ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.31 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-260-267

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ С НЕБОЛЬШОЙ ДЛИНОЙ ПЕРИОДА, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ И S-ЕДИНИЦАМИ[1]

Ю. В. Кузнецов, Ю. Н. Штейников (г. Москва)

Аннотация

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}(x)$– поле рациональных функций от одной переменной, $f \in \mathbb{Q}[x]$– свободный от квадратов многочлен нечетной степени равной $2g+1, g > 0$. Пусть для многочлена h степени 1 дискретное нормирование ν_h однозначно определенное на $\mathbb{Q}(x)$ имеет два неэквивалентных продолжения на поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ и ν'_h — одно из этих продолжений. Положим $S = \{\nu'_h, \nu_\infty\}$, где ν_∞ бесконечное нормирование поля L. В. П. Платоновым и М. М. Петруниным в работе [4] было показано (смотри также [2]), что S-единица в L существует тогда и только тогда, когда бесконечная непрерывная функциональная дробь, в которую раскладывается элемент $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ является периодичной. В данной работе исследуются непрерывные периодические дроби, возникающие из указанного разложения. Для некоторых небольших значений длины периода и квазипериода получены оценки на степени соответствующих фундаментальных S-единиц, а также некоторые необходимые условия, которым должны удовлетворять элементы указанных дробей.

При доказательстве существенно используются результаты, полученные В. П. Платоновым и М. М. Петруниным в работе [4].

Ключевые слова: непрерывные дроби, гиперэллиптические поля, S-единицы, нормирование.

Библиография: 15 названий.

ON SOME PROPERTIES OF CONTINUED PERIODIC FRACTIONS WITH SMALL LENGTH OF PERIOD RELATED WITH HYPERELLIPTIC FIELDS AND S-UNITS

Yu. V. Kuznetsov, Yu. N. Shteinikov (Moscow)

Abstract

Let $\mathbb{Q}$ be a field of rational numbers, let $\mathbb{Q}(x)$ be the field of rational functions of one variable, and let $f \in \mathbb{Q}[x]$ be a squarefree polynomial of odd degree which is equal to $2g+1, g > 0$. Suppose that for a polynomial h of degree 1 the discrete valuation ν_h which is uniquely defined on $\mathbb{Q}(x)$ has two nonequivalent extensions to the field $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ and ν'_h is one of these extensions. We put $S = \{\nu'_h, \nu_\infty\}$, where ν_∞ is an infinite valuation of the field L. In the paper [4] V. P. Platonov and M. M. Petrunin (see also [2]) obtained that a S-unit in L exists if and only if the element $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ expands into the periodic infinite continuous functional fraction. In this paper we study continuous periodic fractions connected with this expansion. For some small values of the length of period and quasiperiod we obtained estimates for the degrees of corresponding fundamental S-units and some necessary conditions with which the elements of these fractions have to satisfy.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10111).

In the proof we use the results obtained by V. P. Platonov and M. M. Petrunin in the paper [4].

Keywords: continued fractions, hyperelliptic fields, S-units, valuation.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Пусть k — поле характеристики отличной от 2, f- многочлен нечетной степени $2g+1$ и f свободен от квадратов. Обозначим через L поле $k(x)(\sqrt{f})$. Напомним, что для неприводимого над k многочлена h дискретное нормирование ν_h (элемента поля $k(x)$) задается равенством

$$\nu_h(h^m \frac{a}{b}) = m,$$

где многочлены a, b не делятся на h. Пусть далее h — многочлен степени 1 такой, что дискретное нормирование ν_h поля $k(x)$, задаваемое этим многочленом, имеет два продолжения на поле $k(x)(\sqrt{f})$. Одно из этих нормирований обозначим через ν'_h и определим $S = \{\nu'_h, \nu_\infty\}$. Обозначим через O_S кольцо S-целых элементов L, то есть таких элементов z, что $\nu_v(z) \geq 0$ для всех нормирований ν_v поля L, не принадлежащих S. Отметим сразу, что поскольку многочлен f имеет нечетную степень, то нормирование ν_∞ поля $k(x)$ имеет одно продолжение на поле L. Тот факт, что ν_h имеет два продолжения на поле L равносилен тому, что свободный коэффициент многочлена f при разложении f по степеням h есть квадрат из k^*. Мультипликативная группа кольца O_S — S-целых элементов поля L, называется группой S-единиц. Если существует хотя бы одна нетривиальная S-единица (то есть отличная от константы поля k), то в описанном нами случае группа S-единиц является прямым произведением k^* и бесконечной циклической группы. Образующие этой циклической группы называются фундаментальными S-единицами.

Имеется важная связь между существованием нетривиальных S-единиц и разложением $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ в непрерывную дробь в поле L. В. П. Платоновым и М. М. Петруниным в работе [4] (см. также работу [2]) было показано, что нетривиальная S-единица в L существует тогда и только тогда, когда бесконечная непрерывная функциональная дробь, в которую раскладывается элемент $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$, является периодичной.

Сформулируем основную цель данной работы. Мы будем изучать различные виды периодических непрерывных дробей для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ и пользуясь дополнительной информацией о виде такого разложения для небольших значений длины периода и квазипериода находить оценки на степени соответствующих фундаментальных S-единиц, а также получать необходимые условия, которым должны удовлетворять элементы указанных непрерывных дробей.

Работа организована следующим образом. Во втором разделе представлены некоторые важные утверждения о S-единицах и их связей с непрерывными дробями, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. В третьем разделе мы формулируем и доказываем основные результаты. В четвертом разделе приводятся заключительные комментарии.

2. Вспомогательные утверждения

Здесь мы приводим основные утверждения о S-единицах и непрерывных дробях, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Напомним понятия периода и квазипериода непрерывной функциональной дроби. Пусть задана непрерывная дробь $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Обозначим через α_n — полное частное с номером n, то есть $\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$.

Разложение в непрерывную дробь элемента α называется периодичным (квазипериодичным), если существует такие $i > j \geq 0$, что $\alpha_i = \alpha_j$ (соответственно $\alpha_i = c\alpha_j$, где $c \in k^*$). Наименьшее такое $i - j$ называется периодом (квазипериодом) рассматриваемой непрерывной дроби.

Всюду далее в качестве базового поля будем рассматривать поле $\mathbb{Q}$. Теорема 1 из работы [4] устанавливает связь между существованием нетривиальных S-единиц и периодичностью непрерывной дроби для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$.

Теорема 1. *[4] Непрерывная дробь для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ – периодична тогда и только тогда, когда существует нетривиальная S-единица поля L.*

Разложение в непрерывную дробь элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ имеет ряд важных особенностей.

Теорема 2. *[4] Пусть непрерывная дробь для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ периодична. Тогда эта непрерывная дробь имеет вид*

$$[C_0, \overline{C_1, \ldots, C_w}] \tag{1}$$

где $C_w = 2C_0$ и $C_i = C_{w-i}, 1 \leq i \leq w-1$.

Отметим, что аналогичное свойство имеет место и для чисел (для специальных квадратичных иррациональностей).

Следуя работе [1] введем понятие степени фундаментальной S-единицы. Пусть $p + q\sqrt{f}$ — фундаментальная S-единица и число $m > 0$ определяется из следующего норменного уравнения

$$p^2 - q^2 f = bh^m, b \in k^*. \tag{2}$$

Тогда m называется степенью фундаментальной S-единицы $p + q\sqrt{f}$.

С каждым шагом разложения произвольного элемента поля L в непрерывную дробь связаны два многочлена $L_j, M_j \in k[x]$, которые соответствуют многочленам A_j и B_j, из работы [7] (см. §5.1). Для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ многочлен L_j определяется из равенства

$$L_j = (-1)^{j+1}(h^{2g+2}P_j^2 - fQ_j^2), \tag{3}$$

где P_j, Q_j — числитель и соответственно знаменатель j-й подходящей дроби к $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$, см. [4]. Если n — такое минимальное целое неотрицательное число, при котором $L_n = bh^r$, $b \in k^*$, то с помощью подходящих числителя и знаменателя P_n, Q_n для $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ мы легко можем построить фундаментальную S-единицу (см. [4]). Сформулируем следующую теорему, доказанную в [4].

Теорема 3. *[4] Пусть $\alpha = \frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$. Пусть фундаментальная S-единица поля L существует, и ее степень равна m, и пусть n — минимальное целое неотрицательное число, при котором $L_n = bh^r$, $b \in k^*$. Если m является четным числом, тогда $r = 2g+2$. При этом длина квазипериода равна n, а длина периода равна либо n, либо $2n$. Если же m является нечетным числом тогда $r = 2g+1$. При этом длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна $2n$.*

В обозначениях Теоремы 3 определим t

$$-t = \sum_{1 \leq i \leq n-1} \nu_h(a_i). \tag{4}$$

Следуя рассуждениям, предложенным в [4], легко вывести соотношение, связывающее m, t, r.

Лемма 1. *Справедливо следующее соотношение*

$$m = 2t + r. \tag{5}$$

Отметим простое наблюдение, вытекающее из Теоремы 3. В случае когда степень фундаментальной S единицы m равна четному числу, n совпадает с длиной квазипериода. В случае же нечетного m величина n является половиной квазипериода (или периода).

Отметим также, что имеются некоторые дополнительные соотношения на сумму нормирований соседних a_i, которые установлены в [5].

3. Доказательство основных утверждений.

Будем рассматривать 5 видов непрерывной дроби для $\alpha = \frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$. В следующей лемме мы вычисляем выражение для f через разложение α в непрерывную дробь.

Proposition 1. *1. Если $\alpha = [a_0, \overline{2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + 1)$.*
2. Если $\alpha = [a_0, \overline{a_1, 2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1})$.
3. Если $\alpha = [a_0, \overline{a_1, a_1, 2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{a_1^2+1})$.
4. Если $\alpha = [a_0, \overline{a_1, l^{-1}a_1, 2la_0, l^{-1}a_1, a_1, 2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{l^2a_1^2+l})$.
5. Если $\alpha = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_1, 2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + \frac{a_2+2a_0+2a_0a_1a_2}{2a_1+a_1^2a_2})$.

Доказательство.

1. Пусть $u = [a_0, \overline{2a_0}]$. Тогда $\frac{1}{u-a_0} = [\overline{2a_0}] = a_0 + u$. Откуда получаем $u^2 = a_0^2 + 1$. Тем самым $f = h^{2g+2}(a_0^2 + 1)$.

2.Пусть $u = [a_0, \overline{a_1, 2a_0}]$. Имеем, $\frac{1}{u-a_0} = [\overline{a_1, 2a_0}]$. Далее вычитаем из обеих частей a_1 и находя обратное выражение, получим $\frac{u-a_0}{1-a_1u+a_0a_1} = a_0 + u$. Решая несложное уравнение, получим $u^2 = a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1}$. Теперь стоит заметить, что $f = h^{2g+2}u^2$.

4.Теперь разберем четвертый случай. Третий же случай получается из него при $l = 1$. При выводе соотношения будем использовать, что квазипериод равен 3. Это позволит получить соотношение на искомую величину. Пусть $u = [a_0, \overline{a_1, l^{-1}a_1, 2la_0, l^{-1}a_1, a_1, 2a_0}]$. Обозначим $w = \frac{1}{u-a_0}$. Имеем, $w = [a_1, l^{-1}a_1, \ldots]$. Далее, $\frac{1}{w-a_1} = [l^{-1}a_1, 2la_0, \ldots]$.

Вычитая из обеих частей $l^{-1}a_1$ и находя обратное выражение, получим $\frac{w-a_1}{1-l^{-1}a_1(w-a_1)} = [2la_0, l^{-1}a_1, \ldots]$. Вновь вычитая из обеих частей $2la_0$ и находя обратное, получим

$$\frac{1 - l^{-1}a_1w + l^{-1}a_1^2}{w - a_1 - 2la_0 + 2a_0a_1w - 2a_0a_1^2} = l^{-1}w. \tag{6}$$

Отсюда получаем, что $w^2 = \frac{(1+l^{-1}a_1^2)(1+2a_0)}{l^{-1}(1+2a_0a_1)}$.

Теперь заметим, что $f = (\frac{1}{w} + a_0)^2$. Подставляя предыдущее выражение в это получается нужный вид для f.

5. Пятый случай разбирается аналогично предыдущим. Предложение доказано.

□

Используя предыдущие утверждения остается найти условия, при которых так определенные выражения для f в действительности задают многочлен 5 степени и убедиться, что свободный коэффициент многочлена f при разложении по степеням h есть полный квадрат из k^*.

Перейдем к формулировке нашего основного утверждения. В следующей теореме $\alpha = \frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$, и величины m, t, r, g определены также как и в Теореме 3 и Лемме 1.

Теорема 4. *1. Ни для какого многочлена f нечетной степени $2g+1$ α не раскладывается в периодическую дробь вида $[a_0, \overline{2a_0}]$.*

2. Пусть $\alpha = [a_0, \overline{a_1, 2a_0}]$. Если степень m фундаментальной S-единицы поля L есть число четное, тогда

$$2g+4 \le m \le 4g+4.$$

Если же m – нечетное, то

$$m = 2g+1.$$

В обоих случаях a_1 делит a_0 как элемент $\mathbb{Q}[h^{-1}]$.

3. Пусть $\alpha = [a_0, \overline{a_1, l^{-1}a_1, 2la_0, l^{-1}a_1, a_1, 2a_0}]$. Тогда степень фундаментальной S-единицы есть четное число m и

$$2g+6 \le m \le 6g+6.$$

Кроме того $l^2a_1^2 + l$ делит $2a_0a_1 + 1$ как элемент $\mathbb{Q}[h^{-1}]$.

4. Пусть $\alpha = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_1, 2a_0}]$ и степень фундаментальной S-единицы поля L есть число нечетное. Тогда

$$2g+3 \le m \le 4g+3.$$

Кроме того $2a_1 + a_1^2a_2$ делит $a_2 + 2a_0 + 2a_0a_1a_2$ как элемент $\mathbb{Q}[h^{-1}]$.

Отметим, что в пунктах 2,3 нижняя оценка на величину m следует из Следствия 4 работы [1]. Оба неравенства пункта 4 также вытекают из указанного утверждения. Верхние же оценки в пунктах 2,3 более точные, чем оценки, получающиеся непосредственным применением Следствия 4 указанной работы. Данное обстоятельство обусловлено рассмотрением конкретных видов непрерывных дробей.

Доказательство. 1. Мы видим, что старший член выражения $a_0^2 + 1$ не тождественный нуль. Первый пункт доказан.

Перейдем ко второму пункту.

2. Во-первых согласно Лемме 1 и замечания к нему, мы имеем, что $m = 2t + 2g + 2$. Так как $t > 0$, получаем отсюда соотношение

$$m \ge 2g+4.$$

Отметим также, что $-t$ в данном случае является нормированием a_1.

Далее, $\nu(a_0) = -g-1$ и $a_0^2 \in \mathbb{Q}[h^{-1}]$. Поэтому отсюда немедленно заключаем, что выражение $\frac{2a_0}{a_1}$ в своем разложении не имеет членов с положительными степенями h. Значит, поскольку $2a_0, a_1 \in \mathbb{Q}[h^{-1}]$, то на самом деле $2a_0$ делится на a_1 как многочлен из $\mathbb{Q}[h^{-1}]$. Это гарантирует нам, что так определенное выражение для f является действительно многочленом. Сравнивая степени a_0 и a_1 заключаем еще одно соотношение $t \le g+1$, что равносильно

$$m \le 4g+4.$$

Пусть теперь $a_0 = A_0 + A_{-1}h^{-1} + \ldots + A_{-g-1}h^{-g-1}$ $a_1 = B_0 + B_{-1}h^{-1} + \ldots$, где $A_i, B_i \in \mathbb{Q}$, и рассмотрим случай когда A_0 и B_0 одновременно не нули. Тогда условие, что многочлен f является многочленом степени не выше $2g+1$ равносильно условию $2A_0/B_0 + A_0^2 = 0$.

Далее сформулируем условие, означающее что степень многочлена f есть в точности $2g+1$. Обозначим через w коэффициент при h^{-1} у элемента $\frac{2a_0}{a_1}$. Тогда последнее условие равносильно требованию $2A_0A_{-1} + w \ne 0$. Величину w можно определить сравнивая коэффициенты при h^{-1} у $2a_0$ и a_1. Это сравнение ведет к такому соотношению $wB_0 + \frac{2A_0}{B_0}B_{-1} = 2A_{-1}$. Отсюда однозначно выражается w.

Наконец должно выполняться условие, заключающееся в том, что свободный коэффициент многочлена f при разложении по степеням h является квадратом. Это условие будет автоматически выполняться, так как это следует из того, что нормирование по h величины a_0^2 строго меньше чем $\frac{2a_0}{a_1}$ и нужный коэффициент всегда окажется квадратом. Случай же нечетного m рассматривается аналогично. Соотношение $m = 2g + 1$ немедленно вытекает из Леммы 1. Второй пункт теоремы доказан. Перейдем к доказательству третьего пункта.

3. Отметим сразу, что указанный вид непрерывной дроби и Теорема 3 автоматически дают нам условие, что степень фундаментальной S-единицы может быть только числом четным. Мы видим, что $\nu(a_0) = -g - 1$ и $a_0^2 \in \mathbb{Q}[h^{-1}]$. Поэтому отсюда немедленно заключаем, что выражение $\frac{2a_0a_1+1}{l^2a_1^2+l}$ в своем разложении не имеет членов с положительными степенями h. Значит, поскольку $2a_0a_1 + 1, l^2a_1^2 + l \in \mathbb{Q}[h^{-1}]$, то на самом деле $2a_0a_1 + 1$ делится на $l^2a_1^2 + l$ как элементы $\mathbb{Q}[h^{-1}]$. Сравнение степеней этих многочленов дает $t/2 \leq g+1$. В нашем случае $t = -2\nu_h(a_1)$, поэтому последнее условие равносильно

$$m \leq 6g + 6.$$

Нетрудно заметить, что $t \geq 2$. Отсюда сразу получаем

$$m \geq 2g + 6.$$

Далее, $a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{l^2a_1^2+l}$ как многочлен из $\mathbb{Q}[h^{-1}]$ делится на h^{-1}. Запишем это условие в терминах коэффициентов a_0, a_1. Пусть как и раньше $a_0 = A_0 + A_{-1}h^{-1} + \ldots + A_{-g-1}h^{-g-1}$ и $a_1 = B_0 + B_{-1}h^{-1} + \ldots$, причем $l^2B_0^2 + l$ и $2A_0B_0 + 1$ одновременно не нули. Тогда условие, что многочлен f является многочленом степени не выше $2g + 1$ равносильно условию $A_0^2 + \frac{2A_0B_0+1}{l^2B_0^2+l} = 0$. Аналогично, вычисляя коэффициент при h^{-1} у выражения $a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{l^2a_1^2+l}$, можно получить условие того, что так определенный многочлен f, будет иметь степень $2g+1$.

Легко видеть, что свободный коэффициент при нулевой степени h у многочлена f определяется по a_0^2, и тем самым, дискретное нормирование ν_h действительно имеет два продолжения на поле L. Третий пункт также доказан.

Перейдем к доказательству 4 пункта.

4. В предыдущих обозначениях, и используя Теорему 3, получаем

$$m = 2t + 2g + 1, t = -\nu_h(a_1).$$

Видим, что $t \geq 1$, и значит, $m \geq 2g + 3$. Рассуждая аналогично как и в предыдущим пунктах, из условия делимости $a_2 + 2a_0 + 2a_0a_1a_2$ на $2a_1 + a_1^2a_2$ и сравнения нормирований, заключаем, что $g + 1 \geq t$. Это условие равносильно

$$m \leq 4g + 3.$$

Аналогично первому пункту можно также получить условия на коэффициенты a_i, чтобы f имел степень в точности $2g + 1$. Теорема доказана. □

4. Благодарности

Авторы этой статьи выражают благодарность академику В. П. Платонову и М. М. Петрунину за неоднократное обсуждение тематики статьи, ценные советы, предложения и некоторые интересные идеи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платонов В.П., Петрунин М.М. Фундаментальные S-единицы в гиперэллиптических полях и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых // ДАН, 2015, Т 465, № 1. С. 23-25.

2. Платонов В.П., Федоров Г.В. S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН, 2015, Т 465, № 5. С. 537-541.

3. Платонов В.П., Петрунин М.М. S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН, (2016), том 71, выпуск 5(431), С. 181–182.

4. Платонов В.П., Петрунин М.М. S-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // ДАН, 2016, Т 470, № 3. С. 260-265.

5. Жгун В.С, Платонов В.П, Федоров Г.В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и представление Мамфорда. // Доклады Академии наук, 2016, Т. 471, № 6:16.

6. Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел. // УМН, 2014, Т. 69, № 1(415), С. 3-38.

7. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывые дроби // Мат. Сборник. 2009. Т. 200, № 11, С. 15–44.

8. Schmidt W.M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta Arithm., 2000. Vol. 95, № 2, P. 139–166.

9. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. S-единицы в гиперэллиптических полях // УМН, 62:4 (2007). С. 149–150.

10. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях // Докл. РАН, 417:4 (2007). С. 446–450.

11. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. Непрерывные дроби и S-единицы в гиперэллиптических полях // УМН, 63:2 (2008). С. 159–160.

12. Платонов В.П., Федоров Г.В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях //Доклю РАН, 474:5 (2017). С. 540–544.

13. Платонов В.П., Федоров Г.В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях //Доклю РАН, 475:2 (2017). С. 133–136.

14. Adams W.W., Razar M.J. Multiples of point on elliptic curves and continued fractions //Proc. London Math. Soc. 1980 Vol. 41. № 3, P. 481–498.

15. Leprevost F. Points rationnels de torsion de jacobiennes de certaines courbes de genre 2 // C.R. Acad. Sci. Paris. 1993. Vol. 316, № 8, . P. 819–821.

REFERENCES

1. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2015, *Fundamental S-units in hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves Dokl. Math.*, vol. 92, № 3, pp. 667-669.

2. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2015, *S-units and periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields Dokl. Math.*, vol. 92, № 3, pp. 752-756.

3. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2016, *S-Units and periodicity in quadratic function fields Russian Math. Surveys*, vol. 71, № 5, pp. 973–975.

4. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2016, *S-units in hyperelliptic fields and periodicity of continued fractions Dokl. Math.*, vol. 94, № 2, pp. 532–537.

5. V. P. Platonov, V. S. Zhgoon, G. V. Fedorov 2016, *Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation. Dokl. Math.*, vol. 94, № 3, pp. 692–696.

6. Platonov V. P. 2014, *Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field. Russian Math. Surveys*, vol. 69, № 1, pp. 1-34.

7. Benyash-Krivets V. V., Platonov V. P. 2009, *Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions. Sb. Math.*, vol. 200, № 11, pp. 1587-1615.

8. Schmidt W. M. 2000, *On continued fractions and diophantine approximation in power series fields Acta Arithm.*, vol. 95, № 2, pp. 139–166.

9. Benyash-Krivets V. V., Platonov V. P. 2007, *S-units in hyperelliptic fields. Russian Math. Surveys*, vol. 62, № 4, pp. 784–786.

10. Benyash-Krivets V. V., Platonov V. P. 2007, *Groups of S-units in hyperelliptic fields. Dokl. Math.*, vol. 417, № 4, pp. 446–450.

11. Benyash-Krivets V. V., Platonov V. P. 2008, *Continued fractions and S-units in hyperelliptic fields. // Russian Math. Surveys*, vol. 63, № 2, pp. 357–359.

12. Platonov V. P., Fedorov G. V. 2017, *On the periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields. Dokl. Math.*, 95, № 3, pp. 254–258.

13. Platonov V. P., Fedorov G. V. 2017, *On the periodicity of continued fractions in elliptic fields. Dokl. Math.*, vol. 475, № 2, pp. 133–136.

14. Adams W. W., Razar M. J. 1980, *Multiples of point on elliptic curves and continued fractions. Proc. London Math. Soc.*, vol. 41, № 3, pp. 481–498.

15. Leprevost F. 1993, *Points rationnels de torsion de jacobiennes de certaines courbes de genre 2. C.R. Acad. Sci. Paris.*, vol. 316, № 8, pp. 819–821.

Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН), Отдел теоретической и прикладной алгебры и теории чисел.