ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-296-304

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ ДИРИХЛЕ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ[1]

О. А. Матвеева, В. Н. Кузнецов (г. Саратов)

Аннотация

В работе изучются аналитические свойства L-функций Дирихле в критической полосе, характерные для почти периодических функций. В основе исследований лежит аппроксимационный подход, заключающийся в построении полиномов Дирихле, которые являются почти периодическими функциями, «быстро сходящихся» в критической полосе к L-функциям Дирихле.

На этом пути для любого прямоугольника, лежащего в критической полосе, доказано существование ε-почти перида для L-функции Дирихле, получена оценка константы равномерной непрерывности. Обсуждаются вопросы, связанные с применением аппроксимационного подхода при доказательстве свойства «универсальности» L-функций Дирихле, а так же связанные с получением соответствующих результатов для L-функций числовых полей.

Ключевые слова: аппроксимационные полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, почти периодические функции.

Библиография: 15 названий.

ON DIRICHLET APPROXIMATION POLYNOMIALS AND SOME PROPERTIES OF DIRICHLET L-FUNCTIONS

O. A. Matveeva, V. N. Kuznetsov (Saratov)

Abstract

In this paper we study the analytic properties of Dirichlet L -functions in the critical strip, characteristic for almost periodic functions. The research is based on Approximation approach, consisting in the construction of Dirichlet polynomials, which are almost periodic functions, "rapidly convergent"in the critical strip to Dirichlet L -functions.

On this path, for any rectangle lying in the critical strip, the existence of ε -almost period for the Dirichlet L-function, we obtain the estimate constants of uniform continuity. Issues related to studying other properties of Dirichlet L -functions are discussed.

Keywords: Dirichlet approximation polynomials, Dirichlet L-functions, almost periodic functions.

Bibliography: 15 titles.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00399).

1. Введение

Рассмотрим L-функцию Дирихле

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\sum_1^\infty\frac{\chi(n)}{n^s},;\ s=\sigma+it, \tag{1}$$

где χ — неглавный характер Дирихле.

В работах [1], [2], [3] указан численный алгоритм построения последовательности полиномов Дирихле $Q_n(s)$, которые в любом прямоугольнике $D_T:\ 0<\sigma_0\le\sigma\le 1,\ |t|\le T$, приближают L-функцию (1) с показательной скоростью.

Показано, что для любого $\varepsilon>0$, $T>0$, при $n\ge n_0$, где

$$n_0=\left[\frac{2T+|\ln\varepsilon|-\ln T}{\ln\rho}\right], \tag{2}$$

и где величина $\rho>1$, в прямоугольнике D_T имеет место оценка

$$||L(s,\chi)-Q_n(s)||_{C(D_T)}<\varepsilon.$$

Отметим, что величина ρ в формуле (2) определяется периодом характера χ и легко оценивается снизу в зависимости от периода d. Например, для $d=3,4,5,6,8,10$

$$\rho>\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, при заданных ε и d при достаточно большом T степень полинома Дирихле $Q_n(s)$, приближающего L-функцию Дирихле с точностью до ε, можно считать соизмеримой с величиной T. При этом будем использовать обозначение $n\sim T$.

Там же [1], [2], [3] изучались свойства полиномов $Q_n(s)$, которые определяют соответсвующие свойства L-функций (1). Такой подход изучения свойств L-функций Дирихле получил название аппроксимационного подхода.

В нашем случае мы рассмотрим свойства полиномов $Q_n(s)$, характерные для почти периодических функций, каковыми являются полиномы Дирихле, и выясним, в какой степени эти свойства отражаются в поведении L-функций Дирихле. По поводу свойств почти периодических функций см. [4],[5].

2. Некоторые свойства L-функций Дирихле, имеющие аналог в теории почти периодических функций

Рассмотрим отдельные понятия и введём ряд обозначений, связанных с почти периодическими функциями. Обозначим через $\tau(\varepsilon)$ ε-почти период почти периодической функции $f(x)$, т.е. для всех x

$$|f(x+\tau(\varepsilon))-f(x)|<\varepsilon.$$

Пусть $Q_{n,\sigma}(t)$ — почти периодическая функция вида

$$Q_{n,\sigma}(t)=\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{k^\sigma}e^{i\ln kt},\quad 0<\sigma_1\le\sigma\le 1. \tag{3}$$

Пусть $\eta(\varepsilon)$ обозначает число, характеризующее равномерную непрерывность функции $f(x)$, т.е.

$$|x_1-x_2|<\eta(\varepsilon)\longrightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\le\varepsilon.$$

При заданных обозначениях имеет место

Лемма 1. *Для заданного $\varepsilon > 0$ для полинома вида (3) существует ε-почти период $\tau(\varepsilon)$, для которого имеет место оценка*

$$|\tau(\varepsilon)| < \frac{2\pi n}{\ln n} + \frac{\varepsilon n}{2\ln n} + C, \tag{4}$$

где константа C зависит только от величины ε и при достаточно больших n значительно меньше чем $\frac{n}{\ln n}$.

Доказательство. Покажем существование ε-почти периода, общего для всех слагаемых многочленов вида (3), то есть для системы $\{e^{-i\ln kt}\}, k = \overline{1,n}$.

Каждая функция $e^{-i\ln kt}$ является периодической функцией с периодом $\tau_k = \frac{2\pi}{\ln k}$. Пусть $\eta_k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ — число, характеризующее равномерную непрерывность этой функции на интервале $|t| < T$, где T — высота прямоугольника D_T, на котором многочлен $Q_n(s)$ приближает L-функцию с точностью до ε. Величина $\eta_k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ определяется из соотношения

$$|e^{i\ln k\delta} - 1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то есть, $\eta_k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2\ln k}$.

Рассмотрим две функции, $e^{-i\ln kt}$ и $e^{-i\ln(k+1)t}$. Как показано в [4], Дополнение, §3, лемма 1, для двух данных периодических функций на отрезке $[0,l]$, где $l = \max(\tau_k, \tau_{k+1})$, найдётся пара $\frac{\varepsilon}{2}$-почти периодов $\widehat{\tau}_1 = \eta n_1$ и $\widehat{\tau}_2 = \eta n_2$, где $\eta = \min(\eta_k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \eta_{k+1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right))$, а n_1 и n_2 — целые числа, такие, что $|\widehat{\tau}_1 - \widehat{\tau}_2| \le l$. Более того, существует целое s, такое, что имеет место равенство:

$$\tau_1 - \tau_2 = n_s\eta = \widehat{\tau}_{1,s} - \widehat{\tau}_{2,s}. \tag{5}$$

Далее, в [4] показано, что на отрезке $[0,L]$, где $L = l + 2T$, и где $\max_s|\widehat{\tau}_{1,s}| = T$, найтется общий ε-почти период τ, равный

$$\tau = \tau_1 - \widehat{\tau}_{1,s} = \tau_2 - \widehat{\tau}_{2,s}.$$

В нашем случае $\widehat{\tau}_1$ и $\widehat{\tau}_2$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ являются величинами, кратными периодам τ_n и τ_{n+1}.

Определим минимальное значение L, при котором будет выполняться неравенство $|\tau| < L$. Пусть k_0 — такое натуральное число, что $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{\ln k_0}$. Тогда при $k \ge k_0$

$$|\tau_1 - \tau_2| = \left|\frac{2\pi}{\ln k} - \frac{2\pi}{\ln(k+1)}\right| = \left|\frac{2\pi\ln\frac{k+1}{k}}{\ln k\ln(k+1)}\right| < \frac{\varepsilon}{2\ln k}.$$

Отсюда в силу (5) имеем:

$$|\widehat{\tau}_{1,s} - \widehat{\tau}_{2,s}| = \eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

и, следовательно, $|n_s| = 1$.

Таким образом, имеем:

$$|\tau| = |\tau_1 - \tau_2| < l + \frac{\varepsilon}{2\ln n} = \frac{2\pi}{\ln n} + \frac{\varepsilon}{2\ln n}.$$

Следовательно, для многочлена

$$\sum_{k=k_0}^{n}\frac{a_k}{k^\sigma}e^{-i\ln kt}, \quad n \ge n_0,$$

ε-почти период τ будет удовлетворять неравенству

$$|\tau| < \sum_{k=k_0}^{n} \frac{2\pi}{\ln k} + \sum_{k=k_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2\ln k}.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln k} \sim \frac{n}{\ln n}$ (например, [6]), из последнего неравенства получаем, что ε-почти период τ для многочлена $Q_{n,\sigma}(t)$ вида (3) удовлетворяет неравенству

$$|\tau| < \frac{2\pi n}{\ln n} + \frac{\varepsilon n}{2\ln n} + C,$$

где константа C зависит только от ε, что и завершает доказательство леммы 1. $\square$

В силу результата относительно аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$, приведённого во введении, и в силу леммы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $T > T_0$ найдётся такое положительное число $\tau < \frac{T}{\ln T}$, что для всех s, лежащих в прямоугольнике $D_T:\ 0 < \sigma_1 \le \sigma \le 1,\ |t| \le T$, и таких, что $s + i\tau \in D_T$, для L-функции Дирихле выполняется неравенство*

$$|L(s + i\tau) - L(s, \chi)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Замечание 1. *Приведённое в теореме 1 свойство L-функций Дирихле является аналогом свойства ε-почти периода для почти периодических функций. В отличие от почти периодических функций, оценка (6) имеет место в ограниченной области.*

Далее рассмотрим прямоугольник $D_T : \frac{1}{2} \le \sigma \le 1,\ |t| \le T$. Пусть полином Дирихле $Q_n(s)$ приближает в прямоугольнике D_T L-функцию Дирихле $L(s, \chi)$ с точностью для величины ε. В этом случае имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Для константы $\eta(\varepsilon)$ равномерной непрерывности аппроксимационного полинома $Q_n(s)$ в прямоугольнике D_T имеет место оценка вида*

$$\eta(\varepsilon) < \frac{C\varepsilon}{\ln n \cdot T^{\frac{1}{2}}},$$

где константа C не зависит от n и ε.

Доказательство. Рассмотрим известное неравенство (см., например, [7]):

$$|Q_n(s) - Q_n(s_0)| - |Q_n'(s_0)(s - s_0)| \le |Q_n(s) - Q_n(s_0) - Q_n'(s_0)(s - s_0)| = o(|s - s_0|).$$

Обозначим $\delta = |s - s_0|$. Тогда неравенство

$$|Q_n(s) - Q_n(s_0)| \le |Q_n'(s_0)|\delta + o(\delta) < \varepsilon$$

имеет место, если

$$\delta < \frac{\varepsilon}{|Q_n'(s_0)|}. \tag{7}$$

Покажем, что имеет место эквивалентность

$$||Q_n'(s)||_{C(D_T)} \quad \sim \quad \ln n||Q_n(s)||_{C(D_T)}. \tag{8}$$

С этой целью сравним величины

$$||L'(s, \chi)||_{C(D_T)} \quad \text{и} \quad ||L(s, \chi)||_{C(D_T)}.$$

Обозначим через $S_n(s)$ частичную сумму ряда Дирихле, определяющего L-функцию Дирихле. Пусть $S(x)$ — сумматорная функция коэффициентов L-функции, а $S^*(x)$ — сумматорная функция коэффициентов производной L-функции. В результате применения метода суммирования Абеля получаем:

$$|S^*(x)| = \left|S(x)\ln x - \int_1^x \frac{S(u)}{u}du\right| \le \ln x|S(x)| + \ln x \cdot \max_{n\le x}|S(n)| \le C\ln x \cdot \max_{n\le x}|S(n)|,$$

где константа C не зависит от x.

Таким образом, имеем:

$$|S^*(x)| \le C\ln x, \tag{9}$$

где константа C не зависит от x.

Пусть

$$\widehat{S}(u) = \begin{cases} S(u), & u \le n, \\ S(n), & u > n. \end{cases}$$

Тогда для функции $S_n(s)$ имеет место интегральное представление:

$$S_n(s) = s\int_1^\infty \frac{\widehat{S}(u)}{u^{s+1}}du = s\int_1^n \frac{S(u)}{u^{s+1}}du + s\int_n^\infty \frac{S(n)}{u^{s+1}}du. \tag{10}$$

Аналогично получаем:

$$S_n'(s) = s\int_1^\infty \frac{\widehat{S}^*(u)}{u^{s+1}}du = s\int_1^n \frac{S^*(u)}{u^{s+1}}du + s\int_n^\infty \frac{S^*(n)}{u^{s+1}}du. \tag{11}$$

Отсюда для $s \in D_T$ и для достаточно больших n будут выполняться неравенства

$$|L(s,\chi) - S_n(s)| \le \left|s\int_n^\infty \frac{S(u)}{u^{s+1}}du\right| + \left|s\int_n^\infty \frac{S(n)}{u^{s+1}}du\right| \le \frac{CT}{n^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon \tag{12}$$

и

$$|L'(s,\chi) - S_n'(s)| < \varepsilon. \tag{13}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались условием (9).

Рассмотрим

$$S_t(x) = \sum_{n\le x}\chi(n)n^{-it}, \quad \widehat{S}_t(x) = \begin{cases} S_t(x), & x \le n, \\ S_t(n), & x > n. \end{cases}$$

Аналогично $S_t^*(x)$ и $\widehat{S}_t^*(x)$.

Тогда при $|t| \le T$ имеет место неравенство:

$$|S_t^*(n)| \le C_1\ln n \cdot \max_{k\le n}|S_t(k)|, \tag{14}$$

где константа C_1 не зависит от n.

Действительно,

$$|S_t^*(n)| \le \ln n|S_t(n)| + \left|\int_1^n \frac{S_t(u)}{u}du\right| \le \ln n|S_t(n)| + \ln n \cdot \max_{k\le n}|S_t(k)|.$$

Как показано в работе [7] в случае неглавного характера Дирихле при $|t| \le T$ имеет место оценка $|S_t(x)| < C$, где константа C не зависит от x. Следовательно, $\max_{k\le n}|S_t(k)|$ есть константа, не равная нулю и не зависящая от x. Отсюда получается неравенство (14).

Обратно, в силу (14)

$$S_t(n) \le \frac{1}{\ln n}|S_t^*(n)| + \frac{1}{\ln n}\max_{k\le n}\frac{|S_t^*(k)|}{\ln n} \le \frac{C_2}{\ln n}\max_{k\le n}|S_t^*(k)|, \tag{15}$$

где константа C_2 не зависит от n.

При достаточно большом n получаем:

$$|S_n(s)| = \left|\sigma\int_1^\infty \frac{\widehat{S}_t(u)}{u^{\sigma+1}}du\right| \le \left|\sigma\int_1^n \frac{S_t(u)}{u^{\sigma+1}}du\right| + \left|\sigma\int_n^\infty \frac{S_t(n)}{u^{\sigma+1}}du\right| \le \left|\sigma\int_1^n \frac{S_t(u)}{u^{\sigma+1}}du\right| + \varepsilon.$$

Аналогично,

$$|S_n'(s)| \le \left|\sigma\int_1^n \frac{S_t^*(u)}{u^{\sigma+1}}du\right| + \varepsilon.$$

Отсюда в силу (14) и (15) следует, что при достаточно больших n имеет место эквивалентность:

$$||S_n'(s)||_{C(D_T)} \quad \sim \quad \ln n||S_n(s)||_{C(D_T)}. \tag{16}$$

Тогда в силу (12) и (13) при достаточно больших n имеет место оценка вида

$$|\ ||L'(s,\chi)||_{C(D_T)} - \ln n||L(s,\chi)||_{C(D_T)}\ | < \varepsilon. \tag{17}$$

Известно (см. [8]), что при $|t| \le T$

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right| = O\left(T^{\frac{1}{2}}\right).$$

Далее, при $s \in D_T$ имеем:

$$S_n(s) = \frac{1}{\sigma}\int_1^n \frac{S_t(u)}{u^{\sigma+1}}du + \frac{1}{\sigma}\int_n^\infty \frac{S_t(n)}{u^{\sigma+1}}du.$$

Отсюда получаем:

$$|S_n(s)| \le \max_{k\le n}|S_t(k)|\left(1-\frac{1}{n^\sigma}\right) \le CT^{\frac{1}{2}},$$

где константа C не зависит от n.

Следовательно, для $s \in D_T$ имеет место оценка

$$|L(s,\chi)| \le CT^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда и для полинома $Q_n(s)$ при $s \in D_T$ и при достаточно больших n выполняется неравенство

$$|Q_n(s)| \le CT^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

где константа C не зависит от n.

В силу (16), (17) получаем условие (8), из которого с учётом (18) следует оценка

$$||Q_n'(s)||_{C(D_T)} \le C\ln n \cdot T^{\frac{1}{2}},$$

где константа C не зависит от n.

Отсюда в силу (7) имеет место оценка

$$\delta < \frac{C\varepsilon}{\ln n \cdot T^{\frac{1}{2}}},$$

где константа C не зависит от n и ε, что и завершает доказательство леммы 2. □

Как следствие леммы 2 получаем следующее утверждение:

Теорема 2. *Для L-функции Дирихле в прямоугольнике D_T для константы равномерной непрерывности $\eta(\varepsilon)$ имеет место неравенство:*

$$\eta(\varepsilon) < \frac{C\varepsilon}{\ln T \cdot T^{\frac{1}{2}}},$$

где величина C не зависит от ε.

3. Заключение

В заключение укажем некоторые задачи, связанные с поведением L-функций в критической полосе, решение которых может быть получено на основании аппроксимационного подхода.

В 1975 году С. М. Воронин впервые доказал, что вертикальные сдвиги дзета-функции Римана с любой точностью приближают аналитические функции, не равные нулю внутри круга радиуса r, $0 < r < \frac{1}{4}$, и непрерывные на границе этого круга. Это свойство дзета-функции Римана С. М. Воронин назвал свойством универсальности. Позднее С. М. Воронин доказал свойство универсальности для достаточно широкого класса эйлеровых произведений, в частности, для L-функций Дирихле. В основе доказательства свойства универсальности лежат глубокие результаты, полученные С. М. Ворониным, относительно определённых функциональных рядов в пространстве Харди (см. по этому поводу работы [9],[10], [11]).

Представляет интерес иной подход к решению задачи об универсальности L-функций Дирихле, основанный на переносе отдельных свойств почти периодических функций, каковыми являются полиномы Дирихле, на L-функции Дирихле. При этом, наряду с задачей приближения функций непрерывными сдвигами, следует рассмотреть и задачу приближения дискретными сдвигами, при решении которой в последние годы были получены новые результаты (см. [12]).

Далее, в работах [13], [14], [15] был разработан численный алгоритм построения аппроксимационных полиномов для L-функций числовых полей. В связи с этим представляет интерес получить на основании апрроксимационного подхода аналитические свойства L-функций числовых полей, характерные для почти периодических функций.

Отметим, что решение поставленных выше задач планируется привести в других работах автора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеева. О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов, изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, С. 80 – 84

2. Матвеева. О. А. Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание ученой степени к. ф.-м. н. — Ульяновск, 2014, 110 с.

3. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, т. 17, Вып. 3, С. 115 – 124

4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости — М.: Изд-во МГУ, 1998, 480 с.

5. Левин Б. Я. Распредление корней целых функций — М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1956, 632 с.

6. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, 239 с.

7. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле — М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1947, 202 с.

8. Матвеев В. А., Матвеева О. А. О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2012, т. 13, Вып. 2, С. 106 – 116

9. Воронин С. М. Об универсальности дзета-функции Римана // Изв. АНСССР, Серия Математика, 1975, т. 39, №3, с. 457 – 486

10. Воронин С. М. Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов: Диссертация на соискание ученой степени д. ф.-м. н., МИАН СССР — М.: 1977, 90 с.

11. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана — М.: Физматлит, 1994, 376 с.

12. Mishou H. The joint distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-function // Lith. Math J., 2007, vol. 47, №1, P. 32 – 47.

13. Кузнецов В. Н., Матвеев В. А. К задаче численного определения нулей L-функций Дирихле числовых полей // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2015, т. 16, Вып. 2, С. 144 – 155

14. Матвеев В. А. Об одном численном алгоритме определения нулей L-функций Дирихле числовых полей // Материалы XXIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения— Тула: изд-во ТПГУ, 2015, С. 233 – 234

15. Матвеев В. А., Матвеева О. А. Об одном подходе получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле числовых полей. // Материалы XXIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения— Тула: изд-во ТПГУ, 2015, С. 234 – 235

REFERENCES

1. Matveeva, O. A. 2013, "Approksimacionnye polinomy i povedenie L-funkcij Dirihle v kriticheskoj polose", *Saratov: izd-vo SGU, Izvestija Sarat. un-ta. Matematika, Mehanika. Informatika.*, iss. 4, vol. 2, pp. 80 – 84.

2. Matveeva, O. A. 2014, "Analiticheskie svojstva opredelennyh klassov rjadov Dirihle i nekotorye zadachi teorii L-funkcij Dirihle", *Ulyanovsk: Thesis for the academic degree of the Ph.D.*, pp. 110.

3. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, "O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi kojefficientami", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 17, pp. 115 – 124.

4. Demidovich B. P. 1998, Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti , *Moscow, MSU publ.*, pp. 480.

5. Levin B. Ja. 1956, Raspredlenie kornej celyh funkcij , *Izd-vo tehniko-teoreticheskoj literatury.*, pp. 632.

6. Karatsuba, A. A. 1983, Osnovy analiticheskoj teorii chisel, *Moscow, Nauka*, pp. 239.

7. Chudakov N. G. 1947, Vvedenie v teoriju L-funkcij Dirihle , *Izd-vo tehniko-teoreticheskoj literatury.*, pp. 202.

8. Matveev V. A. Matveeva, O. A. 2013, "O povedenii v kriticheskoj polose rjadov Dirihle s konechnoznachnymi mul'tiplikatinymi kojefficientami i s ogranichennoj summatornoj funkciej", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 13, pp. 106 – 116.

9. Voronin S. M. 1975, "Ob universal'nosti dzeta-funkcii Rimana", *Izv. ANSSSR, Serija Matematika*, №3, vol. 39, pp. 457 – 486.

10. Voronin S. M. 1977, "Analiticheskie svojstva proizvodjashhih funkcij Dirihle arifmeticheskih ob'ektov:", *MIAN SSSR : Thesis for the academic degree of Doctor of Science.*, pp.90.

11. Voronin S. M. K̇aratsuba, A. A. 1983, Dzeta-funkcija Rimana , *Moscow, Fizmatlit*, pp. 376.

12. Mishou H. 2007, "The joint distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-function" *Lith. Math J.*, vol. 47, №1, pp. 32 – 47.

13. Kuznetsov, V. N. Matveev, V. A. 2015, "K zadache chislennogo opredelenija nulej L-funkcij Dirihle chislovyh polej", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 16, pp. 144 – 155.

14. Matveev, V. A. 2015, "Ob odnom chislennom algoritme opredelenija nulej L-funkcij Dirihle chislovyh polej", *Tula: izd-vo TPGU, Materialy XXIII Mezhdunarodnoj konferencii "Algebra, teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija"*, pp. 234 – 235.

15. Matveev V. A. Matveeva, O. A. 2015, "Ob odnom podhode poluchenija plotnostnyh teorem dlja nulej L-funkcij Dirihle chislovyh polej.", *Tula: izd-vo TPGU, Materialy XXIII Mezhdunarodnoj konferencii "Algebra, teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija"*, pp. 235 – 236.