ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 512.572 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-26-34

О базисах тождеств многообразий группоидов отношений

Бредихин Дмитрий Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Математика и моделирование», Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
e-mail: bredikhin@mail.ru

Аннотация

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую алгеброй отношений. Всякую такую алгебру можно рассматривать как упорядоченную отношением теоретико-множественного включения. Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$ многообразие, порождённое алгебрами [соответственно упорядоченными алгебрами] отношений с операциями из Ω. Операции над отношениями, как правило, задаются формулами исчисления предикатов первого порядка. Такие операции называются логическими. Важным классом логических операция является класс диофантовых операций. Операция называется диофантовой, если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. В работе изучаются алгебры отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть группоиды отношений. В качестве рассматриваемой операции выступает диофантова операция $*$, определяемая следующим образом: $\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(x, z) \in \rho \wedge (x, z) \in \sigma\}$. Отношение $\rho * \sigma$ представляет собой результат цилиндрификации пересечения $\rho \cap \sigma$ бинарных отношений ρ и σ. В работе находятся конечные базисы тождеств для многообразий $Var\{*\}$ и $Var\{*, \subset\}$. Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам: $xy = yx$ (1), $(xy)^2 = xy$ (2), $(xy)y = xy$ (3), $x^2y^2 = x^2y$ (4), $(x^2y^2)z = x^2(y^2z)$ (5). Упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5) и тождествам: $x \leq x^2$ (6), $xy \leq x^2$ (7). В качестве следствия также получен конечный базис тождеств многообразия $Var\{*, \cup\}$.

Ключевые слова: алгебры отношений, диофантовые операции, тождества, многообразия, группоиды, упорядоченные группоиды.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Д. А. Бредихин. О базисах тождеств многообразий группоидов отношений // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 26–34.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 512.572 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-26-34

On bases of identities for varieties of groupoids of relations

Bredikhin Dmitry Aleksandrovich — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of Department of "Mathematics and Modeling"of Saratov State Technical University.
e-mail: bredikhin@mail.ru

Abstract

A set of binary relations closed with respect to some collection of operations on relations forms an algebra called an algebra of relations. Any such algebra can be considered as partially ordered by the relation of set-theoretic inclusion. For a given set Ω of operations on relations, we denote by $Var\{\Omega\}$ [$Var\{\Omega, \subset\}$] the variety generated by the algebras [respectively ordered algebras] of relations with operations from Ω. Operations on relations, as a rule, are given by formulas of the first order predicate calculus. Such operations are called logical operations. An important class of logical operations is the class of Diophantine operations. An operation on relations is called Diophantine if it can be defined by a formula containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. We study algebras of relations with one binary Diophantine operation, i.e., groupoids of relations. As the operation being considered, the Diophantine operation $*$ that is defined in the following way: $\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(x, z) \in \rho \wedge (x, z) \in \sigma\}$. The relation $\rho * \sigma$ is the result of the cylindrification of the intersection $\rho \cap \sigma$ of the binary relations ρ and σ. In the paper, the finite bases of identities for varieties $Var\{*\}$ and $Var\{*, \subset\}$ are found. The groupoid $(A, \cdot)$ belongs to the variety $Var\{*\}$ if and only if it satisfies the identities: $xy = yx$ (1), $(xy)^2 = xy$ (2), $(xy)y = xy$ (3), $x^2y^2 = x^2y$ (4), $(x^2y^2)z = x^2(y^2z)$ (5). The partially ordered groupoid $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the variety $Var\{*, \subset\}$ if and only if it satisfies the identities (1) - (5) and the identities: $x \leq x^2$ (6), $xy \leq x^2$ (7). As a consequence, we also obtain a finite basis of identities for the variety $Var\{*, \cup\}$.

Keywords: algebra of relations, diophantine operations, identities, varieties, groupoids, patially ordered groupoids.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
D. A. Bredikhin, 2018, "On bases of identities for varieties of groupoids of relations *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 26–34.

1. Введение

Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А.Тарского [1, 2]. Под *алгеброй отношений* мы понимаем упорядоченную пару (Φ, Ω), где Φ – множество бинарных отношений на некотором множестве, замкнутое относительно совокупности Ω операций над ними [3]. Важную роль в теории алгебр отношений играет изучение многообразий, порожденных различными их классами [4, 5]. Операция над отношениями называется диофантовой [9, 10] (в другой терминологии примитивно-позитивной [14]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции согласованы с отношением теоретико-множественного включения $\subset$ и, следовательно, всякая алгебра отношений (Φ, Ω) с диофантовыми операциями может быть рассмотрена как упорядоченная $(\Phi, \Omega, \subset)$ этим отношением.

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ $(R\{\Omega, \subset\})$ класс алгебр (упорядоченных алгебр) изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ $(Var\{\Omega, \subset\})$ – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ $(R\{\Omega, \subset\})$.

Предметом нашего рассмотрения будут вопросы, касающиеся нахождения базисов тождеств многообразий, порожденных классами алгебр отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть классами группоидов отношений. Мотивация такого рода исследований приведена в [8, 13]. Некоторые результаты в этом направлении можно также найти в работах [6, 11, 12].

Сосредоточим внимание на следующей операции над отношениями, задаваемой формулой:

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(x, z) \in \rho \wedge (x, z) \in \sigma\},$$

где ρ и σ – бинарные отношения на множестве X.

Заметим, что отношение $\rho * \sigma$ представляет собой результат цилиндрификации [15] пересечения $\rho \cap \sigma$ бинарных отношений ρ и σ.

Основным результатом данной работы является нахождение базисов тождеств для многообразий $Var\{*\}$, $Var\{*, \subset\}$ и $Var\{*, \cup\}$. Доказательства основываются на описаниях эквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями, полученных в [7, 9, 10]. Результаты докладывались на 14 Международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“, посвященной 70-летию со дня рождения Г.И.Архипова и С.М.Воронина (Саратов, 12-15 сентября 2016 г.).

2. Формулировка результатов

Группоидом называется алгебра $(A, \cdot)$ с одной бинарной операцией. Упорядоченным группоидом $(A, \cdot, \leq)$ назовем группоид с заданным на множестве A отношением порядка, согласованным с операцией группоида. Это означает, что $x \leq y$ и $u \leq v$ влечет $xu \leq yv$. Полурешеточно упорядоченный группоид – это алгебра $(A, \cdot, \vee)$ типа $(2, 2)$, где $(A, \cdot)$ – группоид, $(A, \vee)$ – верхняя полурешетка, каноническое отношение порядка которой согласовано с операцией группоида. Алгебры отношений вида $(\Phi, *)$, $(\Phi, *, \subset)$ и $(\Phi, *, \cup)$ образуют соответственно группоид, упорядоченный группоид и полурешеточно упорядоченный группоид бинарных отношений.

Теорема 1. *Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$xy = yx \,(1),\ (xy)^2 = xy \,(2),\ (xy)y = xy \,(3),\ x^2y^2 = x^2y \,(4),\ (x^2y^2)z = x^2(y^2z) \,(5).$$

Теорема 2. *Упорядоченный группоид* $(A, \cdot, \leq)$ *принадлежит многообразию* $Var\{*, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5) и тождествам:*

$$x \leq x^2 \ (6), \ xy \leq x^2 \ (7).$$

Теорема 3. *Полурешеточно упорядоченный группоид* $(A, \cdot, \vee)$ *принадлежит многообразию* $Var\{*, \cup\}$ *тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5) и тождествам:*

$$(x \vee y)z = xz \vee yz \ (8), \ x \vee x^2 = x^2 \ (9), \ xy \vee x^2 = x^2 \ (10).$$

3. Доказательства

Разобьем доказательство теорем на ряд шагов.

Шаг 1. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении, и сформулируем необходимый результат из работ [7].

Обозначим через $Rel(U)$ множество всех бинарных отношений на U. Всякая формула $\phi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов $r_1, \ldots, r_m$ и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1, определяет m-арную операцию F_φ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(\rho_1, \ldots, \rho_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, \rho_1, \ldots, \rho_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $\rho_1, \ldots, \rho_m$ из $Rel(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется диофантовой [9, 10] (в другой терминологии примитивно-позитивной [14]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Диофантовы операции могут быть описаны с помощью графов [3, 4].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V, \ E)$, где $V = V(G)$ – конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset V \times N \times V$ – тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u \cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Мы также будем говорить, что вершины u и v инцидентны ребру (u, k, v).

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, то есть систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) – помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ – две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма. Мы также будем отождествлять двухполюсники, различающиеся лишь числом изолированных вершин, отличных от его входа и выхода, так как такие двухполюсники соответствуют одной и той же операции над отношениями.

Пусть $F = F_\varphi$ – диофантова операция, задаваемая формулой φ. С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ – множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ; $in(G) = 0$, $out(G) = 1$; $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ, то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что двухполюсник, соответствующий операции $*$, задается следующим образом:

$$in = \cdot \overset{1}{\underset{2}{\rightrightarrows}} \cdot \qquad \cdot = out$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ – двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \ldots, G_m)$, определяемый следующим образом [14]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Рассмотрим множество $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}\}$ диофантовых операций над отношениями, и пусть $A = (A, f_1, \ldots, f_n)$ – универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1)$, $\ldots$, $G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$:

1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in \cdot \overset{k}{\rightarrow} \cdot out$;
2) если $p = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \ldots, G(p_m))$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ – двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Мы будем писать $G_1 \prec G_2$, если существует гомоморфизм из G_2 в G_1, и $G_1 \cong G_2$, если $G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1$.

Обозначим через $Eq\{\Omega\}$ $(Eq\{\Omega, \subset\})$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega\}$ $(R\{\Omega, \subset\})$, то есть совокупность всх тождеств, выполняющихся на алгебрах из этого класса. Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы [7]:

Тождество $p = q$ $(p \leq q)$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ $(Eq\{\Omega, \subset\})$ тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$ $(G(p) \prec G(q))$.

Шаг 2. Рассмотрим счетное множество индивидуальных переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Напомним, что термы группоида определяются следующим индуктивным образом: всякая индивидуальная переменная является термом; если p_1 и p_2 – термы, то выражение $(p_1 p_2)$ является термом, называемым произведением термов p_1 и p_2. В дальнейшем внешние скобки в записи термов, как правило, будут опускаться. Множество Ξ всех термов относительно операции произведения термов образует счетно порожденную свободную алгебру в классе всех группоидов.

Обозначим через Σ $(\Sigma^{\leq})$ эквациональную теорию класса группоидов (упорядоченных группоидов), удовлетворяющих тождествам (1)–(5) ((1)–(7)). Для термов p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \cong p_2$ $(p_1 \prec p_2)$, когда тождество $p_1 = p_2$ $(p_1 \leq p_2)$ принадлежит Σ $(\Sigma^{\leq})$. Отношение $\cong$ является отношением конгруэнции группоида Ξ, а фактор группоид $\Xi/\cong$ является свободным счетно порожденным группоидом в многообразии, задаваемом тождествами (1)–(5). Класс отношения эквивалентности, содержащий терм p обозначим через $[p]$. Фактор группоид $\Xi/\cong$, упорядоченный отношением $\leq$ $([p] \leq [q] \Leftrightarrow p \prec q)$, является свободным счетно порожденным упорядоченным группоидом в многообразии, задаваемом тождествами (1)–(7).

Пусть $(A, \cdot)$ – группоид, удовлетворяющий тождествам (1)–(5). В дальнейшем при преобразованиях термов группоида мы, как правило, будем указывать номер используемого тождества. Покажем, что тождества (1)–(5) влекут следующее тождество:

$$((xy)(uv))z = (xy)((uv))z) \ (11).$$

Действительно, $((xy)(uv))z \overset{2}{\cong} ((xy)^2(uv)^2)z \overset{5}{\cong} (xy)^2((uv)^2)z \overset{2}{\cong} (xy)((uv))z$.

Из тождества (11) следует, что подгруппоид $(A^2, \cdot)$, где $A^2 = \{ab : a, b \in A\}$, является полугруппой и, следовательно, скобки, указывающие порядок выполнения действий в произведении элементов из A^2, а также в соответствующих термах при их равносильных преобразованиях, могут быть расставлены произвольным образом или просто опущены. В дальнейшем мы будем пользоваться этим свойством без особых упоминаний.

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$, либо $p \in X$, либо $p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$.*

Доказательство.

Доказательство индукцией по числу вхождений переменных в терм. База индукции очевидна. Пусть $p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$. Если $q = x_k$, то

$x_k p \cong p x_k \cong ((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}))x_k \overset{11}{\cong}$
$((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}}))((x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})x_k) \overset{2}{\cong}$
$((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}}))((x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})^2x_k) \overset{4}{\cong}$
$((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}}))((x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})^2(x_kx_k)) \overset{2}{\cong}$
$((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}}))((x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_kx_k)) \cong$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}})(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_kx_k)$.

Пусть теперь $q \cong (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{i_4})\ldots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$, тогда
$pq \cong ((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}))((x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\ldots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}}))$
$\cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\ldots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. □

Шаг 3. Согласно определению двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in_p, out_p)$ для терма $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$ может быть построен следующим образом:

$$V(p) = \{in_p, out_p, v_1, v_2, \ldots, v_m\};$$

$$E(p) = \{(in_p, i_1, v_1), (in_p, i_2, v_1), (in_p, i_3, v_2), (in_p, i_4, v_2), \ldots, (in_p, i_{2m-1}, v_m), (in_p, i_{2m}, v_m)\}.$$

Заметим, что двухполюсник $G(p)$ получается из объединения двухполюсников $G(x_{i_1}x_{i_2}), G(x_{i_3}x_{i_4}), \ldots, G(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$ посредством отождествления их входов и выходов.

Следующие две леммы непосредственно следует из определения гомоморфизма и описанного выше строения двухполюсников.

Лемма 2. *Пусть $G(x_k) \prec G(p)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$. Тогда*

$$x_{i_1} = x_{i_2} = x_{i_3=} = x_{i_4} = \ldots = x_{i_{2m-1}} = x_{i_{2m}} = x_k.$$

Лемма 3. *Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\ldots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$, $V(p) = \{in_p, out_p, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $V(q) = \{in_q, out_q, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и $f : V(q) \to V(p)$ соответствующий гомоморфизм двухполюсника $G(q)$ в двухполюсник $G(p)$. Предположим, что $f(u_k) = v_l$. Тогда возможен один из следующих случаев:*

a) $x_{j_{2k-1}} = x_{i_{2l-1}}$ и $x_{j_{2k}} = x_{i_{2l}}$;
b) $x_{j_{2k-1}} = x_{i_{2l}}$ и $x_{j_{2k}} = x_{i_{2l-1}}$;
c) $x_{j_{2k-1}} = x_{j_{2k}} = x_{i_{2l-1}}$;
d) $x_{j_{2k-1}} = x_{j_{2k}} = x_{i_{2l}}$.

Лемма 4. *Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\ldots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем $p \cong p(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})$.*

Доказательство. Предположим, что $f(u_k) = v_l$. Согласно лемме 3 возможны следующие случаи:

a) $x_{j_{2k-1}} = x_{i_{2l-1}}$ и $x_{j_{2k}} = x_{i_{2l}}$. Тогда

$p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{2}{\cong}$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})^2\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \cong$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{1}{\cong}$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}}) \overset{1}{\cong} p(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})$.

Случай (b) рассматривается аналогично.

c) $x_{j_{2k-1}} = x_{j_{2k}} = x_{i_{2l-1}}$. Тогда

$p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{3}{\cong}$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots((x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})x_{i_{2l-1}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{2}{\cong}$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots((x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})^2x_{i_{2l-1}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{4}{\cong}$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots((x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})^2(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l-1}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{2}{\cong}$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{1}{\cong}$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}}) \cong p(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})$.

Случай (d) рассматривается аналогично. □

Лемма 5. *Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. Тогда $p \cong pq$.*

Доказательство. Используя лемму 4, получаем
$p \cong p(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}}) \cong \dots \cong p(x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{i_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}}) = pq$.
□

Шаг 4. Легко проверить, что операции $*$ удовлетворяют тождествам (1)–(7). Отсюда следует, что $\Sigma \subset Eq\{*\}$ и $\Sigma^{\leq} \subset Eq\{*, \subset\}$. Таким образом, для доказательства теорем 1,2 достаточно показать, что всякое тождество $p = q$ $(p \leq q)$ из $Eq\{*\}$ $(Eq\{*, \subset\})$ принадлежит Σ $(\Sigma^{\leq})$.

Предположим, что тождество $p \leq q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*, \subset\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [7] имеем $G(p) \prec G(q)$.

Если $p = x_k$, то, используя лемму 2, получаем

$$p = x_k \overset{6}{\prec} x_k^2 \overset{3}{\cong} x_k^2 x_k \overset{4}{\cong} x_k^2 x_k^2 \overset{3}{\cong} \dots \overset{3}{\cong} x_k^2 x_k^2 \dots x_k^2 = q.$$

Если же $q = x_k$, то очевидно, что $p = x_k = q$. Таким образом, согласно лемме 1 можно предположить, что $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$ и $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. Отсюда, используя лемму 5, получаем $p \cong pq \overset{7}{\prec} q^2 \overset{2}{\cong} q$.

Таким образом, во всех возможных случаях тождество $p \leq q$ принадлежит эквациональной теории Σ, что завершает доказательство теоремы 2.

Предположим теперь, что тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из [7], имеем $G(p) \cong G(q)$, то есть $G(p) \prec G(q)$ и $G(q) \prec G(p)$. Если хотя бы один из этих термов принадлежит $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, то, как легко видеть, $p = q$. В противном случае, согласно лемме 5 имеем $p \cong pq$ и $q \cong qp$, откуда $p \cong pq \overset{1}{\cong} qp = q$.

Таким образом, во всех возможных случаях тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории Σ, что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 3 непосредственно вытекает из теоремы 2 и следствия 5 работы [7].

4. Заключение

Сформулируем ряд проблем относительно исследуемых классов группоидов отношений.

Проблема 1. Найти систему элементарных аксиом для классов $R\{*\}$, $R\{*, \subset\}$ и $R\{*, \cup\}$.

Проблема 2. Найти базисы квазитождеств для квазимногообразий, порожденных классами $R\{*\}$, $R\{*, \subset\}$ и $R\{*, \cup\}$. Выяснить, являются ли эти квазимногообразии многообразиями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol 4. P. 73-89.

2. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188-189.

3. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups// Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1-62.

4. Jónsson B. Varieties of relation algebras// Algebra Universalis. 1982. Vol. 54. P. 273-299.

5. Andreka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations// Algebra Universalis. 1994. Vol. 33. P. 516-532.

6. Bredikhin D. A. Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87-92.

7. Бредихин Д. А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями// Изв. вузов. Сер.: Математика. 1993. № 3. С. 23-30.

8. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions//Colloq. Math. Soc. J.Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 111-124.

9. Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with diophantine operations // Siberian Mathematical Journal. 1997. Vol. 38, № 1. P. 23-33.

10. Bredikhin D.A. On algebras of relations with Diophantine operations // Doklady Mathematics. 1998. Vol. 57, № 3. P. 435-436.

11. Бредихин Д. А. О многообразии группоидов бинарных отношений// Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 93-98.

12. Бредихин Д. А. О многообразиях группоидов отношений с диофантовыми операциями// Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 28-34.

13. Bredikhin D. A. On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // Algebra Universalis. 2015. Vol. 73. P. 43-52.

14. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations// Contributions to general Algebras. 1991. Vol. 7. P. 50-70.

15. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. Cylindric Algebras. Amsterdam-London: North-Holland Publishing Company,1971. P. I.: Studies in logic and the foundations of mathematics 508 p.

REFERENCES

1. Tarski, A. 1941, "On the calculus of relations", *J. Symbolic Logic*, vol 4. pp. 73-89.

2. Tarski, A. 1953, "Some methodological results concerning the calculus of relations", *J. Symbolic Logic*, vol 18. pp. 188-189.

3. Schein, B. M. 1970, "Relation algebras and function semigroups", *Semigroup Forum*, vol 1. pp. 1-62.

4. Jónsson, B. 1982, "Varieties of relation algebras", *Algebra Universalis*, vol. 54. pp. 273-299.

5. Andreka, H. & Bredikhin, D. A. 1994, "The equational theory of union-free algebras of relations", *Algebra Universalis*, vol. 33. pp. 516-532.

6. Bredikhin, D. A. 1992, "Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations", *Semigroup Forum*, vol. 44. pp. 87-92.

7. Bredikhin, D. A. 1993, "The equational theory of algebras of relations with positive operations", *Izv. Vuzov. Matem.*, no 3. pp. 23-30 (in Russian).

8. Bredikhin, D. A. 1994, "On relation algebras with general superpositions", *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, vol. 54. pp. 111-124.

9. Bredikhin, D. A. 1997, "On quasi-identities of algebras of relations with diophantine operations", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 38, no 1. P. 23-33.

10. Bredikhin, D. A. 1998, "On algebras of relations with Diophantine operations", *Doklady Mathematics*, vol. 57, no. 3. pp. 435-436.

11. Bredikhin, D. A. 2013, "On varieties of groupoids of binary relations", *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, iss. 1, pt. 1. pp. 13-21 (in Russian).

12. Bredikhin, D. A. 2013, "On varieties of groupoids of relations with Diophantine Operations", *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, iss. 1, pt. 2,. pp. 28-34 (in Russian).

13. Bredikhin, D. A. 2015, "On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrifcation", *Algebra Universalis*, vol. 73. pp. 43-52. DOI: 10.1007/s00012-014-0313-0.

14. Böner, P., Pöschel, F. R. 1991, "Clones of operations on binary relations", *Contributions to general algebras*, vol. 7, pp. 50-70.

15. Henkin L., Monk J. D. and Tarski A. 1971, *Cylindric Algebras, Part I*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London.