ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-15-25

Симметризованные многочлены в задаче оценки меры иррациональности числа $\ln 3$[1]

Бондарева Инна Васильевна — аналитик данных, Брянский государственный технический университет, ООО "АйТи Про".
e-mail: innagorda@ya.ru
Лучин Михаил Юрьевич — Брянский государственный технический университет.
e-mail: m.y.luchin@mail.ru
Салихов Владислав Хасанович — профессор кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет.
e-mail: svdh@rambler.ru

Аннотация

Оценка меры иррациональности различных трансцендентных чисел является одним из основыных направлений теории диофантовых приближений.

В настоящее время разработан целый ряд методов, позволяющих получать подобные оценки для значений аналитических функций. Наиболее эффективным оказался метод, связанный с построением различных интегральных конструкций; одним из первых подобных построений является классическое интугральное представление гипергеометрической функции Гаусса.

Оценки снизу меры иррациональности логарифмов рациональных чисел рассматривались многими зарубежными авторами: А. Бейкер и Д. Вустольц [4], А. Хеймонен, Т. Матала-ахо, К. Ваананен [5], К. Ву [6], Д. Рин и П. Тоффин [7]. В своих работах они применяли различные интегральные конструкции, дающие малые линейные формы от логарифмов и других чисел, вычисляли асимптотику интегралов и коэффициентов линейных форм с помощью метода перевала, теоремы Лапласа, оценивали знаменатель коэффициентов линейных форм с использованием различных схем "сокращения простых чисел". Обзор некоторых методов из теории диофантовых приближений логарифмов рациональных чисел того времени был представлен в 2004 году в статье В. В. Зудилина [8].

Затем В. Х. Салихов в работе [3], основываясь на тех же асимптотических методах, но использовав новый вид интегральной конструкции, обладающей свойством симметрии, значительно улучшил оценку меры иррациональности числа $\ln 3$. Впоследствии В. Х. Салихову, благодаря использованию уже комплексного симметризованного интеграла, удалось улучшить оценку меры иррациональности числа π [15]. В дальнейшем данный метод (применительно к диофантовым приближениям логарифмов рациональных чисел) получил развитие в работах его учеников: Е. С. Золотухиной [10, 11], М. Ю. Лучина [12, 13], Е. Б. Томашевской [14]. Это привело к улучшению оценок мер иррациональности целого ряда чисел:

$\mu(\log(5/3)) \leqslant 5.512\ldots$ [14], $\mu(\log(8/5)) < 5.9897$ [12], $\mu(\log(7/5)) \leqslant 4.865\ldots$ [14], $\mu(\log(9/7)) \leqslant 3.6455\ldots$ [10], $\mu(\log(7/4)) < 8.1004$ [13].

С помощью интегральной конструкции, основанной на симметризованных многочленах, получена новая оценка меры иррациональности числа $\ln 3$. Предыдущий результат принадлежал К. Ву и Л. Вангу и был установлен в 2014 г.

Улучшение оценки связано с добавлением к симметризованным многочленам, использованным в интегральной конструкции К. Ву и Л. Ванга, специального квадратного симметризованного многочлена.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-01-00296-а).

Ключевые слова: диофантовы приближения, мера иррациональности, симметризованные многочлены.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

И. В. Бондарева, М. Ю. Лучин, В. Х. Салихов. Симметризованные многочлены в задаче оценки меры иррациональности числа $\ln 3$ // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 15–25.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-15-25

Symmetrized polynomials in a problem of estimating of the irrationality measure of number $\ln 3$

Bondareva Inna Vasilievna — data analyst, Bryansk State Technical University, "IT Pro"LLC.
e-mail: innagorda@ya.ru
Luchin Mikhail Yurievich — Bryansk State Technical University.
e-mail: m.y.luchin@mail.ru
Salikhov Vladislav Khasanovich — Professor of the Department of Higher Mathematics, Bryansk State Technical University.
e-mail: svdh@rambler.ru

Abstract

An estimate of the irrationality measure of various transcendental numbers is one of the directions in the theory of Diophantine approximations foundations.

Nowadays there is a range of methods which make possible to obtain similar estimates for the values of analytic functions. The most effective method is the adding of various integral constructions; one of the first early constructions is the classical intuitive representation of the Gauss hypergeometric function.

Lower estimates of the irrationality measure of rational numbers logarithms were considered by many foreign authors: A. Baker and G. Wüstholz [4], A. Heimonen, T. Matala-aho, K. Väänänen [5], Q. Wu [6], G. Rhin and P. Toffin [7]. In their works they used various integral constructions, giving small linear forms from logarithms and other numbers, calculated asymptotic of integrals and coefficients of the linear forms using the saddle point method, Laplace theorem, evaluated the denominator coefficients of the linear forms using various schemes "reduction of prime numbers". Review of some methods from the theory of diophantine approximation of rational numbers logarithms at that time was introduced in 2004 by V. Zudilin [8].

Then V. Kh. Salikhov in [3] considerably improved estimate of the irrationality measure of $\ln 3$, based on the same asymptotic methods, but used a new type of integral construction, which has property of summetry. Subsequently, V. Kh. Salikhov due to usage of already complex symmetrized integral improved estimate of the irrationality measures of π [15]. In the future, this method (as applied to diophantine approximation of logarithms of rational numbers) was developed by his pupils: E. S. Zolotuhina [10, 11], M. Yu. Luchin [12, 13], E. B. Tomashevskaya [14]. It led to improvement of the irrationality measure estimates for the following numbers:

$\mu(\log(5/3)) \leqslant 5.512\ldots$ [14], $\mu(\log(8/5)) < 5.9897$ [12], $\mu(\log(7/5)) \leqslant 4.865\ldots$ [14], $\mu(\log(9/7)) \leqslant 3.6455\ldots$ [10], $\mu(\log(7/4)) < 8.1004$ [13].

In this paper due to usage the symmetrized real integral we obtain a new estimate of the irrationality measure of $\ln 3$. The previous irrationality measure estimate of $\ln 3$ was received in 2014 by Q. Wu and L. Wang [1].

The estimate improvement had resulted from the addition of a special square symmetrized polynomial to the symmetrized polynomials used in the integral construction of K. Wu and L. Wang.

Keywords: diophantine approximations, irrationality measure, symmetrized polynomials.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

I. V. Bondareva, M. Y. Luchin, V. H. Salikhov, 2018, "Symmetrized polynomials in a problem of estimating of the irrationality measure of number $\ln 3$ *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 15–25.

1. Введение

Мерой иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань множества чисел α, для которых, начиная с некоторого положительного $q \geqslant q_0(\alpha)$, выполняется неравенство

$$|\gamma - \frac{p}{q}| > q^{-\alpha}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

В работе [1] была получена оценка $\mu(\ln 3) \leqslant 5.1163051$. Отметим, что в работе [2] Д. Рин получил оценку $\mu(\ln 3) \leqslant 8.616$, а в работе [3] В. Х. Салихов с помощью симметризованных многочленов улучшил результат Д. Рина: $\mu(\ln 3) \leqslant 5.125$.

В настоящей работе доказан следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $h_1, h_2, h \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|h_1|, |h_2|)$, $H \geqslant H_0$. Тогда*

$$|h_1 \ln 2 + h_2 \ln 3 + h| > H^{-\mu},$$

где $\mu = 4.116201$.

Следствие 1. *Справедлива оценка*

$$\mu(\ln 3) \leqslant 5.116201.$$

2. Доказательство теоремы 1

Пусть далее $d = 35$, $t = (x-d)^2$, $A \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{Z}^+$, $(A, B) = 1$ в случае $B \neq 0$,

$$P = At - B = A_2 x^2 + A_1 x + A_0, \tag{1}$$

где $A_2 = A$, $A_1 = -2Ad$, $A_0 = Ad^2 - B$.

Определим для несократимой дроби a/b, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, показатель $\Upsilon_p = \Upsilon_p(a/b) \in \mathbb{Z}$ простого числа p так, что

$$\frac{a}{b} = p^{\Upsilon_p} \frac{a_1}{b_1},$$

где $a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \in \mathbb{N}$, $(a_1, p) = (b_1, p) = 1$.

Пусть, наконец, для аналитической в точке $x = 0$ функции $f(x)$

$$D_0(f(x)) = f(0), \quad D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Определим для многочлена P из (1)

$$\begin{aligned} &\Upsilon_p(P) = \min(2, \Upsilon_p(A_0)), \quad \text{где } p \in \{5; 7\}, \\ &\Upsilon_3(P) = \min(1, \Upsilon_3(A_0)), \\ &\Upsilon_2(P) = \min(4, \Upsilon_2(A_0)). \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \leqslant 2m$. Тогда выполняются следующие оценки*

$$\Upsilon_p(D_N(P^m)) \geqslant m\Upsilon_p(P) - N, \quad p \in \{3; 5; 7\}, \tag{3}$$

$$\Upsilon_2(D_N(P^m)) \geqslant m\Upsilon_p(P) - 3N. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть далее $\overline{m} = (m_0, m_1, m_2) \in (\mathbb{Z}^+)^3$, $|\overline{m}| = m_0 + m_1 + m_2$,

$$\gamma(\overline{m}) = \frac{|\overline{m}|}{m_0! m_1! m_2!} \in \mathbb{N}.$$

Тогда из (1) имеем

$$P^m = \sum_{|\overline{m}|=m} \gamma(\overline{m}) A_2^{m_2} A_1^{m_1} A_0^{m_0} x^{m_1+2m_2},$$

$$D_N(P^m) = \sum_{|\overline{m}|=m, m_1+2m_2=N} \gamma(\overline{m}) A_0^{m_0} (2d)^{m_1} A_3, A_3 = (-1)^{m_1} A^{m_1+m_2} \in \mathbb{Z}.$$

Для $p \in \{5; 7\}$ получим

$$\Upsilon_p(D_N(P^m)) \geqslant m_0 \Upsilon_p(A_0) + m_1 \geqslant (m_0 + m_1 + m_2)\Upsilon_p(P) - (m_1 + 2m_2) = m\Upsilon_p(P) - N,$$

т.к. из (2) имеем $\Upsilon_p(A_0) \geqslant \Upsilon_p(P)$, $\Upsilon_p(P) \leqslant 2$.

Аналогично

$$\Upsilon_3\left(D_N^{P^m}\right) \geqslant m_0 \Upsilon_3(A_0) \geqslant (m_0 + m_1 + m_2)\Upsilon_3(P) - (m_1 + 2m_2) = m\Upsilon_3(P) - N,$$

т.к. из (2) имеем $\Upsilon_3(A_0) \geq \Upsilon_3(P)$, $\Upsilon_3(P) \leq 1$, и неравенства (3) доказаны.

Имеем далее

$$\Upsilon_2(D_N^{P^m}) \geqslant m_0 \Upsilon_2(A_0) + m_1 \geqslant (m_0, m_1, m_2)\Upsilon_2(P) - 3(m_1 + 2m_2) = m\Upsilon_2(P) - 3N,$$

т.к. из (2) имеем $\Upsilon_2(A_0) \geq \Upsilon_2(P)$, $\Upsilon_2(P) \leq 4$, и неравенство (4), а вместе с ним и лемма 1 доказаны.

Пусть $A, B, C \in \mathbb{N}$, $(A, B, C) = 1$,

$$P = At^2 - Bt + C = \sum_{i=0}^{4} A_i x^i, \tag{5}$$

где $A_4 = A$, $A_3 = -4dA$, $A_2 = 6d^2A - B$, $A_1 = -4d^3A + 2dB$, $A_0 = d^4A - d^2B + C$.

Определим для многочлена (5) показатели

$$\begin{aligned} \Upsilon_p(P) &= \min(4, \Upsilon_p(A_0), \Upsilon_p(A_1) + 1, \Upsilon_p(A_2) + 2), \quad p \in \{5; 7\}, \\ \Upsilon_3(P) &= \min(2, \Upsilon_3(A_0), \Upsilon_3(A_1) + 1), \\ \Upsilon_2(P) &= \min(8, \Upsilon_2(A_0), \Upsilon_2(A_1) + 3, \Upsilon_2(A_2) + 6). \end{aligned} \tag{6}$$

Лемма 2. *Для многочлена (5) выполнены оценки (3) и (4), где $N \leq 4m$, а показатели $\Upsilon_p(P)$ определены равенствами (6).*

Доказательство. Пусть далее

$$\overline{m} = (m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) \in (\mathbb{Z}^+)^5, \quad |\overline{m}| = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

$$\gamma(\overline{m}) = \frac{|\overline{m}|}{m_0! m_1! m_2! m_3! m_4!} \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$P^m = \sum_{|\overline{m}|=m} \gamma(\overline{m}) \prod_{i=0}^{4} (A_i x^i)^{m_i},$$

$$D_N(P^m) = \sum_{|\overline{m}|=m, \sum_{i=1}^{4} i m_i = N} \gamma(|\overline{m}|) \prod A_i^{m_i}.$$

Рассмотрим ряд случаев

1. $p \in \{5; 7\}$.

   Имеем
   $$\Upsilon_p(D_N(P^m)) \geq \sum_{i=0}^{4} m_i \Upsilon_p(A_i) \geq m\Upsilon_p(P) - \sum_{i=0}^{4} i m_i = m\Upsilon_p(P) - N,$$
   т.к. $\Upsilon_p(A_i) + i \geq \Upsilon_p(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$. Для $i \in \{0; 1; 2\}$ это следует из определения (6), при $i = 3$ $\Upsilon_p(A_3) + 3 \geq 1 + 3 \geq \Upsilon_p(P)$, при $i = 4$ $\Upsilon_p(A_4) + 4 \geq 4 \geq \Upsilon_p(P)$

2. $p = 3$.

   В этом случае
   $$\Upsilon_3(D_N(P^m)) \geq \sum_{i=0}^{4} m_i \Upsilon_3(A_i) \geq m\Upsilon_3(P) - N,$$
   т.к. снова $\Upsilon_3(A_i) + i \geq \Upsilon_3(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$. Для $i \in \{0; 1\}$ это неравенство следует из (6), а для $i \in \{2; 3; 4\}$ $\Upsilon_3(A_i) + i \geq 2 \geq \Upsilon_3(P)$, и неравенства (3) для многочлена (5) доказаны.

3. $p = 2$.

   Здесь
   $$\Upsilon_2(D_N(P^m)) \geq \sum_{i=0}^{4} m_i \Upsilon_2(A_i) \geq m\Upsilon_2(P) - 3\sum_{i=0}^{4} i m_i = m\Upsilon_2(P) - 3N,$$
   т.к. $\Upsilon_2(A_i) + 3i \geq \Upsilon_2(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$. Для $i \in \{0; 1; 2\}$ это следует из определения (6), а при $i \in \{3; 4\}$ $\Upsilon_2(A_i) + 3i \geq 9 > \Upsilon_2(P)$, и неравенство (4), а вместе с ним и лемма 2 доказаны.

При доказательстве теоремы 1 мы будем применять 7 многочленов вида (1), а также один многочлен вида (5), а именно

$$P_1(x) = (x - 28)(x - 42) = t - 49;$$
$$P_2(x) = (x - 30)(x - 40) = t - 25;$$
$$P_3(x) = (x - 35)^2 = t;$$
$$P_4(x) = 3x^2 - 210x + 3640 = 3t - 35;$$
$$P_5(x) = 71x^2 - 4970x + 86240 = 71t - 735;$$
$$P_6(x) = (11x - 420)(11x - 350) = 121t - 1225;$$
$$P_7(x) = 113x^2 - 7910x + 137200 = 113t - 1225;$$
$$P_8(x) = 61t^2 - 3066t + 25725, t = (x - 35)^2.$$

Положим $\{p_1; p_2; p_3; p_4\} = \{7; 5; 3; 2\}$, для выписанных многочленов $P_k(x)$, $k = 1, ..., 8$, обозначим
$$\prod_k = \prod_{j=1}^{4} p_j^{\Upsilon_{p_j}(P_k)}$$
.

Из определений показателей (2) и (6) имеем

$$\begin{gathered}\prod_1 = 7^2 * 3^1 * 2^3; \quad \prod_2 = 5^2 * 3^1 * 2^4; \quad \prod_3 = 7^2 * 5^2; \quad \prod_4 = 7^1 * 5^1 * 2^3; \\ \prod_5 = 7^2 * 5^1 * 2^4; \quad \prod_6 = 7^2 * 5^2 * 3^1 * 2^3; \quad \prod_7 = 7^2 * 5^2 * 2^4; \quad \prod_8 = 7^3 * 5^2 * 2^8;\end{gathered} \tag{7}$$

Пусть

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 0.499408; & \alpha_2 = 0.499623; & \alpha_3 = 0.497422; & \alpha_4 = 0.000651; \\ \alpha_5 = 0.000327; & \alpha_6 = 0.000969; & \alpha_7 = 0.001394; & \alpha_8 = 0.000103; \end{array} \tag{8}$$

Рассмотрим рациональную функцию

$$R_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^{8} P_k^{\alpha_k n}}{x^{n+1}(70-x)^{n+1}}, \tag{9}$$

где $n \in \mathbb{N}$, n кратно 10^6, а тогда все $\alpha_k n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что в работе [3] рассматривались лишь многочлены $P_1(x), P_2(x)$ и $P_3(x)$, а в работе [1] к этим многочленам были добавлены $P_k(x)$, $k = 4; 5; 6; 7$. Наконец, в нашей конструкции ко всем этим многочленам добавлен квадратичный многочлен $P_8(x)$.

Определим следующие интегралы

$$\omega_1 = \int_{35}^{40} R_n(x)dx, \quad \omega_2 = \int_{40}^{42} R_n(x)dx. \tag{10}$$

Функция (9) симметрична относительно точки $x = 35$. Следовательно, её разложение в сумму простейших дробей имеет вид

$$R_n(x) = Q_{n-2}(x) + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{a_i}{x^i} + \frac{a_i}{(70-x)^i} \right), \tag{11}$$

где все $a_i \in \mathbb{Q}$, $Q_{n-2}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg Q_{n-2}(x) = 2n(\alpha_1 + ... + \alpha_7) + 4n\alpha_8 - 2n - 2 = n - 2$.

Следующая лемма аналогична лемме 1 работы [3].

Лемма 3. *Для всех $i = 1, ..., n+1$ имеет место представление*

$$a_i = 7^{i-2} * 5^{i-2} * 3^{i-1} * 2^{3i-4-\alpha_n} M_i, \tag{12}$$

где $M_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 0.490716$.

Доказательство. Пусть $\overline{m} = (m_1, ..., m_9) \in (\mathbb{Z}^+)^9$, $|\overline{m}| = m_1 + ... + m_9$. Тогда из (9) и (11) получим

$$a_i = D_{n+1-i}(R_n(x)x^{n+1}) = \sum_{|\overline{m}|=n+1-i} \prod_{k=1}^{8} D_{m_k}\left(P_k(x)^{\alpha_k n}\right) D_{m_9}\left((70-x)^{-n-1}\right).$$

Имеем

$$D_{m_9}\left((70-x)^{-n-1}\right) = \binom{n+m_9}{m_9} 70^{-n-m_9-1}.$$

Как в лемме 1 работы [3], необходимо оценить снизу показатели $\gamma_{p_j}(a_i)$, $p_j \in \{7; 5; 3; 2\}$. Мы будем применять леммы 1, 2, а также равенства (7) и (8). Имеем последовательно

$$\Upsilon_7(a_i) \geqslant 2\alpha_1 n - m_1 + 2\alpha_3 n - m_3 + \alpha_4 n - m_4 + 2\alpha_5 n - m_5 + 2\alpha_6 n - m_6 + 2\alpha_7 n - m_7 + 3\alpha_8 n -$$
$$- m_8 - n - m_9 - 1 \geqslant n(2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8) - n - 1 - (n+1-i) = i - 2;$$
$$\Upsilon_5(a_i) \geqslant 2\alpha_2 n - m_2 + 2\alpha_3 n - m_3 + \alpha_4 n - m_4 + \alpha_5 n - m_5 + 2\alpha_6 n - m_6 + 2\alpha_7 n - m_7 + 2\alpha_8 n -$$
$$- m_8 - n - m_9 - 1 \geqslant n(2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + 2\alpha_8) - n - 1 - (n+1-i) = i - 2;$$
$$\Upsilon_3(a_i) \geqslant \alpha_1 n - m_1 + \alpha_2 n - m_2 + \alpha_6 n - m_6 \geqslant n(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6) - (n+1-i) = i - 1;$$
$$\Upsilon_2(a_i) \geqslant 3\alpha_1 n - 3m_1 + 4\alpha_2 n - 3m_2 + 3\alpha_4 n - 3m_4 + 4\alpha_5 n - 3m_5 + 3\alpha_6 n - 3m_6 + 4\alpha_7 n - 3m_7 +$$
$$+ 8\alpha_8 n - 3m_8 - n - m_9 - 1 \geqslant n(3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7 + 8\alpha_8) - n - 1 -$$
$$- 3(n+1-i) = -\alpha n + 3i - 4.$$

Лемма доказана.

Обозначим Δ_n =НОК$(1, 2, ..., n)$, $C_n = 70{*}2^{\alpha * n}{*}\Delta_n$, $\varepsilon_n^{(1)} = C_n\omega_1$, $\varepsilon_n^{(2)} = C_n\omega_2$, где интегралы ω_1 и ω_2 определены в равенствах (10).

Лемма 4. *Справедливы представления вида*

$$\varepsilon_n^{(1)} = r_n \ln\frac{4}{3} - p_n^{(1)}, \quad \varepsilon_n^{(2)} = r_n\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3}\right) - p_n^{(2)},$$

где $r_n = C_n a_1 \in \mathbb{Z}$, $p_n^{(1)} \in \mathbb{Z}$, $p_n^{(2)} \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Необходимо проинтегрировать тождество (11) и воспользоваться леммой 3. Имеем из (10) - (12)

$$\varepsilon_n^{(1)} = C_n\left(\int_{35}^{40} Q_{n-2}(x)dx + a_1 \ln\frac{x}{70-x}\bigg|_{35}^{40} - \sum_{i=2}^{n+1}\frac{a_i}{i-1}\left(\frac{1}{40^{i-1}} - \frac{1}{30^{i-1}}\right)\right) =$$

$$= C_n a_1 \ln\frac{4}{3} - p_n^{(1)}, \quad p_n^{(1)} \in \mathbb{Z}$$

$$\varepsilon_n^{(2)} = C_n\left(\int_{40}^{42} Q_{n-2}(x)dx + a_1 \ln\frac{x}{70-x}\bigg|_{40}^{42} - \sum_{i=2}^{n+1}\frac{a_i}{i-1}\left(\frac{1}{42^{i-1}} - \frac{1}{40^{i-1}} - \frac{1}{28^{i-1}} + \frac{1}{30^{i-1}}\right)\right) =$$

$$= C_n a_1\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3}\right) - p_n^{(2)}, \quad p_n^{(2)} \in \mathbb{Z}.$$

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1, как и в работе [3], нам будет необходима следующая лемма, доказанная М. Хата [лемма 2.1].

Лемма 5. *Пусть* $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n^{(1)} = r_n\Theta_1 - p_n^{(1)}$, $\varepsilon_n^{(2)} = r_n\Theta_2 - p_n^{(2)}$, *где* $r_n, p_n^{(1)}, p_n^{(2)} \in \mathbb{Z}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\varepsilon_n^{(1)}\right| = -\tau_1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\varepsilon_n^{(2)}\right| = -\tau_2,$$

где $\tau > 0, \tau_2 > 0, \tau_1 \neq \tau_2$.

Пусть далее $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\ln|r_n| \leqslant \lambda;$$

$L_1, L_2, L \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|L_1|, |L_2|)$, $\mu > \lambda/\tau$, $H \geqslant H_0(\mu)$.

Тогда

$$|L_1\Theta_1 + L_2\Theta_2 + L| \geqslant \frac{1}{H^\mu}.$$

В рассматриваемом нами случае $\Theta_1 = \ln\frac{4}{3}$, $\Theta_2 = \ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3} = \ln\frac{9}{8}$. Асимптотику интегралов (10) несложно вычислить с помощью теоремы Лапласа, а асимптотику коэффициента a_1 из разложения (11) - с помощью метода перевала.

Имеем $x(70 - x) = 1225 - t$. Обозначим (см. (9))

$$g(t) = \frac{\prod_{k=1}^{8} P_k^{\alpha_k}}{(1225 - t)},$$

где все многочлены P_k выражены через переменную $t = (x - 35)^2$.

Необходимо найти нули функции $g'(t)/g(t)$. Укажем лишь нули, с помощью которых выражаются константы τ_1, τ_2, λ: $t_1 = 10.50416113$; $t_2 = 38.91332129$; $t_3 = 3625, 441321$.

Стандартным образом

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\varDelta_n = 1.$$

Поэтому

$$-\tau_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|C_n\omega_1| = \alpha\ln 2 + 1 + \ln|g(t_1)| = -1.422145$$
$$-\tau_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|C_n\omega_2| = \alpha\ln 2 + 1 + \ln|g(t_2)| = -1.422147$$
$$\tau = \min(\tau_1,\tau_2) = 1.422145$$
$$\lambda \leqslant \alpha\ln 2 + 1 + \ln|g(t_3)| = 5.853833$$
$$\frac{\lambda}{\tau} = 4.116201$$

Поэтому по лемме 5

$$|L_1\ln\frac{4}{3} + L_2\ln\frac{9}{8} + L| > H^{\mu},$$

где $L_1, L_2, L \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|L_1|, |L_2|)$, $\mu > \lambda/\tau$, $\mu = 4.116201$, $H \geqslant H_0$.

Остается отметить, что

$$L_1\ln\frac{4}{3} + L_2\ln\frac{9}{8} = (2L_1 - 3L_2)\ln 2 + (2L_2 - L_1)\ln 3 \equiv h_1\ln 2 + h_2\ln_3,$$

где $L_1 = 2h_1 + 3h_2$, $L_2 = h_1 + 2h_2$, и теорема 1 доказана.

3. Заключение

В данной работе была доказана оценка меры иррациональности числа $\ln 3$:

$$\mu(\ln 3) \leqslant 5.116201,$$

которая несколько лучше предыдущего результата $\mu(\ln 3) \leqslant 5.1163051$, опубликованного в 2014 году К. Ву и Л. Вангом.

Улучшение достигнуто за счёт добавления симметризованного квадратного многочлена к соответствующей интегральной конструкции, основанной на симметризованных многочленах первой степени.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu Q., Wang L. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of Number Theory. 2014. Vol. 142. P. 264-273.

2. Rhin G. Approximants de Pade et mesures effectives d' irrationalite // Seminaire de Theorie des Nombres, Paris 1985-1986. Boston: Birkhauser, 1987. P. 155-164. (Progress i Mathematics. Vol. 71.)

3. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады АН РФ. 2007. Т. 417, № 6. С. 753-755.

4. Baker A., Wüstolz G. Logarithmic forms and group varieties // J. Reine Angew. Math. 1993. Vol. 442. P. 19-62.

5. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. № 1. P. 183-202.

6. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // Math. Comput. 2002. Vol. 72, № 242. P. 901-911.

7. Rhin G., Toffin P. Approximants de Padé simultanés de logaritmes // J. Number Theory. 1986. Vol. 24. P. 284-297.

8. Зудилин В. В. Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, № 2. С. 49-65.

9. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Математические заметки. 2010. Т. 88, № 4. С. 583-593.

10. Золотухина Е. С. Диофантовы приближения некоторых логарифмов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2009. 100 с.

11. Сальникова Е. С. Приближения некоторых логарифмов числами из полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ // Фундамент. и приклад. математика. 2010. Т. 16, № 6. С. 139-155.

12. Лучин М. Ю. О диофантовых приближениях некоторых логарифмов // Вестник Брян. гос. ун-та. 2012. № 4 (2). С. 22-28.

13. Лучин М. Ю. Оценка меры иррациональности числа $\ln\frac{7}{4}$ // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, № 2. С. 123-131. то же [Электронный ресурс].

    URL: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/82

14. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений функции $\log x$ // Фундамент. и приклад. математика. 2010. Т. 16, № 6. С. 157-166.

15. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII, № 4. P. 335-349.

REFERENCES

1. Wu, Q. & Wang, L. 2014, "On the irrationality measure of $\log 3$", *Journal of Number Theory.*, vol. 142, pp. 264-273.

2. Rhin, G. 1987, "Approximants de Pade et mesures effectives d' irrationalite, Seminaire de Theorie des Nombres, Paris 1985-1986", *Progress i Math., Boston: Birkhauser.*, no. 71, pp. 155-164.

3. Salikhov, V. H. 2007, "On the measure of irrationality $\ln 3$", *Doklady Mathematics*, vol. 47, no. 6, pp. 753-755.

4. Baker, A. Wüstolz G. 1993, "Logarithmic forms and group varieties", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 442, pp. 19-62.

5. Heimonen, A. & Matala-aho, T. Väänänen K. 1993, "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", *Manuscripta Math.*, vol. 81, no. 1, pp. 183-202.

6. Wu, Q. 2002, "On the linear independence measure of logarithms of rational numbers" ,*Math. Comput.*, vol. 72, no. 242, pp. 901-911.

7. Rhin, G. & Toffin, P. 1986, “Approximants de Padé simultanés de logaritmes“, *J. Number Theory.*, vol. 24, pp. 284-297.

8. Zudilin, V. V. 2004, “An essay on irrationality measures of π and other logarithms“, *CHebyshevskij sbornik*, vol. 5, no. 2, pp. 49-65.

9. Salikhov, V. H. 2010, “On the measure of irrationality of a number π“, *Mathematical Notes*, vol. 88, no. 4, pp. 583-593.

10. Zolotukhina, E. S. 2009, “Diophantine approximations of some logarithms: dis. kand. fiz.-mat. nauk“, Bryansk, 100 p.

11. Sal’nikova, E. S. 2010, “Approximations of some logarithms by numbers from fields $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$“, *Fundam. i prikl. matematika*, vol. 16, no. 6, pp. 139-155.

12. Luchin, M. Y. 2012, “On Diophantine approximations of some logarithms “ *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* , no. 4 (2), pp. 22-28.

13. Luchin, M. Y. 2013, “Measure of irrationality of a number $\ln\frac{7}{4}$“ *CHebyshevskij sbornik* , vol. 14, no. 2, pp. 123-131.

14. Tomashevskaya, E. B. 2010, “On Diophantine approximations of function values $\log x$“ *Fundam. i prikl. matematika* , vol. 16, no. 6, pp. 157-166.

15. Hata, M. 1993, “Rational approximations to π and some other numbers“, *Acta Arith.*, vol. LXIII, no. 4, pp. 335-349.