ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511.524

КОРОТКИЕ СУММЫ Г. ВЕЙЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

З. Х. Рахмонов, Н. Н. Назрубллоев,
А. О. Рахимов (г. Душанбе)

Аннотация

В множестве точек первого класса изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

и найдена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде суммы 33 пятых степеней натуральных чисел x_i, с условиями $\left| x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}} \right| \leqslant H$, $H \geqslant N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}$.

Ключевые слова: короткая тригонометрическая сумма Г. Вейля, почти равные слагаемые, круговой метод, проблема Варинга.

Библиография: 17 названий.

SHORT WEYL SUMS AND THEIR APPLICATIONS

Z. Kh. Rakhmonov, N. N. Nazrubloev,
A. O. Rakhimov (Dushanbe)

Abstract

We shall study the behavior of short Weyl sums of the form

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n)$$

on major arcs and obtain an asymptotic formula for the number of representations of a sufficiently large positive integer N as a sum of 33 fifth powers of positive integers x_i, that satisfy $\left| x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}} \right| \leqslant H$, $H \geqslant N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}$.

Keywords: Short Weyl sums, Almost equal summands, Circle metods, Waring's problem.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Р. Вон [1], изучая суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha, x) = \sum_{m \leqslant x} e\left(\alpha m^n\right), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad q \leqslant \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau},$$

в множестве точек первого класса, воспользовавшись оценкой

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n + bk}{q}\right) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(b, q), \tag{1}$$

принадлежащей Хуа Ло-кену [2], методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{S(a, q)}{q} \int_0^x e\left(\lambda t^n\right) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(1 + x^n|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad S(a, q) = S_0(a, q),$$

а при выполнении условия

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{x\ S(a, q)}{q} \int_0^1 e\left(\lambda t^n\right) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

Воспользовавшись этими оценками, он доказал [3] асимптотическую формулу в проблеме Варинга для восьми кубов.

Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n), \qquad \sqrt{x} \leqslant y < \frac{x}{\ln x},$$

получающиеся из $T(\alpha, x)$ заменой условия $m \leqslant x$ на условие $x - y < m \leq x$, в множестве точек первого класса при $n = 2, 3, 4$ были исследованы в работах [4, 5, 6, 7]. Эти результаты нашли применение при выводе асимптотических формул с почти равными слагаемыми в проблеме Варинга (для кубов и четвертых степеней) в [8, 9] и кубической задаче Эстермана в [7]. Затем при произвольном фиксированном n сумма $T(\alpha, x, y)$ была изучена в работах [10, 11]. Основным результатом этой работы является упрощение доказательства и уточнение основной теоремы работы [11], а также вывод асимптотической формулы в проблеме Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми.

Обозначения. $N > N_0$ – натуральное число, $\varepsilon-$произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $\mathscr{L} = \ln N$,

$$S(a, q) = \sum_{m=1}^{q} e\left(\frac{am^n}{q}\right), \qquad \gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e(\lambda(x - y/2 + yu)^n) du.$$

Теорема 1. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ *и* $\lambda \geqslant 0$, *тогда при* $\{n\lambda x^{n-1}\} \leqslant \frac{1}{2q}$, *имеет место формула*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a,q)}{q}T(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ *имеет место оценка*

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n}(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 1. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, *тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q}S(a,q)\gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Следствие 2. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, *тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha, x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}}q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}}\right).$$

Следствия 1 и 2 являются обобщением вышеуказанных результатов Р. Вона для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha, x, y)$.

Теорема 2. *Для числа* $J(N,H)$ *представлений* N *суммою* 33 *пятых степеней чисел* x_i, $i = 1, 2, \ldots, 33$ *с условиями* $\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \leqslant H$, *при* $H \geqslant N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}$ *справедлива асимптотическая формула:*

$$J(N,H) = \frac{B\mathfrak{S}(N)H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}} + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right),$$

где $\mathfrak{S}(N)$ *– особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное,* B *– абсолютная положительная постоянная, которая определяется соотношением*

$$B = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\cdot 32!}\sum_{k=0}^{16}(-1)^k C_{33}^k(33-2k)^{32}.$$

Следствие 3. *Существует такое* N_0, *что каждое натуральное число* $N > N_0$ *представимо в виде суммы* 33 *пятых степеней почти равных чисел* x_i:

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \leqslant N^{1-\frac{1}{340}+\varepsilon}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 33.$$

2. Известные леммы

Лемма 1. [13].*Пусть x и y – натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leq 0,01x$, тогда при $n = 5$ имеет место оценка*

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{32}\, d\alpha \ll y^{27+\varepsilon}.$$

Лемма 2. [14]. *Пусть $x \geqslant x_0 > 0$, $y_0 < y \leqslant 0,01x$, α – вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1.$$

Тогда при $n = 5$ справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y^4} + \frac{q}{y^5}\right)^{\frac{1}{16}}.$$

3. Доказательство теоремы 1

Пользуясь ортогональным свойством полной линейной рациональной тригонометрической суммы, находим

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{ak^n}{q}\right) \sum_{\substack{x-y<m\leq x\\ m\equiv k(mod q)}} e(\lambda m^n) = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} T_b(\lambda; x, y) S_b(a, q), \qquad (2)$$

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e\left(\lambda m^n - \frac{bm}{q}\right),\ S_b(a, q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n + bk}{q}\right).$$

$$R(\alpha; x, y) = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} T_b(\lambda; x, y) S_b(a, q). \qquad (3)$$

Имея в виду, что $n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\}$ – целое число, представим $T_b(\lambda; x, y)$ в виде

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e\left(f(m, b)\right),\ f(u, b) = \lambda u^n - (n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\})u - \frac{bu}{q}.$$

Пользуясь монотонностью $f'(u, b)$, условием $\tau \geqslant 2n(n-1)x^{n-2}y$ и неравенством

$$W = \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k} y^k \geqslant 0, \quad n \geqslant 3, \quad 3x \geqslant (n-3)y,$$

имеем

$$\begin{aligned} f'(u,b) \leqslant & f'(x,b) = \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < 1, \\ f'(u,b) \geqslant & f'(x-y,b) = -n(n-1)\lambda x^{n-2}y + n\lambda W + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} \geqslant \\ & \geqslant -n(n-1)\lambda x^{n-2}y - \frac{b}{q} \geqslant -\frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} - \frac{b}{q} \geqslant -1 + \frac{1}{2q}. \end{aligned}$$

Поэтому, применяя к сумме $T_b(\lambda; x, y)$ формулу суммирования Пуассона ([15], лемма 6) при $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 0,5$, получим

$$\begin{aligned} & T_b(\lambda; x, y) = I(-1,b) + I(0,b) + I(1,b) + O(1), \qquad (4) \\ & I(h,b) = \int_{x-y}^{x} e(f_h(u,b))du, \quad f_h(u,b) = f(u,b) - hu. \end{aligned}$$

Функция $f'_h(u,b) = n\lambda(u^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h$ на отрезке $u \in [x-y, x]$ является неубывающей функцией, поэтому

$$f'_h(x-y,b) \leqslant f'_h(u,b) \leqslant f'_h(x,b),$$

которое представим в виде

$$\{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h - \eta < f'_h(u,b) \leqslant \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h, \qquad (5)$$

$$\eta = n(n-1)\lambda x^{n-2}y - n\lambda W \leqslant n(n-1)\lambda x^{n-2}y \leqslant \frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} \leqslant \frac{1}{2q}.$$

Далее подставляя (4) в (2) и (3), найдем

$$T(\alpha; x, y) = T_{-1} + T_0 + T_1 + O\left(\frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} |S_b(a,q)|\right), \qquad (6)$$

$$R(\alpha; x, y) = R_{-1} + R_0 + R_1 + O\left(\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} |S_b(a,q)|\right), \qquad (7)$$

$$T_h = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} I(h,b)S_b(a,q), \quad R_h = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} I(h,b)S_b(a,q).$$

Пользуясь оценкой (1), оценим остаточный член:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} |S_b(a,q)| \ll q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}(b,q) = q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{\delta \backslash q}\delta \sum_{\substack{1 \leq b \leqslant q-1 \\ (b,q)=\delta}} 1 \leqslant \\ \leqslant q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{\delta \backslash q}\delta \sum_{\substack{1 \leq b \leqslant q-1 \\ b \equiv 0 (mod\ \delta)}} 1 \leqslant q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{\delta \backslash q}\delta \cdot \frac{q-1}{\delta} \leqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\tau(q). \end{aligned}$$

Оценим каждую сумму T_h и R_h отдельно.

Оценка T_1 **и** R_1. Полагая $h = 1$ в (5), имеем

$$f_1'(u,b) \leqslant \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - 1 \leqslant -\frac{b}{q} < 0.$$

Оценивая интеграл по величине первой производной, имеем

$$|I(1,b)| = \left|\int_{x-y}^{x} e(f_1(u,b))du\right| \ll \frac{q}{b}.$$

Отсюда и из (1), имеем

$$R_1 = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} I(1,b)S_b(a,q) \ll \sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

В случае $b = 0$, воспользовавшись неравенством

$$f_1^{(k)}(u,q) \geqslant n(n-1)\ldots(n-k+1)\lambda(x-y)^{n-k} \gg \lambda x^{n-k}, \quad k = 2,3,\ldots,n,$$

оценивая интеграл $I(1,0)$ по величине k – ой производной ([12], стр.15), найдем

$$|I(1,0)| \ll \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right).$$

Воспользовавшись также оценкой $|S(a,q)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ ([12], с. 61) с учетом оценки R_1 получим

$$T_1 \leqslant |R_1| + \frac{|I(1,0)||S(a,q)|}{q} \ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} + \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Оценка T_{-1} **и** R_{-1}. Полагая $h = -1$ в (5), имеем

$$f_{-1}'(u,b) > \{n\lambda x^{n-1}\} + \frac{q-b}{q} - \eta \geqslant \frac{q-b}{q}.$$

Интеграл $I(-1,b)$, также оценим по величине перовой производной. Имеем

$$|I(-1,b)| = \left|\int_{x-y}^{x} e(f_{-1}(u,b))du\right| \ll \frac{q}{q-b}.$$

Поступая аналогично как в случае оценки R_1, получим

$$R_{-1} = \sum_{b=1}^{q-1}\frac{I(-1,b)S_b(a,q)}{q} \ll \sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{q-b} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

$$T_{-1} \leqslant |R_{-1}| + \frac{|I(-1,0)||S(a,q)|}{q} \ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} + \frac{|S_b(a,q)|}{q} \ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

Оценка R_0. Если $\{n\lambda x^{n-1}\}\leqslant\frac{1}{2q}$, то полагая $h=0$ в (5), имеем

$$f_0'(u,b)\leqslant\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}\leqslant\frac{1-2b}{2q}\leqslant-\frac{b}{2q}<0.$$

Также оценивая интеграл $I(0,b)$ по величине первой производной, найдем

$$|I(0,b)|=\left|\int_{x-y}^{x}e(f_0(u,b))du\right|\ll\frac{q}{b}.$$

Поступая аналогично как случае оценки R_1, получим

$$R_0=\sum_{b=1}^{q-1}\frac{I(0,b)S_b(a,q)}{q}\ll\sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

Отсюда, из оценок R_1 и R_{-1} с учетом (7), получим первое утверждение теоремы 1.

Оценка T_0. При $\{n\lambda x^{n-1}\}\geqslant\frac{1}{2q}$ определим натуральное число r соотношением

$$\frac{r}{2q}\leqslant\{n\lambda x^{n-1}\}<\frac{r+1}{2q},\qquad 1\leqslant r\leqslant 2q-1.$$

Отсюда, из неравенства (5) при $h=0$ и условия $\eta\leqslant\frac{1}{2q}$, найдем

$$f_0'(u,b)>\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}-\eta\geqslant\frac{r-2b-1}{2q},\tag{8}$$

$$f_0'(u,b)\leqslant\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}<\frac{r-2b+1}{2q}.\tag{9}$$

Пусть $r=2r_1$ – четное ($1\leqslant r_1\leqslant q-1$). Отрезок суммирования $0\leqslant b\leqslant q-1$ в сумме T_0 разобьем на следующие три множества:

$$0\leqslant b\leqslant r_1-1,\qquad b=r_1,\qquad r_1+1\leqslant b\leqslant q-1,$$

в первом из которых правая часть неравенства (8) больше нуля, а в третьем правая часть неравенства (9) меньше нуля, то есть

$$f_0'(u,b)>\frac{2r_1-2b-1}{2q}\geqslant\frac{r_1-b}{2q},\qquad 0\leqslant b\leqslant r_1-1,$$
$$f_0'(u,b)<\frac{2r_1-2b+1}{2q}\leqslant\frac{r_1-b}{2q},\qquad r_1+1\leqslant b\leqslant q-1.$$

Воспользовавшись этими неравенствами, оценим интеграл $I(0,b)$ по величине первой производной. Тогда

$$I(0,b)=\int_{x-y}^{x}e(f_0(u,b))du\ll\frac{q}{|r_1-b|},\quad b\neq r_1.$$

В случае $b = r_1$, оценивая аналогично как в случае оценки интеграла $I(1,0)$, найдем

$$|I(0,r_1)| \ll \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right).$$

Воспользовавшись этими оценками и оценкой $|S(a,q)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ ([12], с. 61), получим

$$T_0 = \sum_{b=0}^{q-1}\frac{I(0,b)S_b(a,q)}{q} \ll q^{-\frac{1}{n}}\left(\sum_{\substack{b=0,\\ b\neq r_1}}^{q-1}\frac{q}{|r_1-b|} + \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right)\right) \ll$$
$$\ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Пусть теперь $r = 2r_1+1$ – нечетное ($0\leqslant r_1\leqslant q-1$). Отрезок суммирования $0\leqslant b\leqslant q-1$ в сумме R_0 разобьем на следующие три множества:

$$0\leqslant b\leqslant r_1-1, \qquad b=r_1,\, r_1+1, \qquad r_1+2\leqslant b\leqslant q-1,$$

в первом из которых правая часть неравенства (8) больше нуля, а в третьем правая часть неравенства (9) меньше нуля, то есть

$$f_0'(u,b) > \frac{2r_1+1-2b-1}{2q} = \frac{r_1-b}{q}, \qquad 0\leqslant b\leqslant r_1-1,$$
$$f_0'(u,b) < \frac{2r_1+1-2b+1}{2q} \leqslant \frac{r_1-b}{2q}, \qquad r_1+2\leqslant b\leqslant q-1.$$

Следовательно

$$I(0,b) = \int_{x-y}^{x} e(f_0(u,b))du \ll \frac{q}{|r_1-b|}, \quad b\neq r_1-1,\, r_1.$$

В случае $b = r_1-1, r_1$, поступая аналогично как в предыдущем случае при оценке $I(0,r_1)$, найдем

$$|I(0,b)| \ll \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right), \qquad b=r_1,\ r_1+1.$$

Из этих оценок для $I(0,b)$, получим

$$T_0 \leqslant \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}|I(0,b)||S_b(a,q)| \ll q^{-\frac{1}{n}}\left(\sum_{\substack{b=0,\\ b\neq r_1,r_1+1}}^{q-1}\frac{q}{|r_1-b|} + \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right)\right) \ll$$
$$\ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n}\left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Подставляя оценки для T_1, T_{-1} и T_0 в (6), получим второе утверждение теоремы 1.

Замечание. Случай $\lambda < 0$, сводится к случаю $\lambda \geqslant 0$, если формулу (2) приведем к виду

$$\overline{T(\alpha; x, y)} = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} T_{q-b}(-\lambda; x, y) S_{q-b}(q-a, q) = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} T_b(-\lambda; x, y) S_b(q-a, q).$$

4. Доказательство теоремы 2

Не ограничивая общности, будем считать, что $H = N^{\frac{67}{380}+\varepsilon}$.

Пусть $Q = 0,5H\mathscr{L}^{-1}$, $\tau = 80(N_1+H)^3 H$, $\text{æ}\tau = 1$. Имеем

$$J(N, H) = \int_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} \left(T(\alpha; N_1+H, 2H) + \theta\right)^{33} e(-\alpha N) d\alpha,$$

где $|\theta|$ равен 1, если $N_1 - H$ – целое число, и 0 в противном случае. Пользуясь соотношением

$$\left(T(\alpha; N_1+H, 2H) + \theta\right)^{33} - T^{33}(\alpha; N_1+H, 2H) \ll \left|T(\alpha; N_1+H, 2H)\right|^{32} + 1,$$

и леммой 1, находим

$$\int_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} |T(\alpha; N_1+H, 2H)|^{32} d\alpha \ll H^{27+\varepsilon} = \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \cdot N^{-\frac{63}{340}-\frac{1633}{340}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L} \ll \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

Поэтому

$$J(N, H) = \int_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} T^{33}(\alpha; N_1+H, 2H) e(-\alpha N) d\alpha + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right),$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\text{æ}, 1-\text{æ}]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}. \tag{10}$$

Легко видеть, что в этом представлении $0 \leqslant a \leqslant q-1$, причем $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых $q \leqslant Q$ в представлении (10). Через $\mathfrak{m}$ обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{\alpha : \ \alpha \in \mathfrak{M}, \ \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \delta\right\}, \quad \delta = \frac{1}{10q(N_1+H)^4};$$
$$\mathfrak{M}_2 = \left\{\alpha : \ \alpha \in \mathfrak{M}, \ \delta < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}\right\}.$$

Обозначим через $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Имеем

$$J(N,H)=J(\mathfrak{M}_1)+J(\mathfrak{M}_2)+J(\mathfrak{m})+O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\right). \tag{11}$$

В последней формуле первый член, то есть $J(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $J(N,H)$, а $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

Вычисление интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$. По определению интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$, имеем:

$$J(\mathfrak{M}_1)=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\int\limits_{|\lambda|\leqslant\delta}T^{33}\left(\frac{a}{q}+\lambda;N_1+H,2H\right)e\left(-\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)N\right)d\lambda. \tag{12}$$

Для суммы $T\left(\frac{a}{q}+\lambda;N_1+H,2H\right)$, $\alpha=\frac{a}{q}+\lambda\in\mathfrak{M}_1$ при $x=N_1+H$, $y=2H$, $n=5$ выполняются условия следствия 1, поэтому

$$T\left(\frac{a}{q}+\lambda,N_1+H,2H\right)-\frac{2HS(a,q)}{q}\gamma(\lambda;N_1+H,2H)\ll q^{\frac12+\varepsilon}. \tag{13}$$

Отсюда и из соотношения $a^{33}-b^{33}\leqslant 33|a-b|(|a|^{32}+|b|^{32})$ следует, что

$$T^{33}\left(\frac{a}{q}+\lambda,N_1+H,2H\right)=\frac{(2H)^{33}S^{33}(a,q)}{q^{33}}\gamma^{33}(\lambda;N_1+H,2H)+R, \tag{14}$$

$$R\ll q^{\frac12+\varepsilon}\left(\left|T\left(\frac{a}{q}+\lambda,N_1+H,2H\right)\right|^{32}+\left|\frac{2HS(a,q)}{q}\gamma(\lambda;N_1+H,2H)\right|^{32}\right),$$

Подставляя эту оценку для R в (14), а затем (14) в (12), найдем

$$J(\mathfrak{M}_1)=(2H)^{33}\mathfrak{S}(N,Q)\mathscr{A}(N)+R_1+R_2, \tag{15}$$

$$\mathfrak{S}(N,Q)=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S^{33}(a,q)}{q^{33}}e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$\mathscr{A}(N)=\int\limits_{|\lambda|\leqslant\delta}\gamma^{33}\left(\lambda;N_1+H,2H\right)e\left(-\lambda N\right)d\lambda,$$

$$R_1\ll Q^{1/2+\varepsilon}\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\int\limits_{|\lambda|\leqslant\delta}\left|T\left(\frac{a}{q}+\lambda;N_1+H,2H\right)\right|^{32}d\lambda,$$

$$R_2\ll H^{32}\sum_{q\leqslant Q}\mathscr{B}(N,q)\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{|S(a,q)|^{32}}{q^{31{,}5-\varepsilon}},$$

$$\mathscr{B}(N,q)=\int\limits_{|\lambda|\leqslant\delta}\left|\gamma\left(\lambda;N_1+H,2H\right)\right|^{32}d\lambda.$$

Оценим R_1. Имея в виду, что выполняется неравенство $\delta < 1/q\tau$, $q \leqslant Q$ и то, что $\mathfrak{M}_1$ состоит из непересекающихся отрезков, пользуясь леммой 1, находим

$$R_1 \ll Q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \int\limits_{-æ}^{1-æ} |T(\alpha; N_1+H, 2H)|^{32}\, d\alpha \ll \left(0,5H\mathscr{L}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} H^{27+\varepsilon} \ll \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

Оценим R_2. Для этого оценивая интеграл $\gamma(\lambda; N_1+H, 2H)$, $|\lambda| \leqslant \delta$ по величине первой производной, имеем

$$\gamma(\lambda;N_1+H, 2H) \ll \min\left(1, \delta_0|\lambda|^{-1}\right), \quad \delta_0 = \frac{1}{10H(N_1-H)^4}.$$

Подставляя эту оценку в выражение для $\mathscr{B}(N,q)$ и имея в виду, что $\delta_0 < \delta$, находим

$$\mathscr{B}(N,q) \ll \delta_0 + \frac{\delta_0^{32}}{31}\left(\frac{1}{\delta_0^{31}} - \frac{1}{\delta^{31}}\right) \leqslant \frac{32}{31}\delta_0 \ll \frac{1}{HN_1^4}.$$

Отсюда, и воспользовавшись оценкой $|S(a,q)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ ([12], с. 61), найдем

$$R_2 \ll \frac{H^{31}}{N_1^4}\sum_{q\leqslant Q} q^{-\frac{39}{10}+\varepsilon} \ll \frac{H^{31}}{N_1^4}\cdot Q^{-\frac{29}{10}+\varepsilon} \ll \frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}} \tag{16}$$

Вычислим теперь интеграл $\mathscr{A}(N)$. Разбивая отрезок интегрирования в интеграле $\mathscr{A}(N)$ на две части, имеем

$$\mathscr{A}(N) = \mathscr{A}_1(N) + \mathscr{A}_2(N),$$

где через $\mathscr{A}_1(N)$ и $\mathscr{A}_2(N)$ обозначены интегралы по отрезкам $|\lambda| \leqslant \delta_1$ и $\delta_1 < |\lambda| \leqslant \delta$ соответственно. Оценим сверху интеграл $\mathscr{A}_2(N)$. Для этого оценивая интеграл $\gamma(\lambda; N_1+H, 2H)$, $\delta_1 < |\lambda| \leqslant \delta$ по величине первой производной, найдем

$$\gamma(\lambda; N_1+H, 2H) \ll \min\left(1, \frac{1}{10|\lambda|H(N_1-H)^4}\right) \ll \frac{1}{|\lambda|HN_1^4}.$$

Подставляя эту оценку в выражение для $\mathscr{A}_2(N)$, имеем

$$|\mathscr{A}_2(N)| \ll \frac{1}{(HN_1^4)^{33}}\int\limits_{\delta_1}^{\delta} \lambda^{-33}d\lambda \leqslant \frac{1}{32\,(HN_1^4)^{33}\delta_1^{32}} \ll \frac{1}{HN_1^4\mathscr{L}^{32}} \ll \frac{1}{H\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

Теперь найдем асимптотическое поведение $\mathscr{A}_1(N)$. Воспользовавшись стандартным методом, легко показать, что

$$\mathscr{A}_1(N) = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\pi\sqrt[5]{N^4}H}\left(\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{33} t}{t^{33}}dt + O\left(\mathscr{L}^{-32}\right)\right).$$

Воспользовавшись формулой (см. [16] стр. 174)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n mt}{t^n} dt = \frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^k (n-2k)^{n-1}.$$

при $m = 1$ и $n = 33$, найдем

$$\mathscr{A}_1(N) = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\pi\sqrt[5]{N^4}H}\left(\frac{\pi}{2^{33}32!}\sum_{k=0}^{16}(-1)^k C_{33}^k(33-2k)^{32} + O\left(\mathscr{L}^{-32}\right)\right) =$$

$$= \frac{B}{2^{33}\sqrt[5]{N^4}H} + O\left(\frac{1}{\sqrt[5]{N^4}H\mathscr{L}^{32}}\right),$$

$$B = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\cdot 32!}\sum_{k=0}^{16}(-1)^k C_{33}^k(33-2k)^{32}.$$

Отсюда и из оценки $\mathscr{A}_2(N)$, находим $\mathscr{A}(N)$:

$$\mathscr{A}(N) = \frac{B}{2^{33}\sqrt[5]{N^4}H} + O\left(\frac{1}{\sqrt[5]{N^4}H\mathscr{L}}\right). \tag{17}$$

Вычислим теперь двойную сумму $\mathfrak{S}(N,Q)$. Для этого сумму по q заменим близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от Q. Воспользовавшись оценкой $|S(a,q)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ ([12], с. 61), имеем

$$\sum_{q>Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S^{33}(a,q)}{q^{33}}e\left(-\frac{aN}{q}\right) \ll \sum_{q>Q}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} q^{-\frac{33}{5}} < \sum_{q>Q} q^{-\frac{28}{5}} \ll Q^{-\frac{23}{5}} \ll \frac{\mathscr{L}^4}{H^4}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{S}(N,Q) = \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{\mathscr{L}^4}{H^4}\right), \quad \mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\frac{S^{33}(a,q)}{q^{33}}e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

Заметим, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ превосходит некоторое число $c(N)$ и $c(N) > 0$ (см. [17], теоремы 4.6).

Подставляя найденные оценки для R_1, R_2, значения $\mathscr{A}(N)$, $\mathfrak{S}(N,Q)$ в соотношение (15), найдем

$$J(\mathfrak{M}_1) = \frac{B\mathfrak{S}(N)H^{32}}{\sqrt[5]{33^4}} + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{33^4}\mathscr{L}}\right).$$

Оценка интеграла $J(\mathfrak{M}_2)$. Имеем

$$J(\mathfrak{M}_2) \leqslant \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T(\alpha;N_1+H,2H)|\int\limits_{-æ}^{1-æ}|T(\alpha;N_1+H,2H)|^{32}\,d\alpha. \tag{18}$$

Оценим $T(\alpha;N_1+H,2H)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha\in\mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad \delta<|\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau},\quad 1\leqslant q\leqslant 0,5HL^{-1}.$$

Согласно следствию 2 теоремы 1, при $n=5$ имеем

$$T(\alpha,N_1+H,2H)\ll q^{\frac45}\ln q+\min\left(Hq^{-\frac15},N_1^{\frac12}q^{\frac{3}{10}}\right)\ll (H\mathscr{L})^{\frac45}\mathscr{L}+N^{\frac{1}{10}}(H\mathscr{L})^{\frac{3}{10}}=$$
$$=\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\left(N^{-\frac{47}{1700}-\frac{29}{34}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L}^{\frac{14}{5}}+N^{-\frac{89}{3400}-\frac{1531}{340}\varepsilon+\varepsilon^2}\mathscr{L}^{\frac{13}{10}}\right)\ll\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

Подставляя эту оценку в (18), а затем пользуясь леммой 1, находим

$$J(\mathfrak{M}_2)\ll\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\int\limits_{-æ}^{1-æ}|T(\alpha;N_1+H,2H)|^{32}\,d\alpha\ll\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

Оценка интеграла $J(\mathfrak{m})$. Имеем

$$J(\mathfrak{m})\leqslant\max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|T(\alpha;N_1+H,2H)|\int\limits_{-æ}^{1-æ}|T(\alpha;N_1+H,2H)|^{32}\,d\alpha.\tag{19}$$

Оценим $T(\alpha;N_1+H,2H)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Если $\alpha\in\mathfrak{m}$, то

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad 0,5H\mathscr{L}^{-1}\leqslant q\leqslant\tau=80(N_1+H)^3H,\quad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}.$$

Согласно лемме 2, имеем

$$T(\alpha;N_1+H,2H)\ll H^{1+\varepsilon}\left(\frac{\mathscr{L}}{H}+\frac{1}{H}+\frac{N_1^3}{H^4}\right)^{\frac{1}{16}}\ll H^{\frac{15}{16}+\varepsilon}\mathscr{L}+N^{\frac{3}{80}}H^{\frac34+\varepsilon}=$$
$$=\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\left(N^{-\frac{3}{5440}-\frac{1663}{460}\varepsilon+2\varepsilon^2}\mathscr{L}^2+N^{-\frac{1311}{340}\varepsilon+2\varepsilon^2}\mathscr{L}\right)\ll\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

Подставляя эту оценку в (19), а затем пользуясь леммой 1, находим

$$J(\mathfrak{m})\ll\frac{H^{5-\varepsilon}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}\int\limits_{-æ}^{1-æ}|T(\alpha;N_1+H,2H)|^{32}\,d\alpha\ll\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathscr{L}}.$$

5. Заключение

Работа посвящена изучению поведения коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в множестве точек первого класса и выводу асимптотической формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы тридцати трёх пятых степеней почти равных натуральных чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vaughan R. C. Some remarks in Weyl sums // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 34. Topics in classical number theory, Budapest, 1981, North Holland (1984), pp. 1585 – 1602.

2. Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории в теории чисел. М.: Мир. 1964. 190 с.

3. Vaughan R. C. On Waring's problem for cubes // J. Reine Angew. Math. 365(1986). pp. 122 – 170.

4. Рахмонов З. Х., Шокамолова Дж. А. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2009. № 2(135). С. 7 – 18.

5. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Об оценках коротких кубических сумм Г. Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2008. Т. 51. № 1. С. 5 – 15.

6. Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Мирзоабдугафуров К. И. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля четвертой степени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2010.Т. 53. № 10. С. 737 – 744.

7. Rakhmonov Z. Kh. The Estermann cubic problem with almost equal summand // Mathematical Notes. 2014. Vol. 95. Issue 3 – 4. 407 – 417.

8. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2008. Т. 51, № 2. С. 83 – 86.

9. Рахмонов З. Х., Азамов А. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2011, т. 54, № 3. С. 34 – 42.

10. Рахмонов З. Х., Озодбекова Н. Б. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2011, т. 54, № 4. С. 257 – 264.

11. Рахмонов З. Х. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля // Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки, 2013, № 6, часть 2. С. 194 – 203.

12. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука. 1987. 368 с.

13. Назрублоев Н. Н. О среднем значение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля пятой степени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 7. С. 531 – 537.

14. Назрублоев Н. Н. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля пятой степени в множестве точек второго класса // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 9. С. –

15. Карацуба А. А., Королёв М. А. Теорема о приближении тригонометрической суммы более короткой // Известия РАН. Серия математическая. 2007. Т. 71. № 2. С. 123 – 150.

16. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. 1. Основные операции анализа. М:. Физматгиз. 1963. Изд. 2–е. 342 с.

17. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда. М.: Мир. 1985. 184 с.

REFERENCES

1. Vaughan, R. C. 1981, "Some remarks in Weyl sums" , *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai* 34. Topics in classical number theory, Budapest, 1981, North Holland (1984), pp. 1585 – 1602.

2. Hua Loo-Keng 1964. "Method of Trigonometric Sums and Its Applications in Number Theory" , *Nauka, Moscow*, 190 p. (Russian translation); 1959. "Die Abschдtzung von Exponentialsummen und Ihre Anwendungen in der Zahlentheorie" , *Teubner, Leipzig.*

3. Vaughan, R. C. 1986, "On Waring's problem for cubes" , *J. für die reine und angewandte Math.*, vol. 365, pp. 122 – 170.

4. Rakhmonov, Z. Kh. & Shokamolova, J. A. 2009, "Short quadratic Weil's exponential sums" , *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdelenie fiziko-matematicheskikh, himicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, no. 2(135), pp. 7 – 18.

5. Rakhmonov, Z. Kh. & Mirzoabdugafurov, K. I. 2008, "About the estimations of short cube Weyl sums" , *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no. 1, pp. 5 – 15.

6. Rakhmonov, Z. Kh., Azamov, A. Z. & Mirzoabdugafurov, K. I. 2010, "An estimate short exponential Weyl's sums fourth degree" , Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan, vol. 53, no. 10, pp. 737 – 744.

7. Rakhmonov, Z. Kh. 2014, "The Estermann cubic problem with almost equal summand" , *Mathematical Notes*, vol. 95, Issue 3 – 4, pp. 407 – 417. doi.org /10.1134/S0001434614030122.

8. Rakhmonov, Z. Kh. & Mirzoabdugafurov, K. I. 2008, "Waring's problem for cubes with almost equal summands" , *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no. 2, pp. 83 – 86.

9. Rakhmonov, Z. Kh. & Azamov, A. Z. 2011, "An asymptotic formula in Waring's problem for fourth powers with almost equal summands" , *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no. 3, pp. 34 – 42.

10. Rakhmonov, Z. Kh. & Ozodbekova, N. B. 2011, "An estimate short exponential Weyl's sums" , *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no. 4, pp. 257 – 264.

11. Rakhmonov, Z. Kh. 2013, "Short Weyl exponential sums" , Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya estestvennie, tekhicheskie, meditsinskie nauki. no. 6, part 2, pp. 194 – 203.

12. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. & Karatsuba, A. A. 2004, "Trigonometric sums in number theory and analysis" , *Berlin–New-York: Walter de Gruyter*, 554 p.

13. Nazrubloev, N. N. 2014, "Mean value of the short Weyl fifth degree exponential sums" , *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 57, no. 7, pp. 531 – 537.

14. Nazrubloev, N. N. 2014, "Estimate of short Weyl sums of fifth degree on minor arcs" , *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 57, no. 9, pp. 710 – 716.

15. Karatsuba, A. A. & Korolev, M. A. 2007, "A theorem on the approximation of a trigonometric sum by a shorter one" , Izvestiya: Mathematics, 71(2), pp. 341 – 370, doi.org/10.1070/IM2007v071n02ABEH002359

16. Whittaker, E. F. & Watson, G. N. 1927, "A course of modern analysis: an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions . . . " *Cambridge University Press.*

17. Vaughan, R. C. 1981, *The Hardy-Littlewood method*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 80, *Cambridge University Press, Cambridge.*

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан.
Получено 16.02.2015