

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 1

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-57-78

Вторая экстремальная задача Логана для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля¹

Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: dvgtmail@mail.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики института прикладной математики и компьютерных наук, Тульский государственный университет.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Офицеров Евгений Петрович — аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: eofitserov@gmail.com

Смирнов Олег Игоревич — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: so.2@mail.ru

Аннотация

Для косинус-преобразования Фурье на полупрямой Б. Логаном в 1983 году были поставлены и решены две экстремальные задачи. В первой задаче необходимо было найти минимальную окрестность нуля, вне которой нетривиальная интегрируемая четная целая функция экспоненциального типа не выше τ , имеющая неотрицательное преобразование Фурье, неположительна. Во второй задаче необходимо было найти минимальную окрестность нуля, вне которой нетривиальная интегрируемая четная целая функция экспоненциального типа не выше τ , имеющая неотрицательное преобразование Фурье и нулевое среднее значение, неотрицательна. Наибольшее развитие получила первая задача Логана, потому что она оказалась связанной с задачей об оптимальном аргументе в модуле непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве L^2 между величиной наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа и модулем непрерывности. Она была решена для преобразования Фурье на евклидовом пространстве и его обобщения преобразования Данкля, для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой и преобразования Фурье на гиперboloиде.

Вторая задача Логана была решена только для преобразования Фурье на евклидовом пространстве. В настоящей работе она решается для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой, в частности, для преобразования функций Ганкеля и Якоби. В качестве следствий этих результатов с помощью усреднения функций по евклидовой сфере получено решение второй задачи Логана для преобразования Данкля и преобразования Фурье на гиперboloиде. Общие оценки получены с помощью квадратурной формулы Гаусса по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой, недавно доказанной авторами работы. Во всех случаях построены экстремальные функции. Доказана их единственность.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00308.

Ключевые слова: Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой, преобразование Фурье на полупрямой, преобразование Данкля, преобразование Фурье на гиперboloиде, экстремальные задачи Логана, квадратурная формула Гаусса.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Е. П. Офицеров, О. И. Смирнов. Вторая экстремальная задача Логана для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 57–78.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 1

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-57-78

**The second Logan extremal problem
for the fourier transform
over the eigenfunctions
of the Sturm–Liouville operator**

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Professor of the department of applied mathematics and computer science, Doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University.

e-mail: dvgmail@mail.ru

Ivanov Valerii Ivanovich — Head of the department of applied mathematics and computer science, doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Ofitserov Evgenii Petrovich — graduate student of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University/

e-mail: eofitserov@gmail.com

Smirnov Oleg Igorevich — Assistant professor of the department of applied mathematics and computer science, candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University.

e-mail: so.2@mail.ru

Abstract

For the cosine Fourier transform on the half-line two extremal problems were posed and solved by B. Logan in 1983. In the first problem it was necessary to find a minimal neighborhood of zero outside of which a nontrivial integrable even entire function of exponential type at most τ , having a nonnegative Fourier transform, is nonpositive. In the second problem it was necessary to find a minimal neighborhood of zero outside of which a nontrivial integrable even entire function of exponential type at most τ , having a nonnegative Fourier transform and a zero mean value, is nonnegative. The first Logan problem got the greatest development, because it turned out to be connected with the problem of the optimal argument in the modulus of continuity in the sharp Jackson inequality in the space L^2 between the value of the best approximation of function by entire functions of exponential type and its modulus of continuity. It was solved for the Fourier transform on Euclidean space and for the Dunkl transform as its generalization, for the Fourier transform over eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on the half-line, and the Fourier transform on the hyperboloid.

The second Logan problem was solved only for the Fourier transform on Euclidean space. In the present paper, it is solved for the Fourier transform over eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on the half-line, in particular, for the Hankel and Jacobi transforms. As a consequence of these results, using the averaging method of functions over the Euclidean sphere, we obtain a solution of the second Logan problem for the Dunkl transform and the Fourier transform on the hyperboloid. General estimates are obtained using the Gauss quadrature formula over the zeros of the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on the half-line, which was recently proved by the authors of the paper. In all cases, extremal functions are constructed. Their uniqueness is proved.

Keywords: The Sturm-Liouville problem on semidirect, Fourier transform on semidirect, Dunkl transformation, Fourier transform on a hyperboloid, extremal Logan's problems, Gaussian quadrature formula.

Bibliography: 36 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, E. P. Ofitserov, O. I. Smirnov, 2018, "The second Logan extremal problem for the fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 57–78.

1. Введение

Работа посвящена решению второй экстремальной задачи Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи (оператора) Штурма–Лиувилля на полупрямой.

В 1983 году Б. Логаном [1, 2] были поставлены и решены две экстремальные задачи для косинус-преобразования Фурье на полупрямой. Сформулируем их для преобразования Фурье в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. В первой задаче Логана необходимо вычислить радиус наименьшего шара с центром в нуле, вне которого нетривиальная интегрируемая положительно определенная целая функция экспоненциального сферического типа неположительна. Во второй задаче Логана необходимо вычислить радиус наименьшего шара с центром в нуле, вне которого нетривиальная интегрируемая положительно определенная целая функция экспоненциального сферического типа с нулевым средним значением неотрицательна. Положительная определенность интегрируемой целой функции экспоненциального сферического типа эквивалентна неотрицательности ее преобразования Фурье.

Наибольшую известность и развитие получила первая задача Логана. В многомерном случае общая оценка снизу была получена Д.В. Горбачевым [3]. Экстремальная функция в одномерном случае ранее была построена Н.И. Черных [4], а в многомерном случае — В.А. Юдиным [5]. Используя конструкцию экстремальной функции В.А. Юдина, Е.Е. Бердышева [6] решила задачу Логана, когда шар заменяется на куб. Для преобразования Фурье–Данкля в пространстве $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля она решена в [7], а для преобразования Фурье на гиперboloиде — в [8, 9].

Экстремальные функции в первой задаче Логана на евклидовом пространстве и гиперboloиде являются сферическими функциями одной переменной и с помощью усреднения допустимых функций по евклидовой сфере задача Логана сводится к первой задаче Логана для преобразования Ганкеля и Якоби на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ (см. [3, 8, 9]). Общие оценки в задаче Логана получаются с помощью квадратурных формул Гаусса для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Бесселя и Якоби. Экстремальные функции выписываются с помощью анализа условий равенства в неравенствах, получаемых при применении квадратурных формул. Квадратурная формула Гаусса по нулям функции Бесселя была доказана в [10, 11]. Мы доказали квадратурную формулу Гаусса по нулям функции Якоби [12].

Многие хорошо известные преобразования на полупрямой определяются ядрами, являющимися собственными функциями оператора (задачи) Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(w(t) \frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(t) \right) + (\lambda^2 + \lambda_0^2) w(t) u_\lambda(t) &= 0, \\ u_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(0) &= 0, \quad \lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{1}$$

Для преобразования Ганкеля,

$$w(t) = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha \geq -1/2, \quad \lambda_0 = 0,$$

а для преобразования Якоби

$$w(t) = (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1} (\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \geq \beta \geq -1/2, \quad \alpha > -1/2, \quad \lambda_0 = \alpha + \beta + 1.$$

В [12] квадратурная формула Гаусса доказана для целых функций экспоненциального типа по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, что позволило решить первую задачу Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля [13].

Е.Е. Бердышева [6] доказала, что первая задача Логана эквивалентна задаче об оптимальном аргументе в модуле непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве

$L^2(\mathbb{R}^d)$ между величиной наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа и модулем непрерывности.

Доказательство неравенств Джексона в пространствах L^2 с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности является важным направлением исследований по экстремальным задачам теории приближений. Первые результаты в этом направлении были получены Н.И. Черных [4, 14] для одномерного тора $\mathbb{T}$.

Точная константа в неравенстве Джексона в L^2 , зависящая от приближающего подпространства и модуля непрерывности, имеет глобальный минимум. Если фиксировать приближающее подпространство, то минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором константа Джексона становится наименьшей, называется оптимальным аргументом.

В многомерном случае оптимальный аргумент зависит как от геометрии спектра V приближающих целых функций, так и геометрии окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}^d$ в определении модуля непрерывности. Д.В. Горбачев [3] нашел оптимальный аргумент, когда оба тела являются евклидовыми шарами. Е.Е. Бердышева [6] нашла оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$, когда тело V есть l_p^d -шар, $1 \leq p \leq 2$, а U — куб. А.В. Иванов и В.И. Иванов [15] перенесли ее результаты на случай параллелепипеда, который оказался сложнее и потребовал развития конструкции В.А. Юдина экстремальной функции в задаче Логана. Для приближений частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля оптимальные аргументы в неравенствах Джексона вычислены в работах [16, 17, 18, 19]. Для доказательства точных неравенств Джексона со старшим модулем непрерывности понадобилось обобщение задачи Логана (см. [20, 21, 22]).

Вторая задача Логана менее исследована. Она решена только для преобразования Фурье в $\mathbb{R}^d$. Общая оценка снизу получена Д.В. Горбачевым [23]. Экстремальная функция построена В.А. Юдиным [24].

В настоящей работе мы решаем вторую экстремальную задачу Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой, а также для преобразования Фурье–Данкля в пространстве $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля и преобразования Фурье на гиперboloиде.

2. Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой

Необходимые факты об общей задаче Штурма–Лиувилля на полупрямой можно найти в [12, 13, 18, 19, 23, 25, 26]. Для удобства читателя напомним их.

Пусть $w(t)$ — непрерывная весовая функция на полупрямой $\mathbb{R}_+$, которая положительна и непрерывно дифференцируема при $t > 0$, параметр $\lambda_0 \geq 0$.

Предположим, что задача (1) при $\lambda \geq 0$ имеет решение $\varphi(t, \lambda)$, которое будем называть собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля. Также в дальнейшем будем предполагать, что для задачи Штурма–Лиувилля выполнены следующие свойства.

1. Собственная функция $\varphi(t, \lambda)$ — действительная функция, четная аналитическая в окрестности $\mathbb{R}$ по t и четная целая функция экспоненциального типа $|t|$ при $t \neq 0$ по λ ,

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad |\varphi(t, \lambda)| \leq 1, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}.$$

2. Для $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(t, \lambda) = \varphi_0(t) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2(t)}\right), \quad (2)$$

где $\varphi_0(t) = \varphi(t, 0) > 0$, $0 < \lambda_1(t) < \dots < \lambda_k(t) < \dots$ — положительные нули $\varphi(t, \lambda)$ по λ . Нули $\lambda_k(t)$ непрерывны и монотонно убывают при $t > 0$. При этом $\lambda_k(t) = t_k^{-1}(t)$, где $t_k(\lambda)$ —

положительные нули функции $\varphi(t, \lambda)$ по $t > 0$. Нули $t_k(\lambda)$ также непрерывны и монотонно убывают при $\lambda > 0$.

3. Спектральная мера $\sigma(\lambda)$ задачи (1) непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+$, $\sigma(0) = 0$ и

$$\sigma'(\lambda) = s(\lambda) \asymp \lambda^{2\alpha+1}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad \alpha \geq -1/2.$$

Пусть $d\mu(t) = w(t) dt$, $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} < \infty,$$

$L^p(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|g\|_{p,d\sigma} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |g(\lambda)|^p d\sigma(\lambda) \right)^{1/p} < \infty,$$

$C_b(\mathbb{R}_+)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций. Нормы в $C_b(\mathbb{R}_+)$ и $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ обозначаем $\|\cdot\|_\infty$.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\varphi(t, \lambda) d\mu(t), \quad \mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda).$$

Для преобразований Фурье справедлива L^2 -теория, то есть они осуществляют метрический изоморфизм между пространствами $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ и $L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Равенства Планшереля имеют вид

$$\|\mathcal{F}f\|_{2,d\sigma} = \|f\|_{2,d\mu}, \quad \|\mathcal{F}^{-1}g\|_{2,d\mu} = \|g\|_{2,d\sigma}.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то $\mathcal{F}f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и применяя неравенство $|\varphi(t, \lambda)| \leq 1$, получим

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_{1,d\mu}. \quad (3)$$

Пусть для $p \geq 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — показатель Гельдера. Интерполируя неравенство (3) и равенство Планшереля, получим неравенство Хаусдорфа–Юнга

$$\|\mathcal{F}f\|_{p',d\sigma} \leq \|f\|_{p,d\mu}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Аналогично, если $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то $\mathcal{F}^{-1}g \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и

$$\|\mathcal{F}^{-1}g\|_{p'} \leq \|g\|_{p,d\sigma}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

ТЕОРЕМА 1 [13]. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то $\mathcal{F}f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и для всех $\lambda, t \in \mathbb{R}_+$ справедливы поточечные равенства

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\varphi(t, \lambda) d\mu(t), \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{F}f(\lambda)\varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda).$$

Аналогично, если $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{F}^{-1}g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то $\mathcal{F}^{-1}g \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и для всех $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{F}^{-1}g(t)\varphi(t, \lambda) d\mu(t).$$

4. Для $t > 0$ равномерно на каждом компакте из $(0, \infty)$ справедлива асимптотика

$$\lambda^{\alpha+1/2} \varphi(t, \lambda) = C_t (\cos(t\lambda - c_t) + e^{t|\operatorname{Im} \lambda|} O(|\lambda|^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad (4)$$

где $C_t > 0$, α из (3).

Свойства 1–4 являются достаточными для построения квадратурной формулы Гаусса на полуоси по нулям $\lambda_k(t)$ [12].

Пусть B_1^τ — класс четных целых функций экспоненциального типа не выше $\tau > 0$, чьи сужения на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$.

ТЕОРЕМА 2 [12]. Для произвольной функции $g \in B_1^\tau$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами:

$$\int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) g(\lambda_k(\tau/2)). \quad (5)$$

Ряд в (5) сходится абсолютно.

Для построения экстремальной функции нам понадобятся еще одно предположение о задаче Штурма–Лиувилля (1).

5. Для оператора обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{F}f(\lambda) \varphi(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad t, x \in \mathbb{R}_+,$$

действующего в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, справедливо интегральное представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z) d\tau_{x,t}(z), \quad (6)$$

где для всех $x, t \in \mathbb{R}_+$ $\tau_{x,t}$ — вероятностная борелевская мера, для которой $\tau_{x,t} = \tau_{t,x}$ и носитель $\operatorname{supp} \tau_{x,t} \subset [|x-t|, x+t]$.

Свойства 1–5 выполняются для широкого класса весов w , частности, для степенного и гиперболического весов (см. [12, 25, 26, 27, 28]).

Оператор обобщенного сдвига является положительным самосопряженным оператором и $T^t f(x) \in C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+)$, если $f \in C(\mathbb{R}_+)$ [29].

Представление (6) позволяет распространить оператор обобщенного сдвига T^t на пространства $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$, и пространство $C(\mathbb{R}_+)$ с нормой 1 для всех $t \in \mathbb{R}_+$ (см. [19]).

Отметим еще следующие свойства оператора обобщенного сдвига:

$$\mathcal{F}(T^t f)(\lambda) = \varphi(t, \lambda) \mathcal{F}f(\lambda), \quad (7)$$

$$\text{если } \operatorname{supp} f \subset [0, \delta], \text{ то } \operatorname{supp} T^t f(x) \subset [0, \delta + t]. \quad (8)$$

Нам понадобятся также следующие утверждения.

ЛЕММА 1 [16]. Пусть $\alpha > -1/2$. Существует четная целая функция $\omega_\alpha(z)$ экспоненциального типа 2, для которой

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(x) &> 0, \quad x > 0, \\ \omega_\alpha(x) &\asymp x^{2\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad |\omega_\alpha(iy)| \asymp y^{2\alpha+1} e^{2y}, \quad y \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2 [30, прил. VII, лемма Ахизера]. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, F — четная целая функция экспоненциального типа $\tau > 0$, ограниченная на $\mathbb{R}$, Ω — четная целая функция конечного экспоненциального типа, все корни которой входят в множество корней F , и

$$\liminf_{y \rightarrow +\infty} e^{-\tau y} y^{2m} |\Omega(iy)| > 0.$$

Тогда функция $\psi(z) = F(z)/\Omega(z)$ есть четный многочлен степени не больше $2m$.

3. Вторая задача Логана для преобразования Фурье на полупрямой

Пусть $\tau > 0$, $g(\lambda)$ — действительная непрерывная на полупрямой функция,

$$\Lambda_+(g) = \sup\{\lambda > 0: g(\lambda) < 0\}.$$

Вторая задача Логана. Вычислить величину

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \inf \Lambda_+(g),$$

если

$$\begin{aligned} g &\in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \not\equiv 0, \\ \mathcal{F}^{-1}g(t) &\geq 0, \quad \mathcal{F}^{-1}g(0) = 0, \quad \text{supp } \mathcal{F}^{-1}g \subset [0, \tau]. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим два семейства функций

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \frac{\varphi(\varepsilon, \lambda)}{\varphi_0(\varepsilon)}, \quad \rho_\varepsilon(\lambda) = -\frac{2(1 - \psi_\varepsilon(\lambda))}{\psi_\varepsilon''(0)}, \quad \varepsilon > 0. \quad (10)$$

ЛЕММА 3. Для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ справедливо разложение

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_\varepsilon^{(2k)}(0)}{(2k)!} \lambda^{2k}.$$

Дифференцируя (2) и подставляя $\lambda = 0$, получим

$$\begin{aligned} &(-1)^k \psi_\varepsilon^{(2k)}(0) \\ &= 2^k \sum_{i_1=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_1}^2(\varepsilon)} \left(\sum_{i_2=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_2}^2(\varepsilon)} - \frac{1}{\lambda_{i_1}^2(\varepsilon)} \right) \cdots \left(\sum_{i_k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_k}^2(\varepsilon)} - \frac{1}{\lambda_{i_1}^2(\varepsilon)} - \cdots - \frac{1}{\lambda_{i_{k-1}}^2(\varepsilon)} \right). \end{aligned}$$

Если $k = 1$, то

$$-\psi_\varepsilon''(0) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2(\varepsilon)},$$

а если $k > 1$, то $|\psi_\varepsilon^{(2k)}(0)| \leq |\psi_\varepsilon''(0)|^k$, поэтому

$$|\rho_\varepsilon(\lambda) - \lambda^2| = \left| \frac{2(1 - \psi_\varepsilon(\lambda))}{\psi_\varepsilon''(0)} + \lambda^2 \right| \leq 2|\psi_\varepsilon''(0)| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\psi_\varepsilon''(0)|^{k-2} \lambda^{2k}}{(2k)!}.$$

Остается показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\psi_\varepsilon''(0)| = 0. \quad (11)$$

Так как нули $\lambda_k(\varepsilon)$ монотонно убывают по ε , $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k(\varepsilon) = \infty$, а из асимптотики (4) $\lambda_k(1) \sim \pi k$ при $k \rightarrow \infty$, то (11) вытекает из оценки:

$$|\psi_\varepsilon''(0)| \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^2(\varepsilon)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2(1)} \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^2(\varepsilon)} + \frac{c}{N}, \quad c > 0. \quad \square$$

ЛЕММА 4. Пусть функция g удовлетворяет условиям (9) и $\Lambda_+(g) < \infty$. Тогда

$$\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$$

и

$$\int_0^\infty \lambda^2 g(\lambda) d\sigma(\lambda) \leq 0. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать функции $\psi_\varepsilon(\lambda)$ и $\rho_\varepsilon(\lambda)$ (10). Согласно (2), (9), $\psi_\varepsilon''(0) < 0$, $\rho_\varepsilon(\lambda) \geq 0$, поэтому

$$\int_0^\infty \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \frac{2}{\psi_\varepsilon''(0)\varphi_0(\varepsilon)} \int_0^\infty g(\lambda) \varphi(\varepsilon, \lambda) d\sigma(\lambda) = \frac{2\mathcal{F}^{-1}g(\varepsilon)}{\psi_\varepsilon''(0)\varphi_0(\varepsilon)} \leq 0. \quad (13)$$

Так как $g(\lambda) \geq 0$ при $\lambda \geq \Lambda_+(g)$, то применяя (13), лемму 3 и лемму Фату, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_+(g)}^\infty \lambda^2 g(\lambda) d\sigma(\lambda) &= \int_{\Lambda_+(g)}^\infty \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda) d\sigma(\lambda) \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda_+(g)}^\infty \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda) d\sigma(\lambda) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_0^{\Lambda_+(g)} \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda) d\sigma(\lambda) \right\} \\ &= - \int_0^{\Lambda_+(g)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda) d\sigma(\lambda) = - \int_0^{\Lambda_+(g)} \lambda^2 g(\lambda) d\sigma(\lambda) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ и выполнено (12). $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\tau > 0$, $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\tau/2)$ и для задачи Штурма–Лиувилля (1) выполнены условия 1–5. Тогда во второй задаче Логана

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \lambda_2,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{\varphi^2(\tau/2, \lambda)}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2)}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **Оценка снизу.** По теореме 1 $\mathcal{F}^{-1}g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$,

$$\mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda) \geq 0, \quad \mathcal{F}^{-1}g(0) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda) d\sigma(\lambda) = 0,$$

$$g(\lambda) = \int_0^\tau \mathcal{F}^{-1}g(t) \varphi(t, \lambda) d\mu(t).$$

Так как $\varphi(t, \lambda)$ — четная целая функция λ экспоненциального типа t , то $g \in B_1^\tau$, а по лемме 4 и $\lambda^2 g \in B_1^\tau$. Пусть α из условия 3, а функция $\omega_\alpha(\lambda)$ из леммы 1.

Сначала предположим, что для допустимой функции g , $\Lambda_+(g) \leq \lambda_1$ или $\Lambda_+(g) \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $g(\lambda_1) \geq 0$. Тогда $g \in B_1^\tau$, $g(\lambda) \geq 0$ при $\lambda \geq \Lambda_+(g)$, $g(\lambda_1) \geq 0$ и применяя квадратурную формулу Гаусса (5), получим

$$0 = \int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) g(\lambda_k(\tau/2)) \geq 0, \quad (15)$$

поэтому в точках $\lambda_k(\tau/2)$ ($k \geq 2$) функция $g(\lambda)$ имеет двойные нули, а в точке λ_1 , по крайней мере, простой нуль. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda) \frac{\varphi^2(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}.$$

Из асимптотики (4), леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp y^{-2} e^{(r+2)y}, \quad y \rightarrow +\infty.$$

Применяя лемму 2, получим

$$g(\lambda) = (c_1 + c_2 \lambda^2) \frac{\varphi^2(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2},$$

что противоречит условию $\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$.

Пусть теперь $\Lambda_+(g) \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $g(\lambda_1) < 0$. Применяя формулу Гаусса (5) к функции $(\Lambda_+^2(g) - \lambda^2)g(\lambda) \in B_1^+$, по лемме 4 получим противоречие:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty (\Lambda_+^2(g) - \lambda^2)g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)(\Lambda_+^2(g) - \lambda_k^2(\tau/2))g(\lambda_k(\tau/2)) \\ &\leq \gamma_1(\Lambda_+^2(g) - \lambda_1^2)g(\lambda_1) < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Итак, $\Lambda_+(g) \geq \lambda_2$ и $L(\tau, \mathbb{R}_+) \geq \lambda_2$. Оценка снизу доказана.

ПОСТРОЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ. Пусть $\chi_a(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0, a]$, $t' \in (0, \tau/2)$ — первый нуль функции $\varphi(t, \lambda_2)$,

$$c_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1), \quad c_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_2).$$

Так как нули собственной функции $\varphi(t, \lambda)$ по λ и t простые, то $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Рассмотрим непрерывную функцию

$$v(t) = (c_2 \varphi(t, \lambda_1) + c_1 \varphi(t, \lambda_2)) \chi_{\tau/2}(t) = v_1(t) - v_2(t). \quad (17)$$

Покажем, что она неотрицательная. Для отрезка $[0, t']$ это очевидно, так как оба слагаемые неотрицательные. Необходимо доказать, что на интервале $(t', \tau/2)$, $v_1(t) \geq v_2(t)$.

Отметим следующие свойства функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$:

$$v_1(t) > 0, \quad v_2(t) > 0 \quad (t \in (t', \tau/2)), \quad v_1(\tau/2) = v_2(\tau/2) = 0,$$

$$v_1'(\tau/2) = v_2'(\tau/2), \quad \lim_{t \rightarrow \tau/2} \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \lim_{t \rightarrow \tau/2} \frac{v_1'(t)}{v_2'(t)} = \frac{v_1'(\tau/2)}{v_2'(\tau/2)} = 1.$$

Они также удовлетворяют дифференциальному уравнению (1) при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$:

$$(w(t)v_1'(t))' + (\lambda_1^2 + \lambda_0^2)w(t)v_1(t) = 0, \quad (w(t)v_2'(t))' + (\lambda_2^2 + \lambda_0^2)w(t)v_2(t) = 0. \quad (18)$$

Для неравенства $\frac{v_1(t)}{v_2(t)} \geq 1$ достаточно доказать, что

$$\left(\frac{v_1(t)}{v_2(t)} \right)' \leq 0, \quad t \in (t', \tau/2). \quad (19)$$

Имеем

$$\left(\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right)' = \frac{v_2(t)v_1'(t) - v_1(t)v_2'(t)}{v_2^2(t)} = \frac{v_2(t)w(t)v_1'(t) - v_1(t)w(t)v_2'(t)}{w(t)v_2^2(t)} = \frac{\psi(t)}{w(t)v_2^2(t)},$$

поэтому применяя (18), получим

$$\psi'(t) = v_2(t)(w(t)v_1'(t))' - v_1(t)(w(t)v_2'(t))' = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)w(t)v_1(t)v_2(t) > 0.$$

Так как $\psi(\tau/2) = 0$, то $\psi(t) < 0$, $t \in (t', \tau/2)$ и неравенство (19) выполнено.

Неотрицательность функции $v(t)$ доказана. Вычислим ее преобразование Фурье. Согласно (1), (18)

$$\begin{aligned} \left\{w(t)\left(\varphi(t, \lambda)v_1'(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \lambda)v_1(t)\right)\right\}'_t &= (\lambda^2 - \lambda_1^2)w(t)\varphi(t, \lambda)v_1(t), \\ \left\{w(t)\left(\varphi(t, \lambda)v_2'(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \lambda)v_2(t)\right)\right\}'_t &= (\lambda^2 - \lambda_2^2)w(t)\varphi(t, \lambda)v_2(t), \end{aligned}$$

поэтому из (17)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}v(\lambda) &= \int_0^{\tau/2} w(t)\varphi(t, \lambda)v_1(t) dt - \int_0^{\tau/2} w(t)\varphi(t, \lambda)v_2(t) dt \\ &= -w(\tau/2)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_2)\varphi(\tau/2, \lambda)\left(\frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda^2}\right). \\ &= -w(\tau/2)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\frac{\varphi(\tau/2, \lambda)}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2)}. \end{aligned}$$

Применяя свойство (7), получим, что для функции $g_\tau(\lambda)$ (14) справедливо представление

$$g_\tau(\lambda) = -\frac{1}{w(\tau/2)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\mathcal{F}(T^{\tau/2}v)(\lambda).$$

Так как оператор обобщенного сдвига положительный, $v(t) \geq 0$,

$$-w(\tau/2)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) > 0,$$

то согласно теореме 1, асимптотике (4), свойству (8) для функции $g_\tau(\lambda)$ выполнены условия (9) и $\Lambda_+(g_\tau) = \lambda_2$. Следовательно, функция $g_\tau(\lambda)$ экстремальная.

Единственность экстремальной функции. Пусть $g_0(\lambda)$ — экстремальная функция. Функция $g_0(\lambda) \geq 0$ для $\lambda \geq \lambda_2$ и $g_0(\lambda_2) = 0$, в противном случае $\Lambda_+(g_0) < \lambda_2$. Согласно (16) $g_0(\lambda_1) \geq 0$, а из (15) вытекает, что $g_0(\lambda_1) = 0$. Следовательно, в точках $\lambda_k(\tau/2)$, $k \geq 3$, она имеет двойные нули, а в точках λ_1, λ_2 , по крайней мере, нули первого порядка. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g_0(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g_\tau(\lambda),$$

где $g_\tau(\lambda)$ определена в (14). Из асимптотики (4), леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp y^{-4}e^{(\tau+2)y}, \quad y \rightarrow +\infty.$$

Применяя лемму 2, получим $g_0(\lambda) = \psi(\lambda)g_\tau(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — четный многочлен степени не выше 4. Он не может иметь степень 2 или 4, иначе по асимптотике (4) $\lambda^2 g_0 \notin L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Следовательно, $g_0(\lambda) = c g_\tau(\lambda)$, $c > 0$. $\square$

В частности, теорема 4 справедлива на полупрямой для преобразования Ганкеля со степенным весом и преобразования Якоби с гиперболическим весом.

4. Вторая задача Логана для преобразования Данкля

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d -мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$,

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(a, x)|^{2k(a)}$$

— обобщенный степенной вес или вес Данкля, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k(a): R \rightarrow \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, порожденной R ,

$$c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x) dx$$

— интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x) dx$, $L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\mu_k(x),$$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$, $\sigma_a \in O(d)$ — отражение относительно гиперплоскости $(a, x) = 0$,

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a \in R_+} k(a)(a, e_j) \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{(a, x)}, \quad j = 1, \dots, d,$$

— дифференциально-разностные операторы Данкля, $e_k(x, y) = E_k(x, iy)$ — обобщенная экспонента (ядро Данкля), являющаяся решением системы уравнений

$$D_j f(x) = iy_j f(x), \quad j = 1, \dots, d, \quad f(0) = 1.$$

Для обобщенной экспоненты $e_k(x, y)$ справедливы свойства, аналогичные свойствам экспоненты $e^{i(x, y)}$, многие из которых вытекают из интегрального представления [31]

$$e_k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi, y)} d\mu_k^x(\xi),$$

где μ_k^x — вероятностная борелевская мера, носитель которой лежит в выпуклой оболочке со $\{gx: g \in G(R)\}$ орбиты x относительно группы $G(R)$. В частности, $|e^{i(x, y)}| \leq 1$, $e_k(x, y) = e_k(-x, y) = e_k(x, -y)$, $e_k(x, y) = e_k(y, x)$.

Гармонический анализ в пространствах с весом Данкля осуществляется с помощью преобразования Данкля

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{e_k(x, y)} d\mu_k(x).$$

Основные факты из теории Данкля можно найти в [32]. В частности, обратное преобразование Данкля равно $\mathcal{F}_k^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_k(f)(-x)$. В безвесовом случае ($k(a) \equiv 0$) получаем классическое преобразование Фурье.

Пусть $\tau > 0$, $B_\tau = \{y \in \mathbb{R}^d: |y| \leq \tau\}$ — евклидов шар радиуса τ , $g(y)$ — действительная непрерывная на $\mathbb{R}^d$ функция,

$$\Lambda_+(g, \mathbb{R}^d) = \sup\{|y| > 0: g(y) < 0\}.$$

Вторая задача Логана для преобразования Данкля. Вычислить величину

$$L(\tau, (\mathbb{R}^d, d\mu_k)) = \inf \Lambda_+(g, \mathbb{R}^d),$$

если

$$\begin{aligned} g &\in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_k) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad g(y) \not\equiv 0, \\ \mathcal{F}_k^{-1}g(x) &\geq 0, \quad \mathcal{F}_k^{-1}g(0) = 0, \quad \text{supp } \mathcal{F}_k^{-1}g \subset B_\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

По теореме Пэли–Винера [33] допустимые функции в задаче Логана являются целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше τ .

Покажем, что в задаче Логана можно ограничиться радиальными функциями.

Пусть $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя порядка $\alpha \geq -1/2$,

$$j_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \frac{J_\alpha(t)}{t^\alpha}$$

— нормированная функция Бесселя, $0 < q_{\alpha,1} < q_{\alpha,2} < \dots$ — положительные нули $J_\alpha(t)$, $b_\alpha^{-1} = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $d\nu_\alpha(t) = b_\alpha t^{2\alpha+1} dt$, $L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)$ — пространство измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,\lambda} = \int_0^\infty |f(t)| d\nu_\alpha(t),$$

$$\mathcal{H}_\alpha f(\lambda) = \int_0^\infty f(t) j_\alpha(\lambda t) d\nu_\alpha(t)$$

— преобразование Ганкеля (см. [23, гл. 1]). Отметим, что $\mathcal{H}_\alpha^{-1} = \mathcal{H}_\alpha$.

Вторая задача Логана для преобразования Ганкеля. Вычислить величину

$$L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)) = \inf \Lambda_+(g),$$

если

$$\begin{aligned} g &\in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \not\equiv 0, \\ \mathcal{H}_\alpha^{-1}g(t) &\geq 0, \quad \mathcal{H}_\alpha^{-1}g(0) = 0, \quad \text{supp } \mathcal{H}_\alpha^{-1}g \subset [0, \tau]. \end{aligned} \quad (21)$$

По теореме Пэли–Винера [33] допустимые функции в задаче Логана являются четными целыми функциями экспоненциального типа не выше τ .

Из теоремы 4 вытекает утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\tau > 0$, $\alpha \geq -1/2$, $q_{\alpha,1} = q_1$, $q_{\alpha,2} = q_2$. Тогда во второй задаче Логана

$$L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)) = \frac{2q_2}{\tau},$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_{\tau,0}(\lambda) = \frac{j_\alpha^2(\tau\lambda/2)}{(q_1^2 - \lambda^2)(q_2^2 - \lambda^2)}.$$

Пусть $\alpha_k = d/2 - 1 + \sum_{a \in R_+} k(a)$, $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^d$, $x' \in S^{d-1}$,

$$a_k^{-1} = \int_{S^{d-1}} v_k(x') dx', \quad d\omega_k(x') = a_k v_k(x') dx',$$

где dx' — лебегова мера на сфере.

Применяя сферические координаты, получим

$$c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x) dx = \int_0^\infty e^{-r^2/2} r^{d-1+2|k|} dr \int_{S^{d-1}} v_k(x') dx' = b_{\lambda_k}^{-1} a_k^{-1}. \quad (22)$$

Известно [34], что

$$\int_{S^{d-1}} e_k(x, ry') d\omega_k(y') = j_{\lambda_k}(r|x|), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (23)$$

Если $g_0(\lambda)$ удовлетворяет условиям (21), радиальная функция $g(y) = g_0(|y|)$, $|y| = \lambda$, $|x| = t$, то согласно (22), (23) имеем

$$\mathcal{F}_k^{-1}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e_k(x, y) d\mu_k(y) = \int_0^\infty g_0(\lambda) j_{\lambda_k}(\lambda t) d\nu_{\alpha_k}(\lambda) = \mathcal{H}_{\alpha_k} g_0(t),$$

и $g(y)$ удовлетворяет условиям (20), поэтому $L(\tau, (\mathbb{R}^d, d\mu_k)) \leq L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\nu_{\alpha_k}))$. Обратно, если функция $g(y)$ удовлетворяет условиям (20), то функция

$$g_0(\lambda) = \int_{S^{d-1}} g(\lambda y') d\omega_k(y')$$

удовлетворяет условиям (21) и $L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\nu_{\alpha_k})) \geq L(\tau, (\mathbb{R}^d, d\mu_k))$. Следовательно, $L(\tau, (\mathbb{R}^d, d\mu_k)) = L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\nu_{\alpha_k}))$. Отсюда и из теоремы 5 вытекает теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\tau > 0$, $\alpha_k = d/2 - 1 + \sum_{a \in R_+} k(a)$, $q_{\alpha_k,1} = q_1$, $q_{\alpha_k,2} = q_2$. Тогда во второй задаче Логана

$$L(\tau, (\mathbb{R}_+, (\mathbb{R}^d, d\mu_k))) = \frac{2q_2}{\tau},$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(y) = g_{\tau,0}(|y|) = \frac{j_{\alpha_k}^2(\tau|y|/2)}{(q_1^2 - |y|^2)(q_2^2 - |y|^2)}.$$

5. Вторая задача Логана на гиперboloиде

Пусть $\mathbb{R}^{d,1}$ — $(d+1)$ -мерное действительное псевдоевклидово пространство с билинейной формой $[x, y] = -x_1 y_1 - \dots - x_d y_d + x_{d+1} y_{d+1}$,

$$\mathbb{H}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d,1} : [x, x] = 1, x_{d+1} > 0\}$$

— верхняя пола двуполостного гиперboloида,

$$d(x, y) = \text{arch}[x, y] = \ln([x, y] + \sqrt{[x, y]^2 - 1})$$

— расстояние между $x, y \in \mathbb{H}^d$. Пара $(\mathbb{H}^d, d(\cdot, \cdot))$ известна как пространство Лобачевского.

Пусть $x_0 = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{H}^d$, $d(x, x_0) = d(x)$, $r > 0$, $B_\tau = \{x \in \mathbb{H}^d : d(x) \leq \tau\}$ — шар радиуса τ с центром в точке x_0 в пространстве Лобачевского.

Пусть $t > 0$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, $x = (\text{sh } t \eta, \text{ch } t) \in \mathbb{H}^d$,

$$d\mu(t) = d\mu^{((d-2)/2, -1/2)}(t) = 2^{d-1} \text{sh}^{d-1} t dt = w(t) dt,$$

$$d\omega(\eta) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} d\eta, \quad d\nu(x) = d\mu(t) d\omega(\eta)$$

— лебеговы меры на $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{S}^{d-1}$ и $\mathbb{H}^d$, соответственно. Отметим, что $d\omega$ — вероятностная мера на сфере, инвариантная относительно группы вращений $SO(d)$, а мера $d\nu$ — инвариантна относительно группы гиперболических вращений $SO_0(d, 1)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, $y = (\lambda, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1} = \Omega^d$,

$$d\sigma(\lambda) = d\sigma^{((d-2)/2, -1/2)}(\lambda) = 2^{3-2d} \Gamma^{-2}\left(\frac{d}{2}\right) \left| \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2} + i\lambda)}{\Gamma(i\lambda)} \right|^2 d\lambda,$$

$$d\chi(y) = d\sigma(\lambda) d\omega(\xi)$$

— лебеговы меры на $\mathbb{R}_+$ и Ω^d .

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{H}^d} f(x) [x, \xi']^{-\frac{d-1}{2} - i\lambda} d\nu(x), \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) = \int_{\Omega^d} g(y) [x, \xi']^{-\frac{d-1}{2} + i\lambda} d\chi(y),$$

где $\xi' = (\xi, 1)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Для преобразований Фурье справедлива L^2 -теория, в частности, равенства Планшереля. Но так как их ядра являются неограниченными, для них не выполняется L^1 -теория. Основные факты гармонического анализа на гиперboloиде можно найти в [8, 9, 35].

Пусть $g(y)$ — действительная непрерывная на Ω^d функция, $y = (\lambda, \xi)$,

$$\Lambda_+(g, \mathbb{H}^d) = \sup\{\lambda > 0: g(y) = g(\lambda, \xi) < 0, \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

Вторая задача Логана для преобразования Фурье на гиперboloиде. Вычислить величину

$$L(\tau, \mathbb{H}^d) = \inf \Lambda_+(g, \mathbb{H}^d),$$

если

$$g \in L^1(\Omega^d, d\chi) \cap C_b(\Omega^d), \quad g(y) \not\equiv 0,$$

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) \geq 0, \quad \int_{\Omega^d} g(y) d\chi(y) = 0, \quad \text{supp } \mathcal{F}^{-1}g \subset B_\tau. \quad (24)$$

Покажем, что в задаче Логана можно ограничиться сферическими функциями, зависящими только от λ .

Пусть $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$, $\rho = \lambda_0 = \alpha + \beta + 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $w^{(\alpha, \beta)}(t) = (\text{sh } t)^{2\alpha+1} (\text{ch } t)^{2\beta+1}$ — гиперболический вес, $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$\varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t) = F\left(\frac{\rho + i\lambda}{2}, \frac{\rho - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -(\text{sh } t)^2\right)$$

— функция Якоби (см. [27, 28]).

Функция Якоби является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля (1) для гиперболического веса. По t она четная аналитическая на $\mathbb{R}$, а по λ — четная целая функция экспоненциального типа $|t| > 0$ и для нее выполнены свойства **1–5**.

Пусть $0 < \lambda_1(t) < \dots < \lambda_k(t) < \dots$ — положительные нули $\varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t)$ по λ , $d\mu^{(\alpha, \beta)}(t) = w^{(\alpha, \beta)}(t) dt$, $L_1(\mathbb{R}, d\mu^{(\alpha, \beta)})$ — пространство измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_{1, \mu^{(\alpha, \beta)}} = \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)| d\mu^{(\alpha, \beta)}(t),$$

$L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma^{(\alpha, \beta)})$ — пространство измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|g\|_{1, \sigma^{(\alpha, \beta)}} = \int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| d\sigma^{(\alpha, \beta)}(\lambda),$$

где

$$\begin{aligned} d\sigma^{(\alpha,\beta)}(\lambda) &= s(\lambda)d\lambda, \quad s(\lambda) = (2\pi)^{-1}|c(\lambda)|^{-2}, \\ c(\lambda) &= \frac{2^{\rho-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2)\Gamma((\rho+i\lambda)/2-\beta)}, \\ \mathcal{J}f(\lambda) &= \int_0^\infty f(t)\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) d\mu(t), \quad \mathcal{J}^{-1}g(t) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) d\sigma(\lambda) \end{aligned}$$

— прямое и обратное преобразования Якоби.

Вторая задача Логана для преобразования Якоби. Вычислить величину

$$L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\sigma^{(\alpha,\beta)})) = \inf \Lambda_+(g),$$

если

$$\begin{aligned} g &\in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma^{(\alpha,\beta)}) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \not\equiv 0, \\ \mathcal{J}^{-1}g(t) &\geq 0, \quad \mathcal{J}^{-1}g(0) = 0, \quad \text{supp } \mathcal{J}^{-1}g \subset [0, \tau]. \end{aligned} \tag{25}$$

По теореме Пэли–Винера [36] допустимые функции в задаче Логана являются четными целыми функциями экспоненциального типа не выше τ .

Из теоремы 4 вытекает утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\tau > 0$, $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\lambda_1(\tau/2) = \lambda_1$, $\lambda_2(\tau/2) = \lambda_2$. Тогда во второй задаче Логана

$$L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\sigma^{(\alpha,\beta)})) = \lambda_2,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_{\tau,0}(\lambda) = \frac{(\varphi^{(\alpha,\beta)}(\tau/2, \lambda))^2}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2)}.$$

Пусть $\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{((d-2)/2, -1/2)}(t)$ — функция Якоби с параметрами $\alpha = (d-2)/2$, $\beta = -1/2$. Она получается усреднением по сфере ядер преобразований Фурье

$$\varphi_\lambda(t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [x, \xi']^{-\frac{d-1}{2} \pm i\lambda} d\omega(\xi),$$

где $x = (\text{sh } t \eta, \text{ch } t)$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\xi' = (\xi, 1)$.

Оператор усреднения по сфере

$$Qg(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(y) d\omega(\xi), \quad y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d$$

дает нам сферические функции на Ω^d . Если $g(y) = g_0(\lambda)$ — сферическая функция, то $\mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{J}^{-1}g_0(t)$.

Если $g_0(\lambda)$ удовлетворяет условиям (25), сферическая функция $g(y) = g_0(\lambda)$, $y = (\lambda, \xi)$, $x = (\text{sh } t \eta, \text{ch } t)$, то $\mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{J}^{-1}g_0(t)$ и $g(y)$ удовлетворяет условиям (24), поэтому $L(\tau, \mathbb{H}^d) \leq L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\mu^{((d-2)/2, -1/2)}))$. Обратно, если функция $g(y)$ удовлетворяет условиям (24), то функция

$$g_0(\lambda) = Qg(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(y) d\omega(\xi)$$

удовлетворяет условиям (25) и $L(\tau, \mathbb{H}^d) \geq L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\mu^{((d-2)/2, -1/2)}))$. Следовательно, $L(\tau, \mathbb{H}^d) = L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\mu^{((d-2)/2, -1/2)}))$. Отсюда и из теоремы 7 вытекает теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\tau > 0$, $\alpha = (d-2)/2$, $\beta = -1/2$, $\lambda_1(\tau/2) = \lambda_1$, $\lambda_2(\tau/2) = \lambda_2$. Тогда во второй задаче Логана

$$L(\tau, \mathbb{H}^d) = \lambda_2,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(y) = g_{\tau,0}(\lambda) = \frac{(\varphi^{((d-2)/2, -1/2)}(\tau/2, \lambda))^2}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2)}, \quad y = (\lambda, \xi).$$

6. Заключение

В работе решена вторая задача Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой с достаточно общими весами, для преобразования Данкля на евклидовом пространстве с весом Данкля и преобразования Фурье на гиперboloиде.

Интересно было бы результаты работы распространить на случай многомерного преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля с весом $w(x) = \prod_{j=1}^d w_j(x_j)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Отметим, что для этого веса пока не решена и первая задача Логана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Logan B.F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 249–252.
2. Logan B.F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 253–257.
3. Горбачев Д.В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Математические заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 179–187.
4. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
5. Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Математические заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 158–162.
6. Бердышева Е.Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 336–350.
7. Иванов А.В. Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах // Известия Тул. гос. ун-та. Сер.: Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 26–44.
8. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid // Math. Notes. 2017. Vol. 102, № 4. P. 480–491.
9. Некоторые экстремальные задачи гармонического анализа и теории приближений / Д.В. Горбачев [и др.]. // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 139–166.
10. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60. P. 303–316.
11. Grozev G.R., Rahman Q.I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64. P. 715–725.

12. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Математический сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.
13. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Некоторые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 2. С. 34–53.
14. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces: Proc. intern. conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
15. Иванов А. В., Иванов В. И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Математические заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 338–348.
16. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 6. P. 338–348.
17. Вепринцев Р. А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 815–831.
18. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Математические заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 519–530.
19. Горбачев Д. В., Иванов В. И., Вепринцев Р. А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 136–152.
20. Горбачев Д. В., Странковский С. А. Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 5. С. 712–717.
21. Иванов В. И., Иванов А. В. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона–Стечкина в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 5. С. 674–686.
22. Ivanov V., Ivanov A. Generalized Logan's Problem for Entire Functions of Exponential Type and Optimal Argument in Jackson's Inequality in $L_2(\mathbb{R}^3)$ // Acta. Math. Sin., English Ser. First Online: 28 April 2018.
23. Горбачев Д. В. Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Гриф и К, 2005. 192 с.
24. Юдин В. А. Расположение точек на торе и экстремальные свойства полиномов // Труды МИАН. 1997. Т. 219. С. 453–463.
25. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 671 с.
26. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
27. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. Vol. 11. P. 245–262.

28. Flensted-Jensen M., Koornwinder T.H. Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure // *Ark. Mat.* 1979. Vol. 17. P. 139–151.
29. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973. 312 с.
30. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
31. Rösler M. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2003. Vol. 355, № 6. P. 2413–2438.
32. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications // *Lecture Notes in Math.* Berlin: Springer, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.
33. de Jeu M. Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2006. Vol. 358, № 10. P. 4225–4250.
34. Xu Y. Dunkl operators: Funk-Hecke formula for orthogonal polynomials on spheres and on balls // *Bull. London Math. Soc.* 2000. Vol. 32. P. 447–457.
35. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991. 576 с.
36. Koornwinder T.H. A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform // *Ark. Mat.* 1979. Vol. 13. P. 145–159.

REFERENCES

1. Logan, B. F. 1983, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 249–252.
2. Logan, B. F. 1983, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 253–257.
3. Gorbachev, D. V. 2000, “Extremum problems for entire functions of exponential spherical type”, *Math. Notes*, vol. 68, no. 2, pp. 159–166.
4. Chernykh, N. I. 1967, “On Jackson’s inequality in L_2 ”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 88, pp. 75–78.
5. Yudin, V. A. 1976 “The multidimensional Jackson theorem”, *Math. Notes*, vol. 20, no. 3, pp. 801–804.
6. Berdysheva, E. E. 1999, “Two related extremal problems for entire functions of several variables”, *Math. Notes*, vol. 66, no. 3, pp. 271–282.
7. Ivanov, A. V. 2010, “Some extremal problem for entire functions in weighted spaces”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 26–44. [in Russian]
8. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. 2017, “Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid”, *Math. Notes*, vol. 102, no. 4, pp. 480–491.
9. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., Ofitserov E. П., Smirnov O. I. 2017, “Some extremal problems of harmonic analysis and approximation theory”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 139–166. [in Russian]

10. Frappier, C., Olivier, P. 1993, "A quadrature formula involving zeros of Bessel functions", *Math. Comp.*, vol. 60, pp. 303–316.
11. Grozev, G. R., Rahman, Q. I. 1995, "A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes", *Math. Comp.*, vol. 64, pp. 715–725.
12. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. 2015, "Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type", *Sbornik: Math.*, vol. 206, no. 8, pp. 1087–1122.
13. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. 2017, "Some extremal problems for the Fourier transform over eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 139–166. [in Russian]
14. Arestov, V. V., Chernykh, N. I. 1981, "On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials", *Approximation and functions spaces: Proc. intern. conf., Gdansk, 1979*. Amsterdam: North-Holland, pp. 25–43.
15. Ivanov, A. V., Ivanov, V. I. 2013, "Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$ ", *Math. Notes*, vol. 94, no. 3, pp. 320–329.
16. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., Veprintsev R. A. 2014, "Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight", *Math. Notes*, vol. 96, no. 6, pp. 338–348.
17. Veprintsev, R. A. 2015, "Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Jacobi transform", *Math. Notes*, vol. 97, no. 6, pp. 815–831.
18. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. 2016, "Approximation in L_2 by partial integrals of the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Math. Notes*, vol. 100, no. 4, pp. 540–549.
19. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., Veprintsev, R. A. 2016, "Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, no. 4, pp. 136–152. [in Russian]
20. Gorbachev, D. V., Strankovskii, S. A. 2006, "An extremal problem for even positive definite entire functions of exponential type", *Math. Notes*, vol. 80, no. 5, pp. 673–678.
21. Ivanov, V. I., Ivanov, A. V. 2014, "Optimal arguments in the Jackson-Stechkin inequality in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with Dunkl weight", *Math. Notes*, vol. 96, no. 5, pp. 666–677.
22. Ivanov, V., Ivanov, A. 2018, "Generalized Logan's Problem for Entire Functions of Exponential Type and Optimal Argument in Jackson's Inequality in $L_2(\mathbb{R}^3)$ ", *Acta. Math. Sin.-English Ser.*, First Online: 28 April 2018.
23. Gorbachev, D. V. 2005, "Selected Problems in the Theory of Functions and Approximation Theory: Their Applications", *Tula: Grif and K*, 192 p. [in Russian]
24. Yudin, V. A. 1997 "Disposition of Points on a Torus and Extremal Properties of Polynomials", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 219, pp. 447–457.
25. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. 1970, "Introduction to spectral theory", *Moscow, Nauka*, 671 p. [in Russian]

26. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. 1988, “Sturm–Liouville and Dirac Operators”, *Moscow, Nauka*, 432 p. [in Russian]
27. Flensted-Jensen, M., Koornwinder, T. H. 1973, “The convolution structure for Jacobi function expansions”, *Ark. Mat.*, vol. 11, pp. 245–262.
28. Flensted-Jensen, M., Koornwinder, T. H. 1979, “Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure”, *Ark. Mat.*, vol. 17, pp. 139–151.
29. Levitan, B. M. 1973, “Theory of generalized translation operators”, *Moscow, Nauka*, 312 p. [in Russian]
30. Levin, B. Ya. 1956, “Distribution of Roots of Entire Functions”, *Moscow, Gostekhizdat*, 632 p. [in Russian]
31. Rösler, M. 2003, “A positive radial product formula for the Dunkl kernel”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, no. 6, pp. 2413–2438.
32. Rösler, M., 2003, “Dunkl Operators: Theory and Applications”, *Lecture Notes in Math., Berlin: Springer*, vol. 1817, pp. 93–135.
33. de Jeu, M. 2006, “Paley – Wiener theorems for the Dunkl transform”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 358, no. 10, pp. 4225–4250.
34. Xu, Y. 2000, “Dunkl operators: Funk-Hecke formula for orthogonal polynomials on spheres and on balls”, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 32, pp. 447–457.
35. Vilenkin, N. J. 1968, “Special Functions and the Theory of Group Representations”, *Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, Translations of mathematical monographs, vol. 22, 613 p.
36. Koornwinder, T. 1979, “A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform”, *Ark. Mat.*, vol. 13, pp. 145–159.

Получено 18.04.2018

Принято в печать 17.05.2018