ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.34

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ВАРИНГА В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С. А. Гриценко (г. Москва), Н. Н. Мотькина (г. Белгород)

Аннотация

Работа является продолжением исследования авторов, посвященного аддитивным проблемам теории чисел с переменными, принадлежащими некоторому специальному множеству. Ранее были рассмотрены задачи Гольдбаха, Хуа Ло–Кена, Лагранжа, Варинга. Для числа решений этих проблем с числами специального вида были получены асимптотические формулы. Эти формулы отличаются от асимптотических формул классических задач в простых числах без ограничений тем, что в главных членах появляются ряды специального вида:

$$\sigma_k(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 0,5k(a+b))} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

Изучение поведения этих рядов представляет собой отдельную проблему, которая также была затронута авторами.

В данной работе рассматривается оценка сверху наименьшего k как функции n, при котором любое $N \geqslant N_0(n)$ представляется суммой k таких чисел x^n, что $a \leqslant \{\eta x^n\} < b$, где a и b — произвольные действительные числа, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, η — алгебраическое иррациональное число.

Ключевые слова: проблема Варинга, аддитивные задачи, числа специального вида, число решений, асимптотическая формула, алгебраическое иррациональное число.

Библиография: 23 названия.

ON THE SOLVABILITY OF WARING'S EQUATION INVOLVING NATURAL NUMBERS OF A SPECIAL TYPE

S. A. Gritsenko (Moscow), N. N. Motkina (Belgorod)

Abstract

This paper is a continuation of our research on additive problems of number theory with variables that belong to some special set. We have solved several well–known additive problems such that Ternary Goldbach's Problem, Hua Loo Keng's Problem, Lagrange's Problem, Waring's Problem. Asymptotic formulas were obtained for these problems with restriction on the set of variables. The main terms of our formulas differ from ones of the corresponding classical problems. In the main terms the series of the form

$$\sigma_k(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 0,5k(a+b))} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

appear. These series were investigated by the authors.

Let η be the irrational algebraic number, a and b are arbitrary real numbers of the interval $[0, 1]$. There are natural numbers $x_1, x_2, \ldots, x_k$ such that

$$a \leqslant \{\eta x_i^n\} < b.$$

In this paper we evaluate the smallest k for which the equation

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N$$

is solvable.

Keywords: Waring's Problem, additive problems, numbers of a special type, number of solutions, asymptotic formula, irrational algebraic number.

Bibliography: 23 titles.

1. Введение

В теории чисел важную роль играют аддитивные задачи. К ним относятся задачи о представлении натурального числа суммой слагаемых заданного вида.

Первоначально классические аддитивные задачи решались без введения ограничений на переменные. Позднее в теории чисел появилась тематика — решение классических аддитивных проблем с переменными, принадлежащими некоторому специальному множеству.

Одна из первых задач с простыми числами специального вида возникла в работах Виноградова ([4], [3]). В 1940 г. И. М. Виноградов получил асимптотическую формулу для количества простых чисел p, не превосходящих N, с условием

$$\{fp^{1/c}\} < \sigma, \tag{1}$$

где $1 < c$, f — действительное число, $0 < f < 1$, $0 < \sigma < 1$. Этой задачей занимался Ю. В. Линник [19], а позднее Р. М. Кауфман [16], С. А. Гриценко [6]. С. А. Гриценко также рассмотрел аддитивные задачи с простыми числами такого вида. В 1988 г. он доказал, что для случая $f = \sigma = 1/2$, $1 < c \leq 2$ в простых числах вида (1) разрешимы тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга–Гольдбаха [7].

Другой известный пример специального множества — множество простых чисел p таких, что

$$p = [n^c] \tag{2}$$

для некоторого натурального n, нецелого $c > 1$. Аддитивные задачи с простыми числами такого вида изучались работах [20], [14], [18], [13]. В частности, в 1992 г. А. Балог и Дж. Фридлендер [1] решили тернарную проблему Гольдбаха в простых числах вида (2) при $1 < c < 21/20$.

В 2003 г. М. Чанга в работе [23] ввел специальное множество простых чисел p таких, что

$$\frac{l-1}{D} \leq \left\{\frac{p^c}{D}\right\} < \frac{l}{D}, \tag{3}$$

где l, D — натуральные числа, $l \leq D$, $c > 1$ — нецелое число. Со специальными простыми числами вида (3) он решил аддитивные задачи: тернарную проблему Гольдбаха, частный случай проблемы Варинга–Гольдбаха — задачу Хуа Ло–Кена.

Данная работа является продолжением исследований аддитивных задач с числами из специальных множеств.

Пусть a и b — произвольные действительные числа, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Для натуральных чисел k и N определим ряд

$$\sigma_k(N, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - k(a+b)/2)} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

Ранее нами были получены следующие теоремы.

Теорема 1. *[8] Пусть $I_{3,1}(N)$ — число решений задачи Гольдбаха о представимости нечетного натурального N в виде суммы трех простых чисел:*

$$p_1 + p_2 + p_3 = N.$$

Тогда для числа решений $J_{3,1}(N)$ задачи Гольдбаха с простыми p_i, $a < \{\eta p_i\} < b$, где η — квадратичная иррациональность, $i = 1, 2, 3$, при любом фиксированном положительном C справедливо равенство

$$J_{3,1}(N) = I_{3,1}(N)\sigma_3(N, a, b) + O(N^2 \log^{-C} N).$$

Известно [2], что:

$$I_{3,1}(N) \sim \frac{N^2}{2(\log N)^3} \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

Теорема 2. *[9] Пусть $I_{5,2}(N)$ — число представлений достаточно большого натурального N, $N \equiv 5 \pmod{24}$, суммой квадратов пяти простых чисел:*

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N.$$

Тогда для числа решений $J_{5,2}(N)$ задачи Хуа Ло–Кена с простыми числами p_i, $a < \{\eta p_i^2\} < b$, где η — квадратичная иррациональность, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, справедлива формула

$$J_{5,2}(N) = I_{5,2}(N)\sigma_5(N, a, b) + O(N^{3/2 - 0,00002}),$$

где $N \equiv 5 \pmod{24}$.

Известно ([21], [22]), что:

$$I_{5,2}(N) \asymp \frac{N^{3/2}}{(\log N)^5}.$$

Теорема 3. *[10] Пусть $I_{4,2}(N)$ — число решений задачи Лагранжа о представимости каждого натурального числа суммой не более четырех квадратов натуральных чисел:*

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = N.$$

Тогда число решений $J_{4,2}(N)$ задачи Лагранжа в целых числах l_i, $a < \{\eta l_i\} < b$, где η — квадратичная иррациональность, $i = 1, 2, 3, 4$, для любого положительного малого ε выражается формулой

$$J_{4,2}(N) = (b - a)^4 I_{4,2}(N) + O(N^{0,9+\varepsilon}).$$

Известно [17], что:

$$I_{4,2}(N) = \pi^2 N \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{1 \le a \le q \\ (a,q)=1}} S_{a,q}^4 e^{-2\pi i N a/q} + O(N^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S_{a,q} = \sum_{j=1}^{q} e^{2\pi i a j^2/q}.$$

Теорема 4. *[12] Пусть $I(N)$ — число решений проблемы Варинга:*

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N$$

с натуральными числами $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $n \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant k_0$, где

$$k_0 = \begin{cases} 2^n + 1, & \text{если } 3 \leqslant n \leqslant 10, \\ 2[n^2(2\log n + \log\log n + 5)], & \text{если } n > 10. \end{cases}$$

Тогда для числа решений $J(N)$ проблемы Варинга в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$ таких, что $a \leqslant \{\eta x_j^n\} < b$, где η — алгебраическое число степени $s \geqslant 2$, $j = 1, 2, \ldots, k$, справедлива асимптотическая формула:

$$J(N) = I(N)\sigma_k(N, a, b) + O\left(N^{\frac{k}{n} - 1 - \frac{c}{n^3 \log n}}\right).$$

Положительная постоянная c зависит только от η.

При $k \geqslant cn^2 \log n$ известно [15], что:

$$I(N) \sim \frac{(\Gamma(1 + 1/n))^k}{\Gamma(k/n)} N^{k/n - 1}.$$

Полученные нами в теоремах 1, 2 и 4 формулы отличаются от асимптотических формул классических задач Гольдбаха, Хуа Ло–Кена, Варинга. У нас в главных членах появляются ряды $\sigma_k(N, a, b)$ специального вида. Изучение поведения этих рядов представляет собой отдельную проблему, которая рассматривается авторами в [11].

Обозначим $\alpha = \eta N - aj - b(k - j)$. При нечетном k, $k \geqslant 2$, получено равенство

$$\sigma_k(N, a, b) = (b - a)^k +$$
$$+ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \Big(\frac{\{\alpha\}^k}{k!} - \frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!} + \frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!} +$$
$$+ \frac{1}{2^{k-2}} (-1)^{\frac{3k-1}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{k-5}{2}} \frac{\zeta(k - 1 - 2l)}{\pi^{k-1-2l}} (-4)^l \frac{\{\alpha\}^{2l+1}}{(2l+1)!} \Big).$$

При четном k имеем

$$\sigma_k(N, a, b) = (b - a)^k +$$
$$+ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \Big(- \frac{\{\alpha\}^k}{k!} + \frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!} - \frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!} +$$
$$+ \frac{1}{2^{k-1}} (-1)^{k/2} \sum_{l=0}^{\frac{k-4}{2}} \frac{\zeta(k - 2l)}{\pi^{k-2l}} (-4)^l \frac{\{\alpha\}^{2l}}{(2l)!} \Big).$$

Определение 1. *При $n \geqslant 3$ функция $G(n)$ равняется наименьшему k такому, что любое натуральное $N \geqslant N_0(n)$ представляется суммою k натуральных слагаемых вида x^n.*

Для $G(n)$ справедливы оценки [15]:

$$n < G(n) \leqslant cn \log n,$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Определение 2. *При $n \geqslant 3$ функция $G_{a,b}(n)$ равняется наименьшему k такому, что любое натуральное $N \geqslant N_0(n)$ представляется в виде*

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — натуральные числа такие, что $a \leqslant \{\eta x^n\} < b$, где η — алгебраическое число степени $s \geqslant 2$.

Нами получен следующий результат.

Теорема 5. *Для любых a и b, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, существует $c_0 > 0$ такое, что*

$$n < G_{a,b}(n) \leqslant c_0 n \log n.$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (Дирихле, [15]). *Пусть $\tau \geqslant 1$, α — вещественное число. Тогда существуют целые взаимно простые числа a и q, $1 \leqslant q \leqslant \tau$, такие, что*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Характеристическую функцию интервала $[a, b)$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant x < b, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant x < a \text{ или } b \leqslant x < 1 \end{cases}$$

продолжим периодически на всю числовую ось с периодом 1.

Пусть

$$S(\alpha) = \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i \alpha x^n}, \quad S_0(\alpha) = \sum_{x \leqslant P} \psi(\eta x^n) e^{2\pi i \alpha x^n},$$

где $P = N^{1/n}$. Будем рассматривать α из промежутка $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = 2nP^{n-1}$. По теореме Дирихле (лемма 1) о приближении действительных чисел рациональными числами α представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{4}$$

Пусть

$$M = \min\left(P^{\frac{1}{4}}, (\sqrt{\tau})^{\frac{1}{2(s-1)}}\right), \quad Q = \min\left(P^{\frac{1}{4}}, \frac{(\sqrt{\tau})^{\frac{1}{2(s-1)}}}{\sqrt{M}}\right). \tag{5}$$

Через E_1 обозначим те α, для которых в разложении (4) $q \leqslant Q$, через E_2 обозначим оставшиеся α.

Лемма 2. *[12] Существует константа $c_2 > 0$ такая, что для любого $\alpha \in E_2$*

$$S(\alpha) = O(P^{1 - \frac{c_2}{n^2 \log n}}).$$

Лемма 3. *[12] Существует константа $c_1 > 0$ такая, что для любого $\alpha \in E_1$ и любого $0 < |m| \leqslant M$*

$$S(\alpha + \eta m) = O(P^{1 - \frac{c_1}{n^2 \log n}}).$$

Лемма 4. *Пусть $k \geqslant 4n$. Тогда*

$$\int_{E_1} S^k(\alpha) e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha =$$

$$= \gamma N^{\frac{k}{n}-1} \sum_{q\leqslant Q} \sum_{\substack{1\leq a\leq q\\(a,q)=1}} \Big(\frac{S(a,q)}{q}\Big)^k e^{-2\pi i Na/q} + O\Big(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{n}}\Big),$$

где

$$S(a,q) = \sum_{j=1}^{q} e^{2\pi i a j^n/q},$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^1 e^{2\pi i z x^n} dz\Big)^k e^{-2\pi i z} dz.$$

Доказательство. Повторяем рассуждения из доказательства теоремы 1 ([15], глава XI).

Лемма 5 (формула частного суммирования — преобразование Абеля, [15]). *Пусть $f(x)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, c_n — произвольные комплексные числа,*

$$C(x) = \sum_{a<n\leqslant x} c_n.$$

Тогда

$$\sum_{a<n\leqslant b} c_n f(n) = -\int_a^b C(x) f'(x) dx + C(b) f(b).$$

Лемма 6. *Пусть*

$$b - a = \frac{1}{\pi T},$$

где T — натуральное число. Пусть k_0 — натуральное число, причем

$$\frac{k_0}{7T^2} > 10.$$

Тогда при любых a и N справедливо неравенство

$$\sigma_{k_0}(N,a,b) \geqslant \frac{1}{2}(b-a)^{k_0}.$$

Доказательство.

$$|\sigma_{k_0}(N,a,b)| \geqslant (b-a)^{k_0} - \Big| \sum_{0<|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - k_0(a+b)/2)} \Big(\frac{\sin \pi m(b-a)}{\pi m}\Big)^{k_0} \Big|.$$

Достаточно доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi^{k_0}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\sin\frac{m}{T}|^{k_0}}{m^{k_0}} < \Big(\frac{1}{\pi T}\Big)^{k_0}. \tag{6}$$

Оценим сверху сумму ряда:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\sin\frac{m}{T})^{k_0}}{m^{k_0}} \leqslant \sum_{m=1}^{T} \frac{(\sin\frac{m}{T})^{k_0}}{m^{k_0}} + \sum_{m=T+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k_0}} = S_1 + S_2.$$

Сначала получим оценку для S_2:

$$S_2 \leqslant (T+1)^{-k_0} + \int_{T+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{k_0}} = (T+1)^{-k_0} + \frac{(T+1)^{1-k_0}}{k_0-1} <$$

$$< 2T^{-k_0} \exp\left(-k_0 \log\left(1+\frac{1}{T}\right)\right) < 2T^{-k_0} \exp\left(\frac{-k_0}{2T}\right) <$$

$$< 2T^{-k_0} e^{-35} < \frac{1}{100} T^{-k_0}.$$

Оценим S_1. Поскольку при $1 \leqslant m \leqslant T$

$$0 < \sin\frac{m}{T} \leqslant \frac{m}{T} - \frac{1}{6}\Big(\frac{m}{T}\Big)^3 + \frac{1}{120}\Big(\frac{m}{T}\Big)^5 < \frac{m}{T}\Big(1 - \frac{1}{7}\Big(\frac{m}{T}\Big)^2\Big),$$

имеем

$$S_1 < \frac{1}{T^{k_0}} \sum_{m=1}^{T} \exp\left(k_0 \log\left(1 - \frac{m^2}{7T^2}\right)\right) < \frac{1}{T^{k_0}} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-k_0}{7T^2} m\right).$$

Так как по условию леммы

$$\frac{k_0}{7T^2} > 10,$$

то

$$S_1 < \frac{1}{T^{k_0}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-10m} < \frac{1}{T^{k_0}} \frac{e^{-10}}{1-e^{-10}} < \frac{1}{100} \frac{1}{T^{k_0}}.$$

Из полученных оценок для S_1 и S_1 следует неравенство (6).

3. Доказательство теоремы 5.

1. Поскольку по определению $G(n) \leqslant G_{a,b}(n)$, а $n < G(n)$ [15], то получаем, что $n < G_{a,b}(n)$. Пусть, как и в ([15], глава XI),

$$P = N^{1/n}, \quad P_1 = \frac{1}{4} N^{\frac{1}{n}}, \quad P_j = \frac{1}{2} P_{j-1}^{1-\frac{1}{n}}, \quad j = 2, 3, \ldots, s.$$

Рассмотрим уравнение

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n + u_1^n + \ldots + u_s^n + u_{s+1}^n + \ldots + u_{2s}^n = N, \tag{7}$$

где x_1, x_2, ..., x_k, u_1, u_2, ..., u_{2s} — натуральные числа. Числа u_j, u_{j+s} независимо друг от друга пробегают промежутки $(P_j, 2P_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$. По условию теоремы 5 переменные уравнения (7) x_1, ..., x_k, u_1, ..., u_{2s} такие, что

$$a \leqslant \{\eta x_j^n\} < b, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

$$a \leqslant \{\eta u_i^n\} < b, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 2s,$$

где η — алгебраическое число степени $s \geqslant 2$, a и b — произвольные действительные числа, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

Введем тригонометрические суммы

$$S(\alpha) = \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i \alpha x^n},$$

$$S_0(\alpha) = \sum_{x \leqslant P} \psi(\eta x^n) e^{2\pi i \alpha x^n},$$

$$T_j(\alpha) = \sum_{P_j < u_j < 2P_j} \psi(\eta u_j^n) e^{2\pi i \alpha u_j^n}, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Тогда число решений уравнения (7) равно

$$I(N) = \int_0^1 S_0^k(\alpha) T_1^2(\alpha) \ldots T_s^2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha. \tag{8}$$

2. Ранее нами получено [12]:

$$S_0(\alpha) = \sum_{|m| \leqslant M} c(m) S(\alpha + \eta m) + O\Big(P^{1 - \frac{c_3}{n^2 \log n}}\Big),$$

где M определяется формулой (5), $c_3 > 0$,

$$c(m) = \frac{\sin \pi (b-a) m}{\pi m} e^{-\pi i m (a+b)}.$$

Подставив в (8) вместо $S_0(\alpha)$

$$O\Big(P^{1 - \frac{c_3}{n^2 \log n}}\Big)$$

получаем

$$R_1 = O\Big(P^{1 - \frac{c_3}{n^2 \log n}} \int_0^1 |T_1(\alpha)|^2 \ldots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha\Big) = O\Big(P^{k - \frac{c_3}{n^2 \log n}} P_1 \ldots P_s\Big).$$

Тогда

$$I(N) = \sum_{|m| \leqslant M} c(m) \int_0^1 S(\alpha + \eta m) S_0^{k-1}(\alpha) T_1^2(\alpha) \ldots T_s^2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha +$$

$$+ O\Big(P^{k - \frac{c_3}{n^2 \log n}} P_1 \ldots P_s\Big).$$

Сделаем в интеграле $I(N)$ замену переменной $\alpha = t - \eta m$, получаем

$$I(N) = \sum_{|m| \leqslant M} c(m) e^{2\pi i \eta m N} \int_0^1 S(t) S_0^{k-1}(t - \eta m) T_1^2(t - \eta m) \ldots T_s^2(t - \eta m) e^{-2\pi i t N} dt +$$

$$+ O\Big(P^{k - \frac{c_3}{n^2 \log n}} P_1 \ldots P_s\Big).$$

Поскольку подынтегральная функция является периодичной по t с периодом 1, то интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = 2nP^{n-1}$.

По теореме Дирихле (лемма 1) о приближении действительных чисел рациональными числами t представимо в виде

$$t = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{9}$$

Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 — «большие» дуги и E_2 — «малые» дуги. На «больших» дугах E_1 в разложении (9) выберем $q \leqslant Q$, где Q определено равенством (5). Тогда $E_2 = E \backslash E_1$.

Заметим, что
$$I(N) = I_1(N) + I_2(N) + O\Big(P^{k-\frac{c_3}{n^2\log n}} P_1 \dots P_s\Big),$$
где
$$I_j(N) = \sum_{|m|\leqslant M} c(m) e^{2\pi i\eta m N} \int_{E_j} S(t) S_0^{k-1}(t-\eta m) T_1^2(t-\eta m) \dots T_s^2(t-\eta m) e^{-2\pi i t N} dt$$
при $j = 1, 2$.

3. Оценим $I_2(N)$, пользуясь леммой 2, как
$$I_2(N) = O\Big(P^{k-\frac{c_2}{n^2\log n}} P_1 \dots P_s \log P\Big).$$

4. Преобразуем $I_1(N)$. Имеем
$$S_0(t-\eta m) = \sum_{|m_1|\leqslant M} c(m_1) S(t + \eta(m_1 - m)) + O\Big(P^{1-\frac{c_3}{n^2\log n}}\Big),$$
где $t \in E_1$.

При $m_1 \neq m$, в силу леммы 3,
$$S(t + \eta(m_1 - m)) = O\Big(P^{1-\frac{c_1}{n^2\log n}}\Big).$$
Следовательно,
$$S_0(t-\eta m) = c(m) S(t) + O\Big(P^{1-\frac{c_4}{n^2\log n}} \log P\Big),$$
где $c_4 > 0$.

Вклад остатка оценивается как
$$R_2 = O\Big(P^{k-\frac{c_4}{n^2\log n}} \log^2 P \int_0^1 |T_1(t-\eta m)|^2 \dots |T_s(t-\eta m)|^2 dt\Big) =$$
$$= O\Big(P^{k-\frac{c_4}{n^2\log n}} P_1 \dots P_s \log^2 P\Big).$$

Повторяя эти рассуждения $(k-2)$ раза, придем к равенству
$$I_1(N) = \sum_{|m|\leqslant M} c^k(m) e^{2\pi i\eta m N} \int_{E_1} S^k(t) T_1^2(t-\eta m) \dots T_s^2(t-\eta m) e^{-2\pi i t N} dt +$$
$$+ O\Big(P^{k-\frac{c_4}{n^2\log n}} P_1 \dots P_s \log^2 P\Big).$$

5. Рассмотрим
$$I_1(N) = \sum_{|m|\leqslant M} c^k(m) e^{2\pi i\eta m N} \times$$
$$\times \sum_{P_1<u_1<2P_1} \psi(\eta u_1^n) e^{-2\pi i\eta m u_1^n} \dots \sum_{P_{2s}<u_{2s}<2P_{2s}} \psi(\eta u_{2s}^n) e^{-2\pi i\eta m u_{2s}^n} \int_{E_1} S^k(t) e^{-2\pi i t N_1} dt +$$
$$+ O\Big(P^{k-\frac{c_4}{n^2\log n}} P_1 \dots P_s \log^2 P\Big),$$
где $N_1 = N - u_1^n - \dots - u_{2s}^n$.

Применим лемму 4:

$$I_1(N) = \gamma \sum_{|m|\leqslant M} c^k(m) e^{2\pi i\eta m N} \times$$

$$\times \sum_{P_1<u_1<2P_1} \psi(\eta u_1^n) e^{-2\pi i\eta m u_1^n} \ldots \sum_{P_{2s}<u_{2s}<2P_{2s}} \psi(\eta u_{2s}^n) e^{-2\pi i\eta m u_{2s}^n} \times$$

$$\times (N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1} \sum_{q\leqslant Q} \sum_{\substack{1\leq a\leq q\\(a,q)=1}} \Big(\frac{S(a,q)}{q}\Big)^k e^{-2\pi i\frac{a}{q}(N-u_1^n-\ldots-u_{2s}^n)} +$$

$$+O\Big(P^{k-\frac{c_4}{n^2\log n}} P_1 \ldots P_s \log^2 P\Big) + O\Big(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{n}} P_1^2 \ldots P_s^2 \log P\Big).$$

Сделаем суммирование по u_1 внутренним. Получим сумму

$$W_1 = \sum_{P_1<u_1<2P_1} \psi(\eta u_1^n) e^{-2\pi i\eta m u_1^n} (N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1}.$$

6. Разложим в сумме W_1 функцию $\psi(x)$ в ряд Фурье. Тогда

$$W_1 = \sum_{|m_1|\leqslant M} c(m_1) \sum_{P_1<u_1<2P_1} e^{2\pi i\eta(m_1-m)u_1^n} (N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1} +$$

$$+O\Big(N^{\frac{k}{n}-1} P^{1-\frac{c_5}{n^2\log n}}\Big),$$

где $c_5 > 0$. Выделим слагаемые с $m_1 = m$, получим:

$$W_1 = c(m) \sum_{P_1<u_1<2P_1} (N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1} +$$

$$+ \sum_{\substack{|m_1|\leqslant M\\ m_1\neq m}} c(m_1) \sum_{P_1<u_1<2P_1} e^{2\pi i\eta(m_1-m)u_1^n} (N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1} +$$

$$+O\Big(N^{\frac{k}{n}-1} P^{1-\frac{c_2}{n^2\log n}}\Big).$$

При $m_1 \neq m$ оценим сумму

$$W_{1,1} = \sum_{P_1<u_1\leqslant 2P_1} e^{2\pi i\eta(m_1-m)u_1^n} (N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1}.$$

К сумме $W_{1,1}$ применим преобразование Абеля (лемма 5):

$$W_{1,1} = \Big(\frac{k}{n} - 1\Big) n \int_{P_1}^{2P_1} \sum_{P_1<u_1\leqslant v_1} e^{2\pi i\eta(m_1-m)u_1^n} (N - v_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-2} {v_1}^{n-1} dv_1 +$$

$$+ \sum_{P_1<u_1\leqslant 2P_1} e^{2\pi i\eta(m_1-m)u_1^n} (N - (2P_1)^n - u_2^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1}.$$

Для оценки сумм по u_1 используем лемму 3, получим:

$$W_{1,1} = O\Big(P_1^{1-\frac{c_1}{n^2\log n}} N^{\frac{k}{n}-1}\Big).$$

Из этой оценки для $W_{1,1}$ следует, что

$$I_1(N) = \gamma \sum_{|m|\leqslant M} c^{k+1}(m) e^{2\pi i\eta mN} \sum_{P_1<u_1<2P_1} 1 \times$$

$$\times \sum_{P_2<u_2<2P_2} \psi(\eta u_2^n) e^{-2\pi i\eta m u_2^n} \dots \sum_{P_{2s}<u_{2s}<2P_{2s}} \psi(\eta u_{2s}^n) e^{-2\pi i\eta m u_{2s}^n} \times$$

$$\times (N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1} \sum_{q\leqslant Q} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \Big(\frac{S(a,q)}{q}\Big)^k e^{-2\pi i \frac{a}{q}(N-u_1^n-\ldots-u_{2s}^n)} +$$

$$+ O\Big(P^{k-\frac{c_4}{n^2\log n}} P_1\dots P_s \log^2 P\Big) + O\Big(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{1}{n}} P_1^2\dots P_s^2 \log P\Big) +$$

$$+ O\Big(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{c_6}{n^3\log n}} P_1^2\dots P_s^2 \log^2 P\Big),$$

где $c_6 > 0$.

Проводя такие же вычисления сумм по переменным u_j, $j = 2, 3, \ldots, 2s$, получим:

$$I_1(N) = \gamma \sum_{|m|\leqslant M} c^{k_0}(m) e^{2\pi i\eta mN} \times$$

$$\times \sum_{P_1<u_1<2P_1} \dots \sum_{P_{2s}<u_{2s}<2P_{2s}} (N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n)^{\frac{k}{n}-1} \times$$

$$\times \sum_{q\leqslant Q} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \Big(\frac{S(a,q)}{q}\Big)^k e^{-2\pi i \frac{aN_1}{q}} +$$

$$+ O\Big(P^{k-\frac{c_7}{n^2\log n}} P_1\dots P_s \log^2 P\Big) + O\Big(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{c_8}{n^3\log n}} P_1^2\dots P_s^2 \log^2 P\Big),$$

где $k_0 = k + 2s$, $N_1 = N - u_1^n - \ldots - u_{2s}^n$, $c_7 > 0$, $c_8 > 0$.

7. Пусть $k = 4n$. Поскольку ([15], с. 178, лемма XI.1.1)

$$\Big|\frac{S(a,q)}{q}\Big| \ll q^{-\frac{1}{n}},$$

то

$$\sum_{q\leqslant Q} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \Big(\frac{S(a,q)}{q}\Big)^k e^{-2\pi i \frac{aN_1}{q}} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \Big(\frac{S(a,q)}{q}\Big)^k e^{-2\pi i \frac{aN_1}{q}} + O(Q^{-2}).$$

Известно, что ([15], с. 184, лемма XI.1.3):

$$\sigma(N_1) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \Big(\frac{S(a,q)}{q}\Big)^k e^{-2\pi i \frac{aN_1}{q}} > c(n,k) > 0.$$

Оценим $I_1(N)$ снизу:

$$|I_1(N)| \geqslant c(n,k) N^{\frac{k}{n}-1} P_1^2 \dots P_s^2 \Big| \sum_{|m|\leqslant M} c^{k_0}(m) e^{2\pi i\eta mN} \Big| -$$

$$- c_1(n,k) P^{k-\frac{c_7}{n^2\log n}} P_1\dots P_s \log^2 P - c_2(n,k) P^{-\frac{c_8}{n^2\log n}} P_1^2 \dots P_s^2 N^{\frac{k}{n}-1} \log^2 P.$$

8. Пусть $s = [c_0 n \log n] + 1$, где c_0 — константа. Потребуем, чтобы c_0 было столь велико, что выполнялось бы неравенство

$$\frac{k_0}{7T^2} > 10.$$

Напомним, что

$$b - a = \frac{1}{\pi T}, \quad k_0 = k + 2s.$$

Тогда, в силу леммы 6:

$$\Big| \sum_{|m| \leqslant M} c^{k_0}(m) e^{2\pi i \eta m N} \Big| \gg |\sigma_{k_0}(N, a, b)| - M^{-1} \geqslant 2c_3(n, k) > 0.$$

Поскольку

$$P_1 P_2 \ldots P_s \asymp N^{1 - (1 - \frac{1}{n})^s},$$

имеем

$$|I_1(N)| \geqslant c_4(n, k) N^{\frac{k}{n} - 1} P_1^2 \ldots P_s^2 - c_1(n, k) P^{k - \frac{c_7}{n^2 \log n}} P_1 \ldots P_s \log^2 P.$$

Отсюда и из определения s следует, что при достаточно большой константе c_0 выполняется:

$$P^{k - \frac{c_7}{n^2 \log n}} P_1 \ldots P_s \log^2 P = o\Big(N^{\frac{k}{n} - 1} P_1^2 \ldots P_s^2 \Big).$$

при $P \to \infty$.

Отсюда следует, что если c_0 — достаточно большая константа, $N \geqslant N_0(n)$, то $I(N) > 0$. Теорема доказана.

4. Заключение

В работе доказано, что уравнение Варинга разрешимо при достаточно больших N в натуральных числах x_j таких, что

$$0 \leqslant a \leqslant \{\eta x_j^n\} < b \leqslant 1,$$

где $j = 1, 2, \ldots, k$,

$$n < k \leqslant c_0 n \log n,$$

η — иррациональное алгебраическое число, c_0 — константа. Утверждение остается справедливым для иррационального числа η, все неполные частные непрерывной дроби которого ограничены одной и той же константой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balog A., Friedlander J. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific J. Math. 1992. Vol. 156. No. 1. P. 45–62.

2. Виноградов И. М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР. 1937. Т. 15. С. 169–172.

3. Виноградов И. М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Матем. сб. 1940. Т. 7, вып. 2. С. 365–372.

4. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука, 1976. 120 с.

5. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2–е изд. М.: Наука, 1980. 144 с.

6. Гриценко С. А. Об одной задаче И. М. Виноградова // Матем. заметки. 1986. Т. 39, вып. 5. С. 625–640.

7. Гриценко С. А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха–Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43, вып. 4(262). С. 203–204.

8. Gritsenko S., Motkina N. Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a Special type. Режим доступа: http://arXiv.org/abs/0812.4606 – 25 Dec 2008

9. Gritsenko S., Motkina N. Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type. Режим доступа: http://arXiv.org/abs/0812. 4665 – 26 Dec 2008

10. Gritsenko S., Motkina N. Representation of natural numbers by sums of four squares of integers having a special form // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 173. No. 2. P. 194–200.

11. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. О вычислении некоторых особых рядов // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 85–92.

12. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Проблема Варинга с натуральными числами специального вида // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 3. С. 31–47.

13. Deshouillers J. M. Sur la repartition des nombres $[n^c]$ dans les progressions arithmetiques // Acad. Sc. Paris. 1993. T. 277. Serie A. P. 647–650.

14. Карацуба А. А. Об одной задаче с простыми числами // ДАН СССР. 1981. Т. 259. № 6. С. 1291–1293.

15. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2–е изд. М.: Наука, 1983. 240 с.

16. Кауфман Р. М. О распределении $\{\sqrt{p}\}$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 497–504.

17. Kloosterman H. D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta mathematica. 1926. *49*. P. 407–464.

18. Kolesnik G. Primes of the form $[n^c]$ // Pacific J. Math. 1985. Vol. 118. No. 2. P. 437–447.

19. Линник Ю. В. Об одной теореме теории простых чисел // ДАН СССР. 1945. Т. 47. С. 7–8.

20. Пятецкий–Шапиро И. И. О распределении простых чисел в последовательности вида $[f(n)]$ // Матем. сб. 1953. Т. 33(75), № 3. С. 559–566.

21. Hua L. K. On the representation of numbers as the sum of powers of primes // Math. Z. 1938. *44*. P. 335–346.

22. Хуа Ло–ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964. 194 с.

23. Чанга М. Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Матем. заметки. 2003. Т. 73, вып. 3. С. 423–436.

REFERENCES

1. Balog, A. & Friedlander, J. 1992, "A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro", *Pacific J. Math.*, vol. 156, no. 1, pp. 45–62.

2. Vinogradov, I. M. 1937, "Representation of an odd number as a sum of three prime numbers", *DAN SSSR*, vol. 15, pp. 291–294.

3. Vinogradov, I. M. 1940, "Some common property of distribution of prime numbers", *Mat. sb.*, vol. 7, no. 2, pp. 365–372.

4. Vinogradov, I. M. 1976, *Osobye varianty metoda trigonometricheskikh summ* (Russian), [Special variants of the method of trigonometric sums]. Nauka, Moscow, 120 p.

5. Vinogradov, I. M. 1980, *Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel* (Russian), [The method of trigonometric sums in the theory of numbers]. Second edition. Nauka, Moscow, 144 p.

6. Gritsenko, S. A. 1986, "On a problem of Vinogradov", *Mat. Zametki*, vol. 39, issue 5, pp. 625–640.

7. Gritsenko, S. A. 1988, "Ternary Goldbach's problem and Goldbach–Waring's problem with prime numbers lying in intervals of a special type", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 43, no. 4(262), pp. 203–204.

8. Gritsenko, S. & Motkina, N. 2008, "Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a Special type", *arXiv.org,* Cornell university library, Ithaca, NY, Available at: arXiv.org/abs/0812.4606 - 25 Dec 2008

9. Gritsenko, S. & Motkina, N. 2008, "Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type", *arXiv.org,* Cornell university library, Ithaca, NY, Available at: arXiv.org/abs/0812. 4665 – 26 Dec 2008

10. Gritsenko, S. & Motkina, N. 2011, "Representation of natural numbers by sums of four squares of integers having a special form", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 173, no. 2, pp. 194–200.

11. Gritsenko, S. A. & Motkina, N. N. 2011, "On the calculation of some special series", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, no. 4, pp. 85–92.

12. Gritsenko, S. A. & Motkina, N. N. 2014, "Waring's problem involving natural numbers of a special type", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, no. 3, pp. 31–47.

13. Deshouillers, J. M. 1993, "Sur la repartition des nombres $[n^c]$ dans les progressions arithmetiques", *Acad. Sc. Paris*, t. 277, serie A, pp. 647–650.

14. Karatsuba, A. A. 1981, "About one problem with prime numbers", *DAN SSSR*, vol. 259, no. 6, pp. 1291–1293.

15. *Karatsuba, A. A.* 1983, *Osnovy analiticheskoi teorii chisel* (Russian), [Fundamentals of the analytical number theory]. Second edition. Nauka, Moscow, 240 p.

16. Kaufman, R. M. 1979, "About distribution of $\{\sqrt{p}\}$", *Mat. Zametki*, vol. 26, issue 4, pp. 497–504.

17. Kloosterman, H. D. 1926, "On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$", *Acta mathematica*, 49, pp. 407–464.

18. Kolesnik, G. 1985, "Prime numbers of the form $[n^c]$", *Pacific J. Math.*, vol. 118, no. 2, pp. 437–447.

19. Linnik, Y. V. 1945, "About one theorem of the theory of prime numbers", *DAN SSSR*, vol. 47, pp. 7–8.

20. Pyatetskii-Shapiro, I. I. 1953, "On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$, *Mat. sb.*, vol. 33(75), no. 3, pp. 559–566.

21. Hua, L. K. 1938, "On the representation of numbers as the sum of powers of primes", *Math. Z.*, 44, pp. 335–346.

22. Hua, Luo–Geng. 1964, *Metod trigonometricheskikh summ i ego primeneniya v teorii chisel* (Russian), [The method of trigonometric sums and its application in the number theory]. Mir, Moscow, 194 p.

23. Changa, M. E. 2003, "Primes in Special Intervals and Additive Problems with Such Numbers", *Mat. Zametki*, vol. 73, issue 3, pp. 423–436.

МГУ имени М. В. Ломоносова, Финансовый университет при Правительстве РФ.
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет.
Получено 05.12.2015 г.
Принято в печать 10.03.2016 г.