_{p|n} (\alpha_p)!} = \\ &= \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k - 1)! (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\prod_{p|n} (\alpha_p)!} = \frac{(V(n))!}{\prod_{p|n} (\alpha_p)!}, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{V(n)} \frac{(V(n))!}{\prod_{p|n} (\alpha_p)!}}{n^\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha) &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu} \frac{x(n)}{n^\alpha} = \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{V(n)} x(n)}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{V(n)} \frac{(V(n))!}{\prod_{p|n} (\alpha_p)!} \cdot \frac{1}{n^\alpha}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Обозначим через $\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) = \zeta(\alpha) \zeta^{-1}(\mathbb{P}_0|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y(n)$:

$$\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y(n)}{n^\alpha}, \quad y(1) = 1. \quad (8)$$

ЛЕММА 7. *Справедливо рекуррентное равенство*

$$y(n) = 1 - \sum_{p|n} y\left(\frac{n}{p}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\zeta(\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0 | \alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}} \frac{y(n)}{n^{\alpha}}, \quad \zeta(\mathbb{P}_0 | \alpha) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{P}} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

поэтому

$$\zeta(\mathbb{N}_{\nu} | \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}} \frac{y(n)}{n^{\alpha}} + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu-1}} \frac{y(n)}{n^{\alpha}} \right) \zeta(\mathbb{P} | \alpha), \quad 1 = y(n) + \sum_{p|n} y\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 8. *Справедливо равенство*

$$y(p^{\alpha}) = \frac{1 + (-1)^{\alpha}}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$y(p^{\alpha}) = 1 - y(p^{\alpha-1}),$$

поэтому

$$y(p) = 0, \quad y(p^2) = 1, \quad y(p^3) = 0, \dots, y(p^{\alpha}) = \frac{1 + (-1)^{\alpha}}{2}, \dots$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 9. *Если $n = \text{rad}(n)$, то справедливы равенства*

$$y(n) = (-1)^{\nu(n)} (\nu(n))! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\nu(n)} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!} \right), \quad \lim_{\nu(n) \rightarrow \infty} \frac{y(n)(-1)^{\nu(n)}}{\nu(n)!} = \frac{1}{e}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $n = \text{rad}(n)$, то $n = p_1 p_2 \dots p_{\nu(n)}$ и $p_{\mu} \neq p_{\lambda}$ при $\mu \neq \lambda$.

При $\nu(n) = 1$ имеем: $n = p$ и утверждение леммы справедливо в силу предыдущей леммы. Далее проведём индукцию по величине $\nu(n)$, получим при $\nu(n) = m + 1$:

$$y(n) = 1 - (m+1)(-1)^m m! \left(1 + \sum_{\mu=1}^m \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!} \right) = (-1)^{m+1} (m+1)! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{m+1} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!} \right),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

С помощью принципа вложенности, который будет разработан в следующем разделе, можно доказать общую теорему о величине $y(n)$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\nu(n) = k \geq 1$ и*

$$n = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}, \quad p_1 < \dots < p_k, \quad n_1, \dots, n_k \geq 1,$$

тогда справедливо равенство

$$y(n) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \dots \sum_{\nu_k=0}^{n_k} (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_k} \frac{(\nu_1+\dots+\nu_k)!}{\prod_{i=1}^k (\nu_i)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0 | \alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) \zeta^*(\mathbb{P}_0 | \alpha) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{V(n)} \frac{(V(n))!}{\prod_{p|n} (\alpha_p)!}}{n^\alpha} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m|n} (-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod_{p|m} (\alpha_p)!}.\end{aligned}$$

Так как из $m|n$ следует, что $m = p_1^{\nu_1} \dots p_k^{\nu_k}$, то

$$\sum_{m|n} (-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod_{p|m} (\alpha_p)!} = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \dots \sum_{\nu_k=0}^{n_k} (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_k} \frac{(\nu_1+\dots+\nu_k)!}{\prod_{i=1}^k (\nu_i)!}$$

и теорема доказана. $\square$

4. Вложенные последовательности моноидов, порожденные простыми числами

Рассмотрим естественную нумерацию простых чисел

$$\mathbb{P} = \{2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \dots < p_n < \dots\},$$

где через p_n обозначается n -ое простое число в порядке их следования в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Обозначим через P_n начальный отрезок последовательности простых чисел:

$$P_n = \{2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \dots < p_n\} \quad (n \geq 1).$$

Через $P_n^{(0)}$ будем обозначать последовательность простых чисел $p_1 < \dots < p_n$ с добавленной единицей:

$$P_n^{(0)} = \{1\} \cup P_n = \{1 < p_1 < \dots < p_n\}.$$

Вложенная последовательность множеств простых чисел

$$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset \dots \subset \mathbb{P} \quad (9)$$

порождает вложенную последовательность моноидов с однозначным разложением на простые числа

$$\{1\} \subset M(P_1) \subset M(P_2) \subset \dots \subset M(P_n) \subset \dots \subset M(\mathbb{P}) = \mathbb{N}. \quad (10)$$

Теперь рассмотрим свойства соответствующих последовательностей дзета-функций:

$$\zeta(P_1 | \alpha), \zeta(P_2 | \alpha), \dots, \zeta(P_n | \alpha), \dots, \zeta(\mathbb{P} | \alpha), \quad (11)$$

$$\zeta^*(P_1^{(0)} | \alpha), \zeta^*(P_2^{(0)} | \alpha), \dots, \zeta^*(P_n^{(0)} | \alpha), \dots, \zeta^*(\mathbb{P}_0 | \alpha), \quad (12)$$

$$\zeta(\{1\} | \alpha), \zeta(M(P_1) | \alpha), \zeta(M(P_2) | \alpha), \dots, \zeta(M(P_n) | \alpha), \dots, \zeta(\mathbb{N} | \alpha) = \zeta(\alpha), \quad (13)$$

$$\zeta(M(P_1), P_1^{(0)} | \alpha), \zeta(M(P_2), P_2^{(0)} | \alpha), \dots, \zeta(M(P_n), P_n^{(0)} | \alpha), \dots, \zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0 | \alpha), \quad (14)$$

где $\zeta(M(P_n), P_n^{(0)} | \alpha) = \zeta(M(P_n) | \alpha) \zeta^*(P_n^{(0)} | \alpha)$.

Во-первых, мы имеем

$$\sigma_{\{1\}} = \sigma_{P_1} = \sigma_{P_2} = \dots = \sigma_{P_n} = \dots = -\infty, \quad \sigma_{\mathbb{P}} = 1, \quad (15)$$

так как $\zeta(\{1\}|\alpha) = 1$ и для любого n дзета-функция $\zeta(P_n|\alpha) = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{p_\nu^\alpha}$ — аналитическая функция на всей комплексной α -плоскости. Последнее равенство в (15) хорошо известно (см. [14]).

Во-вторых, на обратные дзета-функции $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$ удается перенести некоторые свойства обратной дзета-функции $\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha)$, а именно, справедливы следующие утверждения.

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu(P_n)$ ($\nu \geq 0$) множество всех натуральных чисел n из $M(P_n)$ с $V(n) = \nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$M(P_n) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{N}_\nu(P_n), \quad \mathbb{N}_0(P_n) = \{1\}, \quad \mathbb{N}_\nu(P_n) \cap \mathbb{N}_\mu(P_n) = \emptyset \quad (\nu \neq \mu). \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1(P_n) = P_n, \quad \mathbb{N}_\nu(P_n) = \mathbb{N}_{\nu-1}(P_n) \cdot P_n \quad (\nu \geq 0)$$

и моноид $M(P_n)$ — свободный моноид, следовательно, к нему применимы леммы 2—4 и теорема 3, которые можно сформулировать следующим образом.

ЛЕММА 10. Для любого n и свободного моноида $M(P_n)$ выполняется равенство

$$P(M(P_n)) = P_n.$$

ЛЕММА 11. Для любого n и свободного моноида $M(P_n)$ справедливы соотношения

$$S(P_n, \sigma_{P_n,1}) = 1, \quad \sigma_{P_n^{(0)}}^* = \sigma_{P_n,1} < \sigma_{P_{n+1}^{(0)}}^*.$$

Таким образом, имеем цепочку неравенств:

$$0 = \sigma_{P_1^{(0)}}^* < \sigma_{P_2^{(0)}}^* < \dots < \sigma_{P_n^{(0)}}^* < \dots < \sigma_{\mathbb{P}_0}^*, \quad 1 < \sigma_{\mathbb{P}_0} < 2.$$

ТЕОРЕМА 6. Последовательность множеств простых (9) сходится к $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$.

Последовательность вложенных моноидов (10) сходится к $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(P_n)$.

Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(P_n|\alpha) = \zeta(\mathbb{P}|\alpha) \quad (17)$$

равномерно сходится в любой α -полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > 1$.

Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha) = \zeta(\mathbb{P}_0|\alpha) \quad (18)$$

равномерно сходится в любой α -полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > \sigma_{\mathbb{P}_0}^*$.

Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(M(P_n)|\alpha) = \zeta(\alpha) \quad (19)$$

равномерно сходится в любой α -полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > 1$.

Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) \quad (20)$$

равномерно сходится в любой α -полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > \sigma_{\mathbb{P}_0}^*$.

В-третьих, мы обнаруживаем важное свойство *вложенности* дзета-функций вложенных моноидов, которое заключается в том что каждая из четырех дзета-функций $\zeta(P_n|\alpha)$, $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$, $\zeta(M(P_n)|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha)$ образуется из соответствующих дзета-функций с номером $n + 1$ сужением области суммирования, а значения коэффициентов остается неизменным. Более того, это остается применительно и к предельным дзета-функциям. Тот факт, что $\zeta(P_n|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n)|\alpha)$ получаются сужением области суммирования из $\zeta(\mathbb{P}|\alpha)$ и $\zeta(\alpha)$ тривиально следуют из определения этих дзета-функций.

Аналогичное утверждение для $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha)$ можно обосновать на основании того факта, что количество решений уравнения $m = m_1 \dots m_\nu$ в натуральных $m_1, \dots, m_\nu \in P_n$ и в натуральных $m_1, \dots, m_\nu \in \mathbb{P}$ одинаково для $m \in M(P_n)$. Из свойства вложенности сразу вытекают утверждения следующих теоремы и леммы.

ТЕОРЕМА 7. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha) = \sum_{m \in M(P_n)} \frac{(-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod_{p|m} (\alpha_p)!}}{m^\alpha}.$$

ЛЕММА 12. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$\zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha) = \sum_{m \in M(P_n)} \frac{y(m)}{m^\alpha},$$

где $y(m)$ определяются равенством (8).

Будем доказательство с помощью обобщенного свойства вложенности называть принципом вложенности. Покажем его применение. Пусть q — произвольное простое число, $A = \{q\}$ — одноэлементное множество, $A^{(0)} = \{1, q\}$ и $M(q) = \{q^\nu | \nu \geq 0\}$ — геометрическая прогрессия с единичным первым членом и знаменателем q тогда

$$\zeta(A|\alpha) = \frac{1}{q^\alpha}, \quad (21)$$

$$\zeta^*(A^{(0)}|\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(q^\nu)^\alpha} = \sum_{m \in M(q)} \frac{(-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod_{p|m} (\alpha_p)!}}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 0), \quad (22)$$

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n)^\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 0), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \zeta(M(q), A^{(0)}|\alpha) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2\alpha}}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^{2n})^\alpha} = \sum_{m \in M(q)} \frac{\frac{(-1)^{V(m)+1}}{2}}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 0). \end{aligned} \quad (24)$$

Из формулы (23) следует, что дзета-функция геометрической прогрессии аналитическая функция во всей α -плоскости кроме точек $\alpha_0 = 0$, где у неё простой полюс с вычетом

$$\text{Res}_0 \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

и точек $\alpha_k = \frac{2ki\pi}{\ln q}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), в которых простые полюса с вычетами

$$\operatorname{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}} \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

Можно показать, что для мероморфной функции $\zeta(M(q)|\alpha)$ справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} \zeta(M(q)|\alpha) &= \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2 \pi^2} = \\ &= \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right), \end{aligned}$$

которые справедливы во всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов.

Перейдем к более сложному случаю. Пусть $q < r$ — произвольные простые числа, $A = \{q, r\}$ — двухэлементное множество, $A^{(0)} = \{1, q, r\}$ и $M(q, r) = \{q^\nu r^\mu | \nu, \mu \geq 0\}$ — произведение двух геометрических прогрессий с единичными первыми членами и знаменателем q и r , соответственно, тогда

$$\zeta(A|\alpha) = \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \zeta^*(A^{(0)}|\alpha) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}} = \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu! \mu!}}{(q^\nu r^\mu)^\alpha} = \\ &= \sum_{m \in M(q, r)} \frac{(-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod_{p|m} (\alpha_p)!}}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > \sigma_A > 0), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\zeta(M(q, r)|\alpha) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n r^m)^\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{r^\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 0), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \zeta(M(q, r), A^{(0)}|\alpha) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{r^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}} = \\ &= \left(\sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n r^m)^\alpha} \right) \left(\sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu! \mu!}}{(q^\nu r^\mu)^\alpha} \right) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n r^m)^\alpha} \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^m (-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu! \mu!} = \\ &= \sum_{m \in M(P_n)} \frac{y(m)}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > \sigma_{P_n}^*), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$y(q^n r^m) = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^m (-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu! \mu!}.$$

В общем случае, когда $q_1 < \dots < q_k$ — произвольные простые числа, $n \in M(q_1, \dots, q_k)$, то для

$$n = q_1^{n_1} \dots q_k^{n_k}, \quad n_1, \dots, n_k \geq 1$$

имеем

$$y(n) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \dots \sum_{\nu_k=0}^{n_k} (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_k} \frac{(\nu_1+\dots+\nu_k)!}{\prod_{i=1}^k (\nu_i)!}.$$

5. Примеры моноидов с однозначным разложением на простые элементы

Рассмотрим множество псевдопростых четных чисел

$$A_{3,1,2,2} = \{2p | p = 3n + 2, n \geq 1\}$$

и минимальный моноид $M(A_{3,1,2,2})$, для которого выполнено соотношение

$$M(A_{3,1,2,2}) = \left\{ n = \prod_{p|n} (2p)^{\alpha_p} \mid p \in \mathbb{P}_{3,2}, p > 2 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $M(A_{3,1,2,2})$ — моноид с однозначным разложением на простые множители. Поэтому для дзета-функции этого моноида имеет место разложение в Эйлерово произведение

$$\zeta(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = P(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = \prod_{p \in \mathbb{P}_{3,2}, p > 2} \left(1 - \frac{1}{(2p)^\alpha} \right)^{-1}.$$

Для любого натурального числа n определим четную и нечетную части $n^{(1)}$, $n^{(2)}$ формулами

$$n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}, \quad n^{(1)} = \prod_{p|n, p > 2} p^{\alpha_p}, \quad n^{(2)} = 2^{\alpha_2}.$$

Ясно, что если $2 \nmid n$, то $n^{(2)} = 1$.

ЛЕММА 13. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = \sum_{n \in M(A_{3,1,2,2})} \frac{\mu(n^{(1)})}{n^\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $n \in M(A_{3,1,2,2})$, то $n = \prod_{p|n, p > 2} (2p)^{\alpha_p}$ и

$$n^{(1)} = \prod_{p|n, p > 2} p^{\alpha_p}, \quad n^{(2)} = 2^{\alpha_2},$$

где $\alpha_2 = \sum_{p|n, p > 2} \alpha_p$.

Так как

$$\begin{aligned} \zeta^*(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) &= \frac{1}{P(M(A_{3,1,2,2})|\alpha)} = \prod_{p \in \mathbb{P}_{3,2}, p > 2} \left(1 - \frac{1}{(2p)^\alpha} \right) = \\ &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{2 < p_1 < \dots < p_\nu \in \mathbb{P}_{3,2}} \frac{1}{2^\nu p_1 \cdot \dots \cdot p_\nu} = \sum_{n \in M(A_{3,1,2,2})} \frac{\mu(n^{(1)})}{n^\alpha}, \end{aligned}$$

то утверждение леммы доказано. $\square$

Доказанная лемма — частный случай следующего общего утверждения.

ТЕОРЕМА 8. Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то справедливо равенство

$$\zeta^*(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n \in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_M(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^\nu, & \text{при } n = r_1 \dots r_\nu, r_1 < \dots < r_\nu \in P(M), \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1, r, n_1 \in M, r > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то существует эйлерово произведение и мы легко находим обратный ряд

$$\begin{aligned} \zeta(M|\alpha) &= P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1}, \\ \zeta^*(M|\alpha) &= \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n \in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha} \end{aligned}$$

и теорема полностью доказана. $\square$

Следующая конструкция даёт несчетное множество моноидов с однозначным разложением на простые множители.

Пусть P — произвольное непустое собственное подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Через $\bar{P}$ обозначим его непустое дополнение: $\bar{P} = \mathbb{P} \setminus P$. Рассмотрим произвольную функцию $f : P \rightarrow M(\bar{P})$. Моноид $M(P, f)$ определим следующим равенством

$$M(P, f) = \left\{ n = \prod_{p \in P} (f(p)p)^{\alpha_p} \mid \sum_{p \in P} \alpha_p < \infty \right\}.$$

Для любого натурального числа n из $M(P, f)$ определим два сомножителя $n^{(P)}, n^{(\bar{P})}$ формулами

$$n = \prod_{p \in P} (f(p)p)^{\alpha_p}, \quad n^{(P)} = \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}, \quad n^{(\bar{P})} = \prod_{p \in \bar{P}} (f(p))^{\alpha_p}.$$

ТЕОРЕМА 9. Для любого множества простых P и любой функции $f : P \rightarrow M(\bar{P})$ моноид $M(P, f)$ имеет однозначное разложение на простые множители. Для дзета-функции $\zeta(M(P, f)|\alpha)$ имеется разложение в эйлерово произведение

$$\zeta(M(P, f)|\alpha) = P(M(P, f)|\alpha) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{(f(p)p)^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для множества $P(M(P, f))$ простых элементов моноида $M(P, f)$ выполняется равенство

$$P(M(P, f)) = \{f(p)p \mid p \in P\}.$$

Справедливо равенство

$$\zeta^*(M(P, f)|\alpha) = \prod_{r \in P(M(P, f))} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n \in M(P, f)} \frac{\mu_{M(P, f)}(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_{M(P,f)}(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_{M(P,f)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^\nu, & \text{при } n = r_1 \dots r_\nu, r_1 < \dots < r_\nu \in P(M(P,f)), \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1, r, n_1 \in M(P,f), r > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть

$$\prod_{p \in P} (f(p)p)^{\alpha_p} = \prod_{p \in P} (f(p)p)^{\beta_p},$$

тогда в силу основной теоремы арифметики имеем

$$\prod_{p \in P} p^{\alpha_p} = \prod_{p \in P} p^{\beta_p}, \quad \prod_{p \in P} (f(p))^{\alpha_p} = \prod_{p \in P} (f(p))^{\beta_p}.$$

Из первого равенства следует, что для любого $p \in P$ выполняется равенство показателей степеней: $\alpha_p = \beta_p$. тем самым однозначность разложения на простые элементы доказана. Одновременно отсюда следует, что $P(M(P,f)) = \{f(p)p | p \in P\}$. Все остальные утверждения теоремы вытекают из однозначности разложения на простые элементы. $\square$

Так как различных подмножеств счетного множества несчетное множество, то мы получаем несчетное множество различных моноидов $M(P, f)$ с однозначным разложением на простые элементы.

Рассмотренную конструкцию можно обобщить следующим образом. Прежде всего заметим, что моноиды $M(P)$ и $M(\bar{P})$ взаимно просты. Пусть r_i ($i \in I$) — конечная или бесконечная последовательность попарно взаимно простых натуральных чисел больше 1 из моноида $M(P)$ и f — произвольная функция на последовательности r_i с $f(r_i) \in M(\bar{P})$. Моноид $M(r_i, I, f)$ определим следующим равенством

$$M(r_i, I, f) = \left\{ n = \prod_{i \in I} (f(r_i)r_i)^{\alpha_i} \mid \sum_{i \in I} \alpha_i < \infty \right\}.$$

Для любого натурального числа n из $M(r_i, I, f)$ определим два сомножителя $n^{(I)}$, $n^{(f,I)}$ формулами

$$n = \prod_{i \in I} (f(r_i)r_i)^{\alpha_i}, \quad n^{(I)} = \prod_{i \in I} r_i^{\alpha_i}, \quad n^{(f,I)} = \prod_{i \in I} (f(r_i))^{\alpha_i}.$$

ТЕОРЕМА 10. Для любой последовательности r_i ($i \in I$) попарно взаимно простых натуральных чисел больше 1 из моноида $M(P)$ и любой функции f с $f(r_i) \in M(\bar{P})$ моноид $M(r_i, I, f)$ имеет однозначное разложение на простые множители. Для дзета-функции $\zeta(M(r_i, I, f)|\alpha)$ имеется разложение в эйлерово произведение

$$\zeta(M(r_i, I, f)|\alpha) = P(M(r_i, I, f)|\alpha) = \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{(f(r_i)r_i)^\alpha} \right)^{-1}.$$

Для множества $P(M(r_i, I, f))$ простых элементов моноида $M(r_i, I, f)$ выполняется равенство

$$P(M(r_i, I, f)) = \{f(r_i)r_i | i \in I\}.$$

Справедливо равенство

$$\zeta^*(M(r_i, I, f)|\alpha) = \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{(f(r_i)r_i)^\alpha} \right) = \sum_{n \in M(r_i, I, f)} \frac{\mu_{M(r_i, I, f)}(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_{M(r_i, I, f)}(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_{M(r_i, I, f)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^\nu, & \text{при } n = (f(r_{i_1})r_{i_1}) \dots (f(r_{i_\nu})r_{i_\nu}), r_{i_1} < \dots < r_{i_\nu} (i_\mu \in I, 1 \leq \mu \leq \nu), \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1, r, n_1 \in M(r_i, I, f), r > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть

$$\prod_{i \in I} (f(r_i)r_i)^{\alpha_i} = \prod_{i \in I} (f(r_i)r_i)^{\beta_i},$$

тогда в силу основной теоремы арифметики имеем

$$\prod_{i \in I} r_i^{\alpha_i} = \prod_{i \in I} r_i^{\beta_i}, \quad \prod_{i \in I} (f(r_i))^{\alpha_i} = \prod_{i \in I} (f(r_i))^{\beta_i}.$$

Из первого равенства следует, что для любого $i \in I$ выполняется равенство показателей степеней: $\alpha_i = \beta_i$. Тем самым однозначность разложения на простые элементы доказана. Одновременно отсюда следует, что $P(M(r_i, I, f)) = \{f(r_i)r_i | i \in I\}$. Все остальные утверждения теоремы вытекают из однозначности разложения на простые элементы. $\square$

Остановимся на вопросе о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x , которое будем обозначать через $\pi_{M(A)}(x)$. В общем случае это непростая задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ и моноида $M(PE)$ можно дать удовлетворительный ответ.

ТЕОРЕМА 11. Для любого $q \geq 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ для количества простых элементов в моноиде $M(PE)$, не превосходящих x , справедливо равенство

$$\pi_{M(PE)}(x) = \pi_{PE}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE}(x),$$

где $0 \leq \theta_{PE}(x) < 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению экспоненциальной последовательности простых чисел имеем: $q^\nu \leq p_\nu < q^{\nu+1}$ ($\nu \geq 1$). Поэтому, если $q^n \leq x < q^{n+1}$, то $n - 1 \leq \pi_{PE}(x) \leq n$. Но $n \leq \frac{\ln x}{\ln q} < n + 1$. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

ЛЕММА 14. Для $\theta_{PE}(x)$ при $q^n \leq x < q^{n+1}$ справедливо равенство

$$\theta_{PE}(x) = \left\{ \frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\} + \left\{ \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\left\{ \frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\} = \begin{cases} 1 + \left\{ \frac{\ln x}{\ln q} \right\} - \left\{ \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\}, & \text{при } q^n \leq x < p_n, \\ \left\{ \frac{\ln x}{\ln q} \right\} - \left\{ \frac{\ln p_n}{\ln q} \right\}, & \text{при } p_n \leq x < q^{n+1} \end{cases},$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

6. Дзета-функция множества простых элементов моноида

Предыдущие утверждения переносятся со случая множества простых $\mathbb{P}$ на случай моноида $M(r_i, I, f)$ с однозначным разложением на простые элементы и множества его простых элементов $P(M(r_i, I, f))$. Будем для краткости считать, что $A = P(M(r_i, I, f))$, $M(A) = M(r_i, I, f)$. Через $q_i = f(r_i)r_i$ ($i \in I$) будем обозначать простые элементы из A .

Пусть $\nu_A(n)$ — количество различных простых элементов моноида $M(A)$, делящих число $n \in M(A)$, а $V_A(n)$ — общее число простых элементов, на которые разлагается число n с учётом их кратности. Таким образом, если $n = \prod_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}^{\alpha_j}$ — каноническое разложение числа n

на простые элементы моноида $M(A)$ $1 < i_1 < \dots < i_{\nu_A(n)}$, то $V_A(n) = \sum_{j=1}^{\nu(n)} \alpha_j$.

Функция $\nu_A(n)$ является аддитивной арифметической функцией на моноиде $M(A)$, так как для любых взаимно простых относительно делимости в $M(A)$ n и m имеем

$$\nu_A(nm) = \nu_A(n) + \nu_A(m).$$

Функция $V_A(n)$ является вполне аддитивной арифметической функцией на моноиде $M(A)$, так как для любых натуральных n и m из $M(A)$ имеем

$$V_A(nm) = V_A(n) + V_A(m).$$

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu(A)$ ($\nu \geq 0$) множество всех натуральных чисел n из $M(A)$ с $V_A(n) = \nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$M(A) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{N}_\nu(A), \quad \mathbb{N}_0(A) = \{1\}, \quad \mathbb{N}_\nu(A) \cap \mathbb{N}_\mu(A) = \emptyset \quad (\nu \neq \mu). \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1(A) = A, \quad \mathbb{N}_\nu(A) = \mathbb{N}_{\nu-1}(A) \cdot A \quad (\nu \geq 0).$$

Для дальнейшего нам потребуется ещё одна мультипликативная функция $\text{rad}_A(n)$ — радикал натурального числа из $M(A)$, которая определяется следующими условиями

$$\text{rad}_A(n) | n, \quad \nu_A(n) = \nu_A(\text{rad}_A(n)), \quad \nu_A(\text{rad}_A(n)) = V_A(\text{rad}_A(n)).$$

Другими словами, если $n = \prod_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}^{\alpha_j}$, то $\text{rad}_A(n) = \prod_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}$.

В силу разбиения (29) можно определить единую функцию $x_A(n)$ такую, что

$$\zeta^\nu(A|\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha} \quad (\nu \geq 0).$$

ЛЕММА 15. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{r|n, r \in A} x_A\left(\frac{n}{r}\right) \quad (n > 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение тривиально.

Пусть $\nu = 1$, тогда $\mathbb{N}_1(A) = A$ и $x_A(r) = 1$ и утверждение леммы выполнено.

Пусть $\nu > 1$, тогда

$$\zeta^\nu(A|\alpha) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu-1}(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha} \right) \sum_{r \in A} \frac{1}{r^\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu(A)} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{r|n, r \in A} x_A \left(\frac{n}{r} \right),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 16. *Справедливо равенство*

$$x_A(n) = \frac{(V_A(n))!}{\prod_{r|n, r \in A} (\alpha_r)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём индукцию по n .

При $n = 1$ утверждение леммы тривиально.

Пусть $n = m > 1$ и для всех $n < m$ утверждение леммы выполнено. Предположим, что $m = \prod_{\nu=1}^k r_\nu^{\alpha_{r_\nu}}$, тогда по лемме 15 имеем:

$$\begin{aligned} x_A(n) &= \sum_{\nu=1}^k x_A \left(\frac{n}{r_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^k \frac{(\alpha_{r_1} + \dots + \alpha_{r_k} - 1)! \alpha_{r_\nu}}{\prod_{r|n, r \in A} (\alpha_r)!} = \\ &= \frac{(\alpha_{r_1} + \dots + \alpha_{r_k} - 1)! (\alpha_{r_1} + \dots + \alpha_{r_k})}{\prod_{r|n, r \in A} (\alpha_r)!} = \frac{(V_A(n))!}{\prod_{r|n, r \in A} (\alpha_r)!}, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы. $\square$

Будем через A_0 обозначать объединение $A_0 = \{1\} \cup A$.

ТЕОРЕМА 12. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A_0|\alpha) = 1 + \sum_{n \in M^*(A)} \frac{(-1)^{V_A(n)} \frac{(V_A(n))!}{\prod_{r|n, r \in A} (\alpha_r)!}}{n^\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \zeta^*(A_0|\alpha) &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \zeta^\nu(A|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha} = \\ &= 1 + \sum_{n \in M^*(A)} \frac{(-1)^{V_A(n)} x_A(n)}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n \in M^*(A)} (-1)^{V_A(n)} \frac{(V_A(n))!}{\prod_{r|n, r \in A} (\alpha_r)!} \cdot \frac{1}{n^\alpha}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Обозначим через $\zeta(M(A), M_0|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(M(A), A_0|\alpha) = \zeta(M(A)|\alpha) \zeta^{-1}(A_0|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y_A(n)$:

$$\zeta(M(A), A_0|\alpha) = 1 + \sum_{n \in M^*(A)} \frac{y_A(n)}{n^\alpha}, \quad y_A(1) = 1.$$

ЛЕММА 17. *Справедливо рекуррентное равенство*

$$y_A(n) = 1 - \sum_{r|n, r \in A} y_A\left(\frac{n}{r}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\zeta(\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0 | \alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}} \frac{y(n)}{n^{\alpha}}, \quad \zeta(\mathbb{P}_0 | \alpha) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{P}} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

поэтому

$$\zeta(\mathbb{N}_{\nu} | \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}} \frac{y(n)}{n^{\alpha}} + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu-1}} \frac{y(n)}{n^{\alpha}} \right) \zeta(\mathbb{P} | \alpha), \quad 1 = y(n) + \sum_{p|n} y\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 18. *Справедливо равенство*

$$y(p^{\alpha}) = \frac{1 + (-1)^{\alpha}}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$y(p^{\alpha}) = 1 - y(p^{\alpha-1}),$$

поэтому

$$y(p) = 0, \quad y(p^2) = 1, \quad y(p^3) = 0, \dots, y(p^{\alpha}) = \frac{1 + (-1)^{\alpha}}{2}, \dots$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 19. *Если $n = \text{rad}(n)$, то справедливы равенства*

$$y(n) = (-1)^{\nu(n)} (\nu(n))! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\nu(n)} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!} \right), \quad \lim_{\nu(n) \rightarrow \infty} \frac{y(n)(-1)^{\nu(n)}}{\nu(n)!} = \frac{1}{e}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $n = \text{rad}(n)$, то $n = p_1 p_2 \dots p_{\nu(n)}$ и $p_{\mu} \neq p_{\lambda}$ при $\mu \neq \lambda$.

При $\nu(n) = 1$ имеем: $n = p$ и утверждение леммы справедливо в силу предыдущей леммы. Далее проведём индукцию по величине $\nu(n)$, получим при $\nu(n) = m + 1$:

$$y(n) = 1 - (m+1)(-1)^m m! \left(1 + \sum_{\mu=1}^m \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!} \right) = (-1)^{m+1} (m+1)! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{m+1} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!} \right),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

7. Общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы

Из предыдущих рассмотрений возникает естественный вопрос об общем виде моноида натуральных чисел $M(A)$, где A — множество его простых элементов, с однозначным разложением на простые элементы. Будем элементы из A обозначать через q_n . Таким образом

$$A = \{q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots\}. \quad (30)$$

Допускается как конечное множество A , так и бесконечное. Определим конечную или бесконечную последовательность вложенных множеств A_n , где

$$A_n = \{q_1 < q_2 < \dots < q_n\}. \quad (31)$$

Последовательность вложенных множеств вида (31) порождает последовательность вложенных моноидов

$$\{1\} \subset M(A_1) \subset M(A_2) \subset \dots \subset M(A_n) \subset \dots \subset M(A). \quad (32)$$

ЛЕММА 20. *Если A — бесконечное множество простых элементов и $M(A)$ — моноид с однозначным разложением на простые элементы, то*

$$\sigma_A = \sigma_{M(A)}. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из однозначности разложения на простые элементы следует, что дзета-функция моноида $M(A)$ равна эйлерову произведению $P(M(A)|\alpha)$:

$$\zeta(M(A)|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{q_i^\alpha}\right)^{-1} = P(M(A)|\alpha).$$

Прологарифмируем эйлерово произведение в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_{M(A)}$, получим

$$\ln \zeta(M(A)|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\alpha}} = \zeta(A|\alpha) + \theta_A(\alpha),$$

где

$$\theta_A(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\alpha}}.$$

При $\sigma > \sigma_A$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} &< \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\sigma}} = \left(1 - \frac{1}{q_n^\sigma}\right)^{-1} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\sigma}} - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-1)q_n^{m\sigma}}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{q_n^\sigma}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2q_n^{2\sigma}} - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-1)mq_n^{m\sigma}}\right) \leq \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \frac{1 - \frac{1}{3q_n^\sigma}}{1 - \frac{1}{q_n^\sigma}} = \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \frac{3q_n^\sigma - 1}{3q_n^\sigma - 3} \leq \\ &\leq \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \left(1 + \frac{2}{3(2^\sigma - 1)}\right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекают неравенства

$$\frac{1}{2}\zeta(A|2\sigma) < \theta_A(\sigma) < \frac{1}{2}\zeta(A|2\sigma) \left(1 + \frac{2}{3(2^\sigma - 1)}\right).$$

Таким образом, ряд для $\theta_A(\alpha)$ сходится в полуплоскости $\sigma > \frac{\sigma_A}{2} > 0$ и логарифм эйлерова произведения существует при $\sigma > \sigma_A$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 21. *Если A — бесконечное множество простых элементов и $M(A)$ — моноид с однозначным разложением на простые элементы, то для любого натурального n имеем $\sigma_{M(A_n)} = 0$ и в правой полуплоскости $\sigma > 0$ справедливо разложение в эйлерово произведение*

$$\zeta(M(A_n)|\alpha) = \sum_{n \in M(A_n)} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_i^\alpha}\right)^{-1} = P(M(A_n)|\alpha). \quad (34)$$

Кроме того, в любой полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > \sigma_A$ равномерно сходится предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(M(A_n)|\alpha) = \zeta(M(A)|\alpha). \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из однозначности разложения на простые элементы следует равенство (35). Более того, из равенства

$$\zeta(M(A_n)|\alpha) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_i^\alpha}\right)^{-1}$$

вытекает, что $\zeta(M(A_n)|\alpha)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости, кроме точки $\alpha = 0$, в которой у неё полюс порядка n . При этом в левой полуплоскости $\sigma < 0$ имеет место функциональное уравнение

$$\zeta(M(A_n)|\alpha) = (-1)(q_1 \dots q_n)^\alpha \zeta(M(A_n)|-\alpha).$$

Обозначим через $\chi_{M(A)}(m)$ характеристическую функцию моноида $M(A)$, а через $\chi_{M(A_n)}(m)$ характеристическую функцию моноида $M(A_n)$:

$$\chi_{M(A)}(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \in M(A), \\ 0, & \text{при } m \in \mathbb{N} \setminus M(A), \end{cases} \quad \chi_{M(A_n)}(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \in M(A_n), \\ 0, & \text{при } m \in \mathbb{N} \setminus M(A_n). \end{cases}$$

Ясно, что $0 \leq \chi_{M(A)}(m) - \chi_{M(A_n)}(m) \leq 1$ и $\chi_{M(A)}(m) - \chi_{M(A_n)}(m) = 0$ при $1 \leq m \leq q_n$. Пользуясь этими обозначениями, получим

$$\begin{aligned} |\zeta(M(A_n)|\alpha) - \zeta(M(A)|\alpha)| &= \left| \sum_{m>q_n} \frac{\chi_{M(A)}(m) - \chi_{M(A_n)}(m)}{m^\alpha} \right| \leq \\ &\leq \sum_{m \in M(A), m>q_n} \frac{1 - \chi_{M(A_n)}(m)}{m^{\sigma_0}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Определим множество простых $P_n(A)$ равенством

$$P_n(A) = \{p \mid p \mid q_1 \dots q_n\}.$$

Количество элементов в $P_n(A)$ обозначим через K_n . Так как выполнена цепочка вложений

$$P_1(A) \subseteq P_2(A) \subseteq \dots \subseteq P_n(A) \subseteq \dots \subseteq P_\infty(A),$$

где $P_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A)$, то определим единую нумерацию простых чисел из $P_\infty(A)$ следующим образом:

$$\{p_{K_n+1} < p_{K_n+1} < \dots < p_{K_{n+1}}\} = P_{n+1}(A) \setminus P_n(A).$$

Теперь каждому элементу q_i можно поставить в соответствие вектор показателей

$$\vec{\alpha}_{n,i} = (\alpha_{n,i,1}, \dots, \alpha_{n,i,K_n}),$$

исходя из равенства

$$q_i = \prod_{\nu=1}^{K_n} p_\nu^{\alpha_{n,i,\nu}} \quad (i \leq n).$$

ЛЕММА 22. Если справедливо неравенство

$$K_n < n,$$

то в моноиде $M(A_n)$ отсутствует единственность разложения на простые множители.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим рациональное линейное арифметическое пространство $\mathbb{Q}^{K_n}$ размерности $K_n < n$. Отсюда следует, что n векторов $\alpha_{n,i}^{\rightarrow}$ ($1 \leq i \leq n$) будут линейно зависимы. Таким образом, найдутся n рациональных чисел λ_i ($1 \leq i \leq n$), одновременно неравные нулю, такие что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{n,i}^{\rightarrow} = \vec{0}.$$

Представив рациональные числа λ_i ($1 \leq i \leq n$) в виде $\lambda_i = \frac{m_i}{M}$, где M — наименьший общий знаменатель, а m_i — целые числа, получим

$$\sum_{i=1}^n m_i \alpha_{n,i}^{\rightarrow} = \vec{0}.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{m_i > 0} q_i^{m_i} = \prod_{m_i < 0} q_i^{-m_i}.$$

Следовательно, однозначность разложения на простые элементы нарушена и утверждение леммы доказано. $\square$

ЛЕММА 23. Если справедливо равенство

$$K_n = n,$$

то моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n,1,1} & \dots & \alpha_{n,1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \dots & \alpha_{n,n,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из доказательства предыдущей леммы видно, что если вектора показателей линейно зависимы, то однозначность разложения на простые элементы отсутствует.

Если выполнено условие леммы, то вектора показателей будут линейно независимы.

С другой стороны, если однозначность разложения на простые элементы отсутствует, то вектора показателей будут линейно зависимы, отсюда следует утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 24. Если справедливо неравенство

$$K_n > n,$$

то моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда в матрице

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,1,1} & \dots & \alpha_{n,1,K_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \dots & \alpha_{n,n,K_n} \end{pmatrix}$$

найдётся минор порядка n отличный от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, наличие такого минора является необходимым и достаточным условием линейной независимости векторов показателей, что, в свою очередь, является необходимым и достаточным условием однозначности разложения на простые множители. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 13. *Для бесконечного множества простых элементов A моноид $M(A)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда для любого n в матрице*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,1,1} & \dots & \alpha_{n,1,K_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \dots & \alpha_{n,n,K_n} \end{pmatrix}$$

найётся минор порядка n отличный от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если условия теоремы выполнены, то любой моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители. Так как

$$M(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(A_n),$$

то отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

8. Заключение

Данная тема продолжает исследования из работы [8].

В следующих работах мы планируем рассмотреть естественно возникающие в данной области проблемы, а именно:

- аналитическое продолжение для дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел;
- получение функционального уравнения;
- обратные ряды для дзета-функции моноида натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители.

Важным классом моноидов натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители, на наш взгляд, являются моноиды соответствующие подгруппам мультипликативной группы классов вычетов по произвольному модулю.

На наш взгляд, актуальным является вопрос о справедливости аналога теоремы Дэвенпорта-Хельброна для случая дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.

В заключении автор выражает свою глубокую признательность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Айгнер Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. 558 с.
2. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта-Хейльброна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.
3. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.
4. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

5. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4–107.
6. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.
7. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.
8. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
9. Г. Дэвенпорт Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971. — 200 с.
10. А. Гурвиц, Р. Курант Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.
11. Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем. — М.: Мир, 1967. 511 с.
12. И. И. Привалов Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977. — 444 с.
13. Р. Стенли Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990. — 440 с.
14. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.
15. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.
16. Чандрасекхаран К. Арифметические функции, пер. с англ. — М.: Наука, 1975. 272 с.
17. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.
18. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Ajgner M., 1982, *Kombinatornaja teorija*, Izd-vo Mir, Moskva, 558 p.
2. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.
3. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.
4. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.
5. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

6. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoy dzeta-funkcii celochislennyh reshetok", *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.
7. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.
8. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 187–207.
9. Davenport H., 1971, *Mul'tiplikativnaja teorija chisel*, Izd-vo Nauka, Moskva, 200 p.
10. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.
11. Prahar K., 1967, *Raspredelenie prostyh chisel, per. s nem*, Izd-vo Mir, Moskva, 511 p.
12. Privalov I. I., 1977, *Vvedenie v teoriju funkcij kompleksnogo peremennogo*, Izd-vo Nauka, Moskva, 444 p.
13. Stenli R., 1990, *Perechislitel'naja kombinatorika*, Izd-vo Mir, Moskva, 440 p.
14. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.
15. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskiju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
16. Chandrasekharan K., 1975, *Arifmeticheskie funkcii, per. s angl*, Izd-vo Nauka, Moskva, 272 p.
17. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series", *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.
18. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.