

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 1

УДК 513.6

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-44-56

Двойственность в абелевых многообразиях и формальных группах над локальными полями

Глазунов Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Национальный Авиационный Университет, Украина.

e-mail: glanm@yahoo.com

Аннотация

Статья посвящена памяти Олега Николаевича Введенского (1937 – 1981 гг.). О. Н. Введенский был учеником академика И. Р. Шафаревича. Исследования О. Н. и полученные им результаты связаны с двойственностью в эллиптических кривых и с соответствующими когомологиями Галуа над локальными полями, со спариванием Шафаревича-Тейта и с другими спариваниями, с локальной и квази-локальной теорией полей классов эллиптических кривых, с теорией абелевых многообразий размерности больше 1, с теорией коммутативных формальных групп над локальными полями. Представлены как результаты, полученные О. Н. Введенским, так и новые избранные результаты, развивающие исследования в направлениях фундаментальных групп схем, главных однородных пространств (торсеров) и двойственности. Первая часть статьи, представления здесь, является введением как в результаты, полученные О. Н. Введенским в направлении двойственности абелевых многообразий и формальных групп, так и в новые избранные результаты, развивающие исследования в направлениях фундаментальных групп схем, главных однородных пространств (торсеров) и двойственности. Во Введении приведены предварительные сведения и представлено содержание статьи. В первом разделе дан краткий обзор избранных результатов по теории алгебраических, квазиалгебраические и проалгебраические группы и групповых схем. Далее, в разделе 2 представлены избранные результаты по фундаментальным группам алгебраических многообразий, по фундаментальным группам схем, а в разделе 3 - избранные результаты о главных однородных пространствах (торсерах), развивающие исследования О. Н. и других авторов. Термин торсер мы используем как перевод на русский язык в редакции И.Р. Шафаревича английского термина *torsor*. В разделе 4 даны сведения о двойственности, а в разделе 5 представлены результаты О. Н. по арифметической теории формальных групп и их развитие. Результаты, этого раздела, представленные над локальными и квази-локальными полями K , над их кольцами целых, и над их полями вычетов k , связаны (1) с формальной структурой абелевых многообразий, (2) с коммутативными формальными группами, (3) с соответствующими гомоморфизмами и изоморфизмами. В статье алгебраические многообразия, абелевы схемы и коммутативные формальные групповые схемы определены, как правило, над локальными и квази-локальными полями, над их кольцами целых, и над их полями вычетов. Но кратко рассматриваются эти объекты и над глобальными полями, так как О. Н. интересовала тематика алгебраических многообразий над глобальными полями и он проводил соответствующие исследования. Предполагается, что характеристика полей вычетов больше 3, если не оговаривается иное.

Я признателен В.Н. Чубарикову за предложение опубликовать статью в сборнике.

Особая признательность Н. М. Добровольскому за помощь и поддержку в процессе подготовки статьи к печати.

Ключевые слова: двойственность; абелево многообразие; локальное поле; группа Пикара; формальная группа; групповая схема; фундаментальная группа; торсер; глобальное поле; проалгебраическая группа; группа универсальных норм.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

Н. М. Глазунов. Двойственность в абелевых многообразиях и формальных группах над локальными полями. // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 44–56.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 1

UDC 513.6

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-44-56

Duality in abelian varieties and formal groups over local fields

N. M. Glazunov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, National aviation university, Ukraine.

e-mail: glanm@yahoo.com

Abstract

The article is dedicated to the memory of Oleg Nikolaevich Vvedenskii (1937-1981). O.N. Vvedenskii was a student of the academician I.R. Shafarevich. O.N. Vvedenskii's research and the results obtained are related to duality in elliptic curves and with the corresponding Galois cohomology over local fields, with Shafarevich-Tate pairing and with other pairings, with local and quasi-local of class fields theory of elliptic curves, with the theory of Abelian varieties of dimension greater than 1, with the theory of commutative formal groups over local fields.

The paper presents both the results obtained by O.N. Vvedenskii, and new selected results, developing research in the directions of the fundamental groups of schemes, the principal homogeneous spaces (torsors), and duality. The first part of the article presented here is an introduction both to the results obtained by O.N. Vvedenskii in the direction of duality of Abelian varieties and formal groups, and in new selected results, developing research in the directions of the fundamental groups of schemes, the principal homogeneous spaces (torsors), and duality. The Introduction gives preliminary information and presents the content of the article. In the first section we give a brief survey of selected results on the theory of algebraic, quasialgebraic and proalgebraic groups and group schemes. Further, in Section 2 we present selected results on fundamental groups of algebraic varieties, on fundamental groups of schemes, and in Section 3 - selected results on principal homogeneous spaces (torsors), developing research by O.N. Vvedenskii and other authors. In Section 4 we give information on duality, and in Section 5 the paper presents the results by O.N. Vvedenskii on the arithmetic theory of formal groups and their development. The results of this section, represented over local and quasi-local fields K , over their rings of integers, and over their residue fields k , are connected (1) with the formal structure of Abelian varieties, (2) with commutative formal groups, (3) with corresponding homomorphisms. In the article, algebraic varieties, Abelian schemes, and commutative formal group schemes are defined, as a rule, over local and quasi-local fields, over their rings of integers, and over their residue fields. But these objects are also briefly considered over global fields, since O.N. was interested in the subject of algebraic varieties over global fields and he carried out corresponding studies. It is assumed that the characteristic of the residue fields is more than 3, unless otherwise specified.

I am grateful to V.N. Chubarikov for offering to publish the article in Chebyshevskii Sbornik.

Special thanks to N.M. Dobrovolsky for help and support in the process of preparing the article for publication.

Keywords: duality; Abelian variety; local field; Picard group; formal group; group scheme; fundamental group; torsor; global field; proalgebraic group; group of universal norms.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

N. M. Glazunov, 2018, "Duality in abelian varieties and formal groups over local fields. Chebyshevskii sbornik, vol. 19, no. 1, pp. 44–56.

Введение

Статья посвящена памяти Олега Николаевича Введенского (1937 – 1981 гг.). О. Н. Введенский был учеником академика И. Р. Шафаревича [1, 2]. Исследования О. Н. и полученные им результаты связаны с двойственностью в эллиптических кривых и с соответствующими когомологиями Галуа над локальными полями, со спариванием Шафаревича–Тэйта и с другими спариваниями, с локальной и квази-локальной теорией полей классов эллиптических кривых, с теорией абелевых многообразий размерности больше 1, с теорией коммутативных формальных групп над локальными полями [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Первая часть статьи, представленная здесь, является введением как в результаты, полученные О. Н. Введенским в направлении двойственности абелевых многообразий и формальных групп, так и в новые избранные результаты, развивающие исследования в направлениях фундаментальных групп схем, главных однородных пространств (торсеров) и двойственности.

Во Введении приведены предварительные сведения и представлено содержание статьи. В первом разделе дан краткий обзор избранных результатов по теории алгебраических, квазиалгебраические и проалгебраические группы и групповых схем. Далее, в разделе 2 представлены избранные результаты по фундаментальным группам алгебраических многообразий, по фундаментальным группам схем, а в разделе 3 — избранные результаты о главных однородных пространствах (торсерах), развивающие исследования О. Н. и других авторов. Термин торсер мы используем как перевод на русский язык в редакции И.Р. Шафаревича [9] английского термина *torsor*. В разделе 4 даны сведения о двойственности, а в разделе 5 представлены результаты О. Н. по арифметической теории формальных групп и их развитие. Результаты, этого раздела, представленные над локальными и квази-локальными полями K , над их кольцами целых, и над их полями вычетов k , связаны (1) с формальной структурой абелевых многообразий, (2) с коммутативными формальными группами, (3) с соответствующими гомоморфизмами и изогениями.

В статье алгебраические многообразия, абелевы схемы и коммутативные формальные групповые схемы определены, как правило, над локальными и квази-локальными полями, над их кольцами целых, и над их полями вычетов. Но кратко рассматриваются эти объекты и над глобальными полями, так как О. Н. интересовала тематика алгебраических многообразий над глобальными полями и он проводил соответствующие исследования.

Предполагается, что характеристика полей вычетов больше 3, если не оговаривается иное.

Пусть S есть схема. Абелевой схемой над S называют S -групповую схему $A \rightarrow S$ которая собственная, плоская, конечно-представимая и которая имеет гладкие и связные геометрические слои. Известно, что следствием этих свойств есть коммутативность абелевой схемы. При $S = \text{Spec } L$, где L - некоторое поле, получают определения абелева многообразия.

В монографии Дж. Милна [9], переведенной на русский язык под редакцией И.Р. Шафаревича по инициативе О. Н. Введенского (который являлся и одним из переводчиков), наряду с терминологией главных однородных пространств используется понятие торсера, или, более точно, G -торсера. Грубо говоря, G -торсер есть схема S , на которой действует групповая схема G , и такое действие удовлетворяет ряду естественных аксиом [9]. Так как в настоящее время представление соответствующих результатов на языке торсеров стало общепринятым [15, 16, 19, 20, 21, 22], и мы используем язык торсеров.

Пополнение абелева многообразия как алгебраической группы совпадает с пополнением компоненты единицы алгебраической группы и является коммутативной формальной группой.

1. Группы и групповые схемы

1.1. Элементы теории алгебраических групп и групповых схем.

Пусть R есть коммутативное кольцо с единицей. Известно, что такое аффинная схема $\text{Spec } R$ [2]. Напомним здесь, и кратко поясним, следуя [2], некоторые понятия, относящиеся к классу многообразий, которые порождаются приведенными отделимыми гладкими схемами $(X, \mathcal{O}_X)$ конечного типа над алгебраически замкнутым полем. Приведенность означает, что для открытых $U \subset X$ кольца $\mathcal{O}_X(U)$ не имеют нильпотентных элементов.

Важное понятие отделимости схемы определяется через понятие произведения схем и их замкнутости. В свою очередь, произведение схем определяется как произведение объектов в категории схем, а в терминах морфизмов схем над базисной схемой S (например, если S есть алгебраически замкнутое поле) как расслоенное произведение этих морфизмов. Морфизм схем $\varphi : X \rightarrow Y$ называют замкнутым вложением, если каждая точка $x \in X$ имеет такую аффинную окрестность U , что схема $\varphi^{-1}(U)$ аффинна и гомоморфизм $\varphi_* : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(U)$ эпиморфен. В категории схем над S определен морфизм $(1, 1) : X \rightarrow X \times_S X$, который называют диагональю.

Схему X называют замкнутой, если морфизм её диагонали есть замкнутое вложение, и схемой над кольцом R , если задан морфизм схем $X \rightarrow \text{Spec } R$. Конечной групповой схемой, или конечной группой порядка m над R , называют групповую схему, локально свободную ранга m над R . Такая групповая схема G определяется пучком локально свободных алгебр A ранга m над R .

В работах [1, 3, 4, 5] строятся и исследуются квазиалгебраических и проалгебраических группы по Серру. В определении квазиалгебраических и проалгебраических группы по Серру [10] используется понятие структуры. Структура St групповой схемы, или групповая структура, задается гомоморфизмами 1) $\mu : X \times_R X \rightarrow X$ (групповой закон), 2) $p : X \rightarrow X, p(x) = e$ (единица), 3) $i : X \rightarrow X$ (взятие обратного), удовлетворяющих аксиомам: а) $\mu \circ (\mu \times 1) = \mu \circ (1 \times \mu)$ (ассоциативность), б) $\mu \circ (1, i) = (i, 1) \circ \mu$, в) $\mu \circ (1, p) = (p, 1) \circ \mu = 1$, задающими, соответственно, групповой закон, единицу и взятие обратного элемента, которые удовлетворяют известным аксиомам [2]. Если в алгебраической группе G , или, более общо, в групповой схеме, фиксирована групповая структура St , то мы обозначаем это через G_{St} .

1.2. Квазиалгебраические и проалгебраические группы.

Далее все группы, если не оговорено противное, предполагаются коммутативными. В этом разделе буквой K обозначаем совершенное поле (алгебраически замкнутое поле), буквой p его характеристическую экспоненту, то есть $p = 1$, если характеристика K равна нулю, характеристическая экспонента $= p$, если характеристика K равна $p > 0$. Все алгебраические многообразия считаем определенными над K . Как известно, в категории алгебраических групп над K существуют биективные морфизмы, не являющиеся морфизмами в смысле алгебраических групп. Другими словами, категория алгебраических групп аддитивная, но не абелева. Напомним известный пример. Пусть $K = k$ - алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$. Топологические пространства алгебраических групп X и Y , которые мы обозначаем теми же буквами, задаются условием $X = Y = k$. Пусть групповая операция каждой из групп аддитивна и задается отображением $\mu(x, y) = x + y, x, y \in k$. Рассмотрим гомоморфизм $\phi : X \rightarrow Y$ алгебраических групп X и Y , задаваемый условием $\phi(x) = x^p$. Как точечное отображение он взаимно-однозначен и как отображение абстрактных групп является изоморфизмом, но как регулярное отображение многообразий изоморфизмом не является, так как соответствующий ему гомоморфизм колец $\phi^* : k[Y] \rightarrow k[X], \phi^*(T) = T^p, k[X] = k[Y] = k[T]$ не является изоморфизмом.

1.2.1. Квазиалгебраические группы.

Понятие квазиалгебраической группы [10] объединяет в один класс алгебраические группы, между которыми существуют биекции, могущие и не быть изоморфизмами алгебраических групп. Пусть G_{St} есть алгебраическая группа и $\mathcal{O}$ - пучок функций на G_{St} . Если $q = p^n, n \in \mathbf{Z}$, то обозначим через $\mathcal{O}^q$ пучок, сечения которого над открытыми множествами $U \subset G$ являются q -ыми степенями сечений пучка $\mathcal{O}$ над U . Положим также $\mathcal{O}^{p^{-\infty}} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}^{p^n}$. Если $q \geq 1$, то соответствующее пучку $\mathcal{O}^q$ многообразие G^q будет алгебраической группой. Пусть G есть группа. Если St есть структура алгебраической группы на G , совместимая со структурой группы, то через G_{St} обозначают соответствующую алгебраическую группу, и через T_{St} и $\mathcal{O}_{St}$ соответственно топологию и пучок колец. Ниже морфизм означает регулярное отображение (морфизм) алгебраических групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. [10] Пусть St_1 и St_2 - две структуры алгебраической группы на G , совместимые со структурой группы. Следующие условия эквивалентны: (i) Существует структура St_3 , такая, что тождественные отображения $St_3 \rightarrow St_1$ и $St_3 \rightarrow St_2$ являются морфизмами.

(ii) Существует структура St_4 такая, что тождественные отображения $St_1 \rightarrow St_4$ и $St_2 \rightarrow St_4$ являются морфизмами.

(iii) Существует для произвольной положительной степени q числа p тождественное отображение $G_{St_1} \rightarrow G_{St_2}^q$ которое есть морфизм алгебраических групп.

(vi) $T_{St_1} = T_{St_2}$ и $\mathcal{O}_{St_1}^{p^{-\infty}} = \mathcal{O}_{St_2}^{p^{-\infty}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G есть абстрактная группа и пусть St_1 и St_2 - две структуры алгебраической группы на G , совместимые со структурой группы G . Говорят, что St_1 и St_2 эквивалентны, если они удовлетворяют условиям Предложения 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квазиалгебраической группой, соответствующей группе G , называют класс эквивалентных (относительно определения 1) структур алгебраической группы на G , совместимых со структурой группы на G .

Если G есть квазиалгебраическая группа, то структуру алгебраической группы на G , выбранная из класса эквивалентных (в смысле определения квазиалгебраической группы) структур на G , называют совместной с квазиалгебраической структурой на G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. [10] Пусть G и G' - квазиалгебраические группы и пусть $f : G \rightarrow G'$ гомоморфизм групп (в теоретико-множественном смысле). Следующие условия эквивалентны: На G и G' существуют структуры алгебраических групп St и St' , совместимые с квазиалгебраическими структурами и такие, что $f : G_{St} \rightarrow G'_{St'}$ есть регулярное отображение алгебраических групп. Отображение f непрерывно, и если ϕ есть сечение пучка $\mathcal{O}_{G'}^{p^{-\infty}}$ над открытым U' , то $\phi \circ f$ есть сечение пучка $\mathcal{O}_G^{p^{-\infty}}$ над открытым множеством $f^{-1}(U')$. График отображения f есть замкнутая подгруппа в $G \times G'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если G и G' - две квазиалгебраические группы, то морфизмом из G в G' называют гомоморфизм $f : G \rightarrow G'$, удовлетворяющий эквивалентным условиям предложения 2.

Объекты - квазиалгебраические группы, а также морфизмы между ними, удовлетворяют известным теоретико-категорным свойствам [10, 2]. Тем самым определена категория квазиалгебраических групп $\mathcal{QG}_K$, которая является абелевой по построению.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение квазиалгебраической группы может быть дано и в терминах групповых схем.

Напомним кратко такое построение. Расширяем категорию алгебраических групп над K до категории групповых схем над K . Так как здесь в дальнейшем рассматриваем только коммутативные группы, ограничим себя категорией коммутативных групповых схем $\mathcal{CG}_K$ над K . Пусть H и G лежат в $\mathcal{CG}_K$ и $f : H \rightarrow G$ есть чисто несепарабельная изогения из H в G . Назовем H и G эквивалентными, если существует групповая схема $F \in \mathcal{CG}_K$ и чисто несепарабельная изогения $f : H \rightarrow G$. Тогда квазиалгебраической группой будет класс эквивалентных (в вышеуказанном смысле) групповых схем.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По всякой алгебраической группе G можно каноническим образом определить квазиалгебраическую группу $G^{p^{-\infty}}$, структурным пучком которой есть пучок $\mathcal{O}_G^{p^{-\infty}}$.

1.2.2. Проалгебраические группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Проалгебраической группой называют группу G и непустое семейство $\mathcal{C}$ её подгрупп, такое, что для каждого $H \in \mathcal{C}$ множество G/H имеет структуру квазиалгебраической группы, причем выполнены аксиомы:

П1. Если $H, H' \in \mathcal{C}$, то $H \cap H' \in \mathcal{C}$;

П2. Пусть $H \in \mathcal{C}$. Подгруппа H' содержащая H и лежащая в $\mathcal{C}$ есть прообраз замкнутой подгруппы из G/H .

П3. Если $H, H' \in \mathcal{C}$ и если $H \subset H'$, то $G/H \rightarrow G/H'$ является морфизмом квазиалгебраических групп.

П4. Естественное отображение $G \rightarrow \lim_{\text{inv}} G/H$ есть биекция G на проективный предел групп G/H ($H \in \mathcal{C}$).

2. Фундаментальные группы схем

2.1. Гомотопические группы. Функтор универсального накрытия

В этом подразделе мы следуем [10]. Пусть G квази-алгебраическая группа. Обозначим через G^0 связную компоненту единичного элемента группы G . Далее G^0 называем связной компонентой группы G . Предположим теперь, что G – проалгебраическая группа с полным определяющим множеством $\mathcal{C}$; для $H \in \mathcal{C}$, связная компонента $(G/H)^0$ фактор-группы G/H есть замкнутая подгруппа в G/H , и, если $H' \subset H$, то образ G/H' в G/H есть $(G/H)^0$. Ввиду этого можно положить $G/G^0 := \lim_{\text{inv}} (G/H)/(G/H)^0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Фактор-группа G/G^0 обозначается через $\pi_0(G)$ и называется 0-ой гомотопической группой проалгебраической группы G .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Операция факторизации $\pi_0(G) = G/G^0$ определяет функтор

$$\pi_0 : \mathcal{PG}_K \rightarrow \mathcal{PG}_K^0$$

из категории $\mathcal{PG}_K$ в категорию $\mathcal{PG}_K^0$ проалгебраических групп размерности ноль [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Левые производные функторы функтора π_0 называют i -ыми гомотопическими группами проалгебраической группы G и обозначать через $\pi_i(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Наличие в категории $\mathcal{PG}_K$ достаточного числа проективных объектов [10] делает определение 6 корректным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $G \in \mathcal{PG}_K$. Фундаментальной группой группы G называют первую гомотопическую группу $\pi_1(G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Группу $G \in \mathcal{PG}_K$ называют связной, если $G = G^0$. Группа $G \in \mathcal{PG}_K$ называется односвязной, если $\pi_1(G) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. [10] Если G - проалгебраическая группа размерности ноль, то $\pi_i(G) = 0$ для всех $i \geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. [10] Пусть $G \in \mathcal{PG}_K$. Существует связная и односвязная проалгебраическая группа $\bar{G}$ и морфизм $u : \bar{G} \rightarrow G$ такие, что ядро u коядро u -проалгебраические группы размерности ноль. Пара $(\bar{G}, u)$ единственна, с точностью до изоморфизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пара $(\bar{G}, u)$ называется универсальной накрывающей группы G .

2.2. Фундаментальные группы числовых полей

В своих работах, которые относятся к арифметике числовых полей и колец, О. Н. Введенский использовал и развивал результаты С. Лихтенбаума. В недавней работе С. Лихтенбаум [14] определил этальный сайт Вейля и исследовал связанные с ним фундаментальные группы. Эти исследования развивает в своих работах Б. Морин [16]. Исследования этих авторов, как и исследования О. Н. Введенского, используют результаты А. Гротендика с соавторами [13]. В цитируемой работе [16] Морин определяет фундаментальную группу, лежащую в основе этальных когомологий Вейля числового кольца. Соответствующий этальный топос Вейля определяется как уточнение этального сайта Вейля по Лихтенбауму. Автор [16] демонстрирует естественность своего определения в случае гладкой проективной кривой и определяет далее этальную фундаментальную группу Вейля открытой подсхемы спектра числового кольца. Эта фундаментальная группа является проективной системой локально компактных топологических групп, которая представляет первые когомологии с коэффициентами в локально-компактной абелевой группе. Автор применяет этот результат для вычисления групп когомологий малых степеней и для проверки того, что этальный топос Вейля удовлетворяет ожидаемым свойствам топоса Лихтенбаума.

Пусть Y есть открытая подсхема гладкой проективной кривой над конечным полем k , и пусть $S_{et}(W_k, \bar{Y})$ есть топос W_k -эквивариантных этальных пучков на проективной кривой $\bar{Y} = Y \otimes_k \bar{k}$.

ТЕОРЕМА 1. [16] Существует эквивалентность $Y_W^{sm} \simeq S_{et}(W_k, \bar{Y})$ где Y_W^{sm} есть (малый) этальный топос Вейля.

Для связной этальной $\bar{X}$ -схемы $\bar{U}$ автор определяет её этальный топос Вейля как срезанный (slice) топос $\bar{U}_W := \bar{X}_W / \gamma^* \bar{U}$. Пусть K есть числовое поле соответствующее общей точке $\bar{U}$, и пусть $q_{\bar{U}} : \text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow \bar{U}$ есть некоторая геометрическая точка. Подобно определению этальной фундаментальной группы как (строгой) проективной системы конечных факторов группы Галуа G_K , автор определяет аналогичную (строгую) проективную систему $\underline{W}(\bar{U}, q_{\bar{U}})$ локально компактных факторов группы Вейля W_K .

ТЕОРЕМА 2. [16] Этальный топос Вейля $\bar{U}_W$ является связным и локально-связным над топосом T локально компактных пространств. Геометрическая точка $q_{\bar{U}}$ определяет T -значную точку $p_{\bar{U}}$ топоса $\bar{U}_W$, и имеет место изоморфизм

$$\pi_1(\bar{U}_W, p_{\bar{U}}) \simeq \underline{W}(\bar{U}, q_{\bar{U}}) \text{ топологических про-групп.}$$

Фундаментальная группа и фундаментальная схема могут быть определены в рамках подхода по Таннаки (см. [21] и цитируемую там литературу). В следующем разделе мы очень кратко опишем, следуя работам [17, 18, 19] G -торсеры над схемами Дедекинда.

3. Главные однородные пространства и торсеры

В монографии [17] Саверда Ривано дал для главных однородных пространств (G -торсеров) описание по Таннаки. Нори [18] в рамках подхода по Таннаки дал определение фундаментальной схемы.

4. Двойственность и поля классов

Тэйт в своих работах о главных однородных пространствах абелевых многообразий [11] доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{G}$ есть группа Галуа сепарабельного замыкания K_s локального поля K и пусть E есть любой конечный $\mathcal{G}$ -модуль, порядок которого взаимно прост с характеристикой поля K . Пусть E^D есть $\mathcal{G}$ -модуль $\text{Hom}(E, K_s^*)$. Тогда спаривание $H^2(\mathcal{G}, E) \times H^{2-r}(\mathcal{G}, E^D) \rightarrow H^2(\mathcal{G}, K_s^*) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ есть совершенная двойственность конечных групп для всякого $r \in \mathbf{Z}$.

Шатц (Shatz) устранил ограничение на условие, что порядок модуля взаимно прост с характеристикой поля K и доказал теорему двойственности [12].

ТЕОРЕМА 4. Пусть K есть локальное поле и A есть артинова групповая схема над K , A^D - схема, двойственная по Картье схеме A . Пусть $\mathbf{G}_m$ - мультипликативная схема над K . Тогда спаривание $H^2(K, A) \times H^{2-r}(K, A^D) \rightarrow H^2(K, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ есть двойственность по Понтрягину локально компактных групп.

Пусть A - абелево многообразие над полем K с полем вычетов k , A_K - группа точек A , рациональных над K , $\bar{A}$ - многообразие Пикара многообразия A . Для случая алгебраически замкнутого k в [1] доказано, что группа главных однородных пространств над A двойственна фундаментальной группе $\pi_1(\bar{A}_K)$ проалгебраической группы $\bar{A}_K$ (исключая p -компоненты, где $p > 0$ - характеристика k).

5. Формальные группы и универсальные нормы

Пополнение абелева многообразия как алгебраической группы совпадает с пополнением компоненты единицы алгебраической группы и является коммутативной формальной группой.

Далее рассматриваем только n -мерные аффинные формальные схемы в смысле Гротендика, конструируемые из колец $A = R[[X_1, \dots, X_n]] = R[[X]]$ формальных степенных рядов от n переменных над коммутативным кольцом R с единицей. Морфизмы формальных схем (ФС) соответствуют непрерывным гомоморфизмам колец A . В категории ФС существует конечный объект $Spf R$ (кольцо R наделено дискретной топологией) и произведения, соответствующие пополненным тензорным произведениям колец A над R . Если $\phi : X \rightarrow Spf R$ - формальная схема, то формальная групповая схема (ФГС) над R определяется обычным способом заданием трех морфизмов: 1) $\mu : X \times_R X \rightarrow X$ (групповой закон), 2) $p : X \rightarrow X, p(x) = e$ (единица), 3) $i : X \rightarrow X$ (взятие обратного), удовлетворяющих аксиомам: а) $\mu \circ (\mu \times 1) = \mu \circ (1 \times \mu)$ (ассоциативность), б) $\mu \circ (1, i) = (i, 1) \circ \mu$, в) $\mu \circ (1, p) = (p, 1) \circ \mu = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Формальным групповым законом от n переменных называется набор $F = (F_i)$ из n формальных степенных рядов $F_i \in R[[X, Y]]$ такой, что
(i) $F(X, Y) \equiv X + Y \pmod{\deg 2}$,
(ii) $F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$ (ассоциативность).

Групповой закон $F = (F_i)$ называют коммутативным, если выполнена аксиома

$$F(X, Y) = F(Y, X).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть F и G соответственно n и m - мерные групповые законы над R . Набор φ из m формальных степенных рядов без свободных членов от n переменных $T = (T_1, \dots, T_n)$ называется R - гомоморфизмом из F в G , если выполнено условие $\varphi \circ F = G \circ \varphi$. /Эта запись обозначает соответствующие подстановки наборов в наборы/ Множество всех R - гомоморфизмов из F в G будем обозначать через $\text{Hom}_R(F, G)$. Если $\varphi, \psi \in \text{Hom}_R(F, G)$, то можно определить их сумму $\varphi +_H \psi$, положив $(\varphi +_H \psi)(T) = G(\varphi(T), \psi(T))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Операция $+_H$ задает на множестве $\text{Hom}_R(F, G)$ структуру абелевой группы.

Работа [5] продолжает начатое О. Н. Введенским [4] и другими построение аналога локальной и квази-локальной теории полей классов эллиптических кривых и абелевых многообразий. Представим кратко результаты работы [5] и их развитие. Пусть A - эллиптическая кривая одного из следующих 3-х типов, определенная над квази-локальным полем K : I. Инвариант Хассе редукции A отличен от нуля. II. A имеет мультипликативную редукцию. III. Инвариант Хассе редукции A нулевой. Пусть $\bar{F}_L$ проалгебраическая группа, определяемая (по максимальному идеалу кольца целых поля L и по формальной группе F , соответствующей A , или имеющую высоту редукции 3) на $\text{Gal}(L/K)$ -модуле F_L , $\mathcal{D}_K^* = \bigcap_L N_{L/K}(\pi_1(\bar{F}_L))$ (пересечение по всем конечным расширениям Галуа L/K) - группа универсальных норм формальной группы F , соответствующей A , или формальной группы высоты редукции 3.

ТЕОРЕМА 5. $\mathcal{D}_K^* = 0$.

Доказательство теоремы основано на прямом вычислении действия норменного гомоморфизма $N_{L/K}$ на фильтрацию $\bar{F}_L$.

Пусть A_K проалгебраическая группа точек A , рациональных над K , $\pi_1(A_K)$ - фундаментальная группа группы A_K , $\mathcal{D}_K = \bigcap_L N_{L/K}(\pi_1(A_L))$ - подгруппа универсальных норм в $\pi_1(A_K)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\mathcal{D}_K = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует эллиптическая кривая A типа III над квази-локальным полем K такая, что группа когомологий $H^1(\text{Gal}(L/K), A)$ бесконечна.

О. Н. Введенским сформулирован ряд предположений об универсальных нормах и норменных подгруппах коммутативных формальных групп над K . Некоторые из этих предположений доказаны Н.М. Глазуновым и Г.Т. Коноваловым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шафаревич И. Р. Сочинения. Т. 3, ч. 2. М.: Физматлит, 1996. 637 с.
2. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. В 2 т. М.: Наука, 1988.
3. Введенский О. Н. Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем. II // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1966. Т. 30, № 4. С. 891—922.
4. Введенский О. Н. О локальных “полях классов” эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1973. Т. 37, № 1. С. 20—88.
5. Введенский О. Н. О “универсальных нормах” формальных групп, определенных над кольцом локального поля // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1973. Т. 37, № 4. С. 737—751.

6. Введенский О. Н. О квази-локальных “полях классов” эллиптических кривых. I // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1976. Т. 40, № 5. С. 969—992.
7. Введенский О. Н. О спариваниях в эллиптических кривых над глобальными полями // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1978. Т. 42, № 2. С. 237—260.
8. Введенский О. Н. Эффект Артина в абелевых многообразиях. II // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1981. Т. 45, № 1. С. 23—46.
9. Милн Дж. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983. 393 с.
10. Serre J.-P. Groupes proalgébriques // Publications mathématiques IHES. № 7. 1960. 65 p.
11. Tate J. Duality theorems in Galois cohomology over number fields // Proceedings of Int. Congress of Mathematicians (Stockholm, 1962). Djursholm : Inst. Mittag-Leffler, 1962. P. 288—295.
12. Shatz S.S. Cohomology of artinian group schemes over local fields // Ann. of Math. 1964. Vol. 79, № 2. P. 411—449.
13. Grothendieck A., Artin M., J.L. Verdier Théorie des Topos et cohomologie étale des schémas (SGA4) // Lecture Notes in Math. Berlin-N.Y.: Springer-Verlag, 1972. Vol. 269, 270, 305.
14. Lichtenbaum S. The Weil-étale topology for number rings // Ann. of Math. 2009. Vol. 170, № 2, P. 657—683.
15. Bosch S., Liu Q. Rational points of the group of components of a Néron model // Manuscripta math. 1999. Vol. 98. P. 275—293.
16. Morin B. The Weil-étale fundamental group of a number field . II // Sel. Math., New Ser. 2011. 17, № 1. P. 67—137.
17. Saavedra R. Catégories Tannakiennes // Lecture Notes in Math. Berlin-N.Y.: Springer-Verlag, 1972. Vol. 265. 418 p.
18. Nori M. On the representations of the fundamental group // Compos. Math. 1976. Vol. 33, № 1. P. 29—41.
19. Broshi M. G -torsors over a Dedekind scheme // J. Pure Appl. Algebra. 2013. Vol. 217, № 1. P. 11—19.
20. Conrad B. Reductive group schemes // Autour des schémas en groupes. École d'Été “Schémas en groupes”. Paris: Société Mathématique de France (SMF), 2014. Vol. I. P. 42—43, 93—444.
21. Biswas I., Dos Santos João Pedro P. Abelianization of the F -divided fundamental group scheme // Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. 2017. Vol. 127, № 2. P. 281—287.
22. Tziolas N. Quotients of schemes by α_p or μ_p actions in characteristic $p > 0$ // Manusc. Math. 2017. Vol. 152, № 1–2. P. 247—279.

REFERENCES

1. Шафаревич И. Р. 1996, *Sochineniya, T. 3, ch. 2*. М.: Fizmatlit, 637 p.
2. SHafarevich I. R. 1988, *Osnovy algebraicheskoy geometrii. V 2 t.* М.: Nauka.
3. Vvedenskij O. N. 1966, "Dvojstvennost' v ehllipticheskikh krivyh nad lokal'nym polem. II" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika*. Vol. 30, № 4. pp. 891—922.
4. Vvedenskij O. N. 1973, "O lokal'nyh "polyah klassov" ehllipticheskikh krivyh" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika*. Vol. 37, № 1. pp. 20—88.
5. Vvedenskij O. N. 1973, "O "universal'nyh normah" formal'nyh grupp, opredelennyh nad kol'com lokal'nogo polya" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika*. Vol. 37, № 4. pp. 737—751.
6. Vvedenskij O. N. 1976, "O kvazi-lokal'nyh "polyah klassov" ehllipticheskikh krivyh. I" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika*. Vol. 40, № 5. pp. 969—992.
7. Vvedenskij O. N. 1978, "O sparivaniyah v ehllipticheskikh krivyh nad global'nymi polyami" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika*. Vol. 42, № 2. pp. 237—260.
8. Vvedenskij O. N. 1981, "EHffekt Artina v abelevykh mnogoobraziyah. II" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika*. Vol. 45, № 1. pp. 23—46.
9. Miln Dzh. 1983, *EHtal'nye kogomologii*. М.: Mir, 393 P.
10. Serre J.-P. 1960, "Groupes proalgebriques" *Publications mathematiques IHES*. № 7. 65 p.
11. Tate J. 1962, "Duality theorems in Galois cohomology over number fields" *Proceedings of Int. Congress of Mathematicians (Stockholm, 1962)*. Djursholm : Inst. Mittag-Leffler, pp. 288—295.
12. Shatz S.S. 1964, "Cohomology of artinian group schemes over local fields" *Ann. of Math.* Vol. 79, № 2. P. 411—449.
13. Grothendieck A., Artin M., J.L. Verdier 1972, "Théorie des Topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)" *Lecture Notes in Math.* Berlin-N.Y.: Springer-Verlag, Vol. 269, 270, 305.
14. Lichtenbaum S. 2009, "The Weil-etale topology for number rings" *Ann. of Math.* Vol. 170, № 2, pp. 657—683.
15. Bosch S., Liu Q. 1999, "Rational points of the group of components of a Néron model" *Manuscripta math.* Vol. 98. pp. 275—293.
16. Morin B. 2011, "The Weil-étale fundamental group of a number field . II" *Sel. Math., New Ser.* 17, № 1. pp. 67—137.
17. Saavedra R. 1972, "Catégories Tannakiennes" *Lecture Notes in Math.* Berlin-N.Y.: Springer-Verlag, Vol. 265. 418 p.
18. Nori M. 1976, "On the representations of the fundamental group" *Compos. Math.* Vol. 33, № 1. pp. 29—41.
19. Broshi M. 2013, "G-torsors over a Dedekind scheme" *J. Pure Appl. Algebra*. Vol. 217, № 1. pp. 11—19.

- 20. Conrad B. 2014, “Reductive group schemes“ *Autour des schémas en groupes. École d’Été “Schémas en groupes”*. Paris: Société Mathématique de France (SMF), Vol. I. pp. 42—43, 93—444.
- 21. Biswas I., Dos Santos João Pedro P. 2017, “Abelianization of the F -divided fundamental group scheme“ *Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci.* Vol. 127, № 2. pp. 281—287.
- 22. Tziolas N. 2017, “Quotients of schemes by α_p or μ_p actions in characteristic $p > 0$ “ *Manuscr. Math.* Vol. 152, № 1–2. pp. 247—279.