ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-325-337

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЁТКИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЁТОК[1]

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова (г. Оренбург), Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

В работе дано новое общее определение алгебраической решётки. Доказывается, что любое рациональное преобразование алгебраической решётки снова будет алгебраической решёткой. Показано, что взаимная решётка к алгебраической решётки также будет алгебраической решёткой, соответствующей тому же чисто-вещественному алгебраическому полю F_s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Следуя за Б. Ф. Скубенко, изучаются фундаментальные системы из чисто-вещественного алгебраического поля F_s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Показана связь между фундаментальными системами алгебраических чисел и алгебраическими решётками.

В работе доказаны оценки для норм матрицы перехода от произвольной невырожденной матрицы к рациональной приближающей матрицы. С помощью леммы об оценки нормы матрицы перехода и обратной матрицы перехода, связывающих произвольную невырожденную матрицу и невырожденную рациональную приближающую матрицу, в работе показано, что множество алгебраических решёток всюду плотно в метрическом пространстве решёток.

Доказанная теорема является частным случаем более общей теоремы о том, что для любой решётки $\Lambda \in PR_s$ множество всех решёток рационально связанных с решёткой Λ всюду плотно в PR_s.

Аналогом данной теоремы является утверждение что для произвольной точки общего положения из $\mathbb{R}^s$ соответствующее s-мерное рациональное арифметическое пространство будет всюду плотно в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$.

Ключевые слова: алгебраические решётки, метрическое пространство решёток.

Библиография: 24 названия.

1. Введение

Как известно (см. [7], стр.165) множество всех s-мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda,\Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda,\Gamma)=\max(\ln(1+\mu),\ln(1+\nu)),\quad \mu=\inf_{\Lambda=A\cdot\Gamma}\|A-E_s\|,\quad \nu=\inf_{B\cdot\Lambda=\Gamma}\|B-E_s\|,$$

$$E_s=\begin{pmatrix}1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant s},\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1,&\text{при } i=j,\\ 0,&\text{при } i\neq j,\end{cases}\qquad \|A\|=s\cdot\max_{1\leqslant i,j\leqslant s}|a_{ij}|.$$

Метрическое пространство решёток PR_s играло существенную роль в работах [5], [6], [9]–[17], [21]–[24].

[1]Работа выполнена по грантам РФФИ № 15-01-01540а, №16-41-710194р_центр_а

В 1976 году в работах К. К. Фролова [19], [20] было сделано существенное, принципиальное продвижение в теоретико-числовом методе в приближенном анализе, основанное на применении алгебраических решёток. Ниже дадим общее определение алгебраической решётки.

Наряду с операциями сложения и вычитания векторов из $\mathbb{R}^s$ рассмотрим операции покоординатного умножения двух векторов и деления вектора на вектор общего положения:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1y_1,\ldots,x_sy_s),\quad \frac{\vec{x}}{\vec{y}}=\left(\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_s}{y_s}\right)\quad (y_1\neq 0,\ldots,y_s\neq 0).$$

Добавление операции покоординатного умножения превращает $\mathbb{R}^s$ в коммутативное кольцо с единицей $\vec{e}=(1,\ldots,1)$ и, кроме того, в алгебру над $\mathbb{R}$ ранга s.

Так как для стандартного базиса $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_s$ справедливы равенства $\vec{x}\cdot\vec{e}_j=x_j\cdot\vec{e}_j$ ($j=1,\ldots,s$), то умножение на $\vec{x}$ задаёт линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^s$. Матрицей этого линейного преобразования в стандартном базисе является диагональная матрица $D(\vec{x})$, которая невырожденная только для точек $\vec{x}$ общего положения. Обозначим через $D_s^{(0)}(\mathbb{R})$ множество всех диагональных матриц, содержащее как подмножество $D_s(\mathbb{R})$ — множество всех невырожденных диагональных матриц, так и подмножество вырожденных диагональных матриц, т. е. диагональных матриц, у которых на диагонали есть хотя бы один ноль. Соответствие $\vec{x}\to D(\vec{x})$ задаёт *регулярное $\mathbb{R}$-представление* пространства $\mathbb{R}^s$ в стандартном базисе. Таким образом всё $\mathbb{R}^s$ отображается взаимно однозначно на $D_s^{(0)}(\mathbb{R})$, а множество точек общего положения — на $D_s(\mathbb{R})$. При переходе к другим базисам регулярное представление меняется.

Согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву [3] *решёткой, повторяющейся умножением,* называется всякая решётка замкнутая относительно операции покоординатного умножения точек. Таким образом, если решётка Λ, повторяется умножением, то для любого $\vec{x}\in\Lambda$ справедливо соотношение

$$\vec{x}\cdot\Lambda=\{(x_1y_1,\ldots,x_sy_s)\,|\,\vec{y}\in\Lambda\}\subset\Lambda\cdot\Lambda\subset\Lambda.$$

Ясно, что если $\vec{x}$ — точка общего положения, то $\vec{x}\cdot\Lambda$ — подрешётка, повторяющаяся умножением, решётки Λ, так как свойства дискретности и замкнутости относительно сложения, вычитания и умножения для $\vec{x}\cdot\Lambda$ сохраняются, кроме того линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую.

Таким образом, с алгебраической точки зрения всякая решётка Λ, повторяющаяся умножением является, с одной стороны, коммутативным кольцом, а с другой стороны $\mathbb{Z}$-модулем.

Определение 1. *Точка $\vec{x}\neq\vec{0}$ называется делителем нуля, если у неё есть координаты равные* 0.

Определение 2. *Решётка не содержащая делителей нуля называется неприводимой.*

Для решёток, повторяющихся умножением, рассмотрим более важное *регулярное $\mathbb{Z}$-представление* точек этой решётки. Если решётка $\Lambda=\Lambda(\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s)$, повторяется умножением, то определены следующие целочисленные матрицы линейных преобразований:

$$A_k=\left(a_{i\,j}^{(k)}\right)_{(1\leqslant i,j\leqslant s)},\quad \begin{cases}\vec{\lambda}_k\cdot\vec{\lambda}_1=a_{1\,1}^{(k)}\vec{\lambda}_1+\ldots+a_{s\,1}^{(k)}\vec{\lambda}_s\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{\lambda}_k\cdot\vec{\lambda}_s=a_{1\,s}^{(k)}\vec{\lambda}_1+\ldots+a_{s\,s}^{(k)}\vec{\lambda}_s\end{cases}\quad (k=1,\ldots,s). \tag{1}$$

Если через $A_{\vec{x}}$ обозначим регулярное $\mathbb{Z}^s$-представление точки $\vec{x}$ решётки $\Lambda=\Lambda(\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s)$, то через внутренние координаты $m_1,\ldots,m_s$ этой точки в базисе $\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s$: $\vec{x}=m_1\vec{\lambda}_1+\ldots+m_s\vec{\lambda}_s$ матрица $A_{\vec{x}}$ выражается линейно в виде

$$A_{\vec{x}}=m_1A_1+\ldots+m_sA_s.$$

Определение 3. *Назовём вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)}) \in \mathbb{R}^s$ целым алгебраическим, если многочлен*

$$f_{\vec{\lambda}}(x) = (x - \lambda^{(1)}) \ldots (x - \lambda^{(s)}) \in \mathbb{Z}[x].$$

Вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ назовём алгебраическим, если найдется натуральное число n такое, что вектор $\vec{\lambda}_1 = n\vec{\lambda}$ будет целым алгебраическим вектором.

Определение 4. *Решётка $\Lambda \in PR_s$ называется алгебраической, если любой вектор $\lambda \in \Lambda$ будет алгебраическим вектором и Λ содержит неприводимую подрешётку Λ_1, повторяющуюся умножением.*

Важным свойством алгебраических решёток является тот факт, что норменный минимум $N(\Lambda)$, который определяется равенством

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x} \in \Lambda,\, \vec{x} \neq \vec{0}} |x_1 \ldots x_s|,$$

строго больше 0: $N(\Lambda) > 0$.

Пусть F_s — чисто-вещественное алгебраическое поле степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $F_s^{(1)} = F_s$, $F_s^{(2)}$, …, $F_s^{(s)}$ — его алгебраически сопряжённые поля. Обозначим через $\mathbb{A}(F_s)$ множество всех алгебраических решёток Λ таких, что координаты любого вектора $\vec{x} \in \Lambda$ являются алгебраически сопряженными числами из поля F_s, то есть $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ и $x_j = \theta^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, s)$, где $\theta^{(1)} = \theta$, $\theta^{(2)}$, …, $\theta^{(s)}$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел $\theta^{(j)} \in F_s^{(j)}$ для алгебраического числа $\theta \in F_s$.

Целью данной работы является доказательство следующей основной теоремы о плотности множества алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ в метрическом пространстве PR_s.

Теорема 1. *Для любого чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ множество алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ всюду плотно в метрическом пространстве PR_s.*

2. Свойства алгебраических решёток

Нам потребуется обозначение действия линейного преобразования, заданного матрицей M, на решётку $\Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ с базисом $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{1,s})$, …, $\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s,1}, \ldots, \lambda_{s,s})$ и базисной матрицей A

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \ldots & \lambda_{1,s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_{s,1} & \ldots & \lambda_{s,s} \end{pmatrix}.$$

Будем писать $M \cdot \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \Lambda(M \cdot \vec{\lambda}_1, \ldots, M \cdot \vec{\lambda}_s)$,

$$M \cdot A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = A(M \cdot \vec{\lambda}_1, \ldots, M \cdot \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{1,\nu}\lambda_{\nu,1} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{1,\nu}\lambda_{\nu,s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{s,\nu}\lambda_{\nu,1} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{s,\nu}\lambda_{\nu,s} \end{pmatrix}.$$

Таким образом произвольный вектор $\vec{x} = m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s$ под действием линейного преобразования с матрицей M переходит в вектор $M \cdot \vec{x} = m_1 M \cdot \vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s M \cdot \vec{\lambda}_s$ и

$$M \cdot \vec{\lambda}_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu,1} & \ldots & m_{\nu,s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \ldots & \lambda_{1,s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_{s,1} & \ldots & \lambda_{s,s} \end{pmatrix} \quad (\nu = 1, \ldots, s).$$

Приведём несколько лемм из работ [4], [13], [15] в нужной нам формулировке с полными доказательствами и несколько новых лемм.

Лемма 1. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & a_{ss} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s-1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{s-11} & \dots & a_{s-1s-1} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{s-1s} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{s1} & \dots & a_{ss-1} \end{pmatrix}.$$

Если $\det A_{11} \neq 0$, $a_{ss} \neq 0$ *и*

$$B_{11} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s-1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ b_{s-11} & \dots & b_{s-1s-1} \end{pmatrix} = A_{11}^{-1}, \quad B_{12} = B_{11}A_{12},$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} \frac{a_{s1}}{a_{ss}} & \dots & \frac{a_{ss-1}}{a_{ss}} \end{pmatrix}, \quad \vec{0}_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{0}^{\top}_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

то справедливы равенства

$$A = A_1 \cdot A_2,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & \vec{0}^{\top}_{s-1} \\ \vec{0}_{s-1} & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} E_{s-1} & B_{12} \\ B_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Перемножая клеточные матрицы, получим

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} \cdot B_{12} \\ a_{ss} \cdot B_{21} & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$A_{11} \cdot B_{12} = A_{11} \cdot B_{11}A_{12} = A_{12}, \quad a_{ss} \cdot B_{21} = A_{21},$$

то $A_1 \cdot A_2 = A$ и лемма доказана. □

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$. Таким образом, решётки Λ соответствует базисная матрица $A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$:

$$A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(s)} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \lambda_s^{(1)} & \dots & \lambda_s^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \lambda_\nu^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)} \quad (1 \leqslant \nu, \mu \leqslant s), \tag{2}$$

и для любого целочисленного вектора $\vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$ соответствующая точка $\vec{x} = \vec{x}(\vec{m}) = \vec{m}A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) \in \Lambda$. Ясно, что $x_\mu = m_1\lambda_1^{(\mu)} + \dots + m_s\lambda_s^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)}$ $(1 \leqslant \mu \leqslant s)$.

Назовём знаменателем алгебраического вектора $\vec{\lambda}_j$ наименьшее натуральное число n_j такое, что $n_j\vec{\lambda}_j$ — целый алгебраический вектор.

Множество алгебраических, линейно независимых чисел λ_1, …, λ_s из F_s согласно Б. Ф. Скубенко называется фундаментальной системой (см. [13]), а если среди чисел фундаментальной системы есть единица, то такая система называется приведенной фундаментальной системой.

Лемма 2. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ из F_s — произвольная фундаментальная система из F_s, а $\lambda \in F_s$ — произвольное алгебраическое число, тогда имеется однозначное представление*

$$\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_s\lambda_s, \quad m_j \in \mathbb{Q} \quad (1 \leqslant j \leqslant s).$$

Доказательство. Действительно, согласно Г. Вейлю (см. [2]) каждое алгебраическое поле F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является рациональным пространством размерности s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Нетрудно видеть, что произвольная фундаментальная система из F_s является базисом F_s как рационального пространства размерности s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. С другой стороны, каждый базис будет являться фундаментальной системой из F_s. Из свойств базиса рационального векторного пространства следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ из F_s — произвольная фундаментальная система из F_s и вектора $\vec{\lambda}_j$ заданы равенствами*

$$\vec{\lambda}_j = (\lambda_j^{(1)}, \ldots, \lambda_j^{(s)}), \quad \lambda_j^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)} \quad (1 \leqslant j, \mu \leqslant s),$$

тогда решётка $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$ — алгебраическая решётка.

Доказательство. Действительно, рассмотрим целый алгебраический вектор $\vec{\lambda}^* = n_1\vec{\lambda}_1$, который принадлежит решётки Λ. Рассмотрим целые алгебраические вектора $\vec{\lambda_j}^* = (\vec{\lambda}^*)^j$ $(2 \leqslant j \leqslant s)$. Из леммы 2 следует, что найдутся целые рациональные числа $m_{2,1}, \ldots, m_{s,s}$ и натуральные $n_2, \ldots, n_s$ такие, что $(m_{j,1}, \ldots, m_{j,s}, n_j) = 1$ $(2 \leqslant j \leqslant s)$ и

$$\vec{\lambda_j}^* = \frac{1}{n_j}\sum_{\nu=1}^{s} m_{j,\nu}\vec{\lambda}_\nu \quad (2 \leqslant j \leqslant s).$$

Положим $N = [n_2, \ldots, n_s]$, тогда каждый вектор

$$(N\vec{\lambda}^*)^j = \frac{N^j}{n_j}\sum_{\nu=1}^{s} m_{j,\nu}\vec{\lambda}_\nu \quad (2 \leqslant j \leqslant s)$$

будет целым алгебраическим вектором, принадлежащим решётке Λ. Так как подрешётка $\Lambda_1 = \Lambda(N\vec{\lambda}^*, (N\vec{\lambda}^*)^2, \ldots, (N\vec{\lambda}^*)^s)$ — решётка, повторяющаяся умножением, то утверждение леммы доказано. □

Обозначим через $\mathfrak{M}_s(\mathbb{Q})$ множество всех рациональных квадратных матриц порядка s, а через $\mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$ — подмножество невырожденных матриц.

Лемма 4. *Для базисной матрицы $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ вида (2) произвольной алгебраической решётки $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$ справедливо соотношение*

$$A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \cdot A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^\top \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q}). \tag{3}$$

Доказательство. Положим $Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \cdot A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^\top$, тогда

$$Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_1^{(s)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_s^{(1)} & \ldots & \lambda_s^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_s^{(1)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_1^{(s)} & \ldots & \lambda_s^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mu=1}^{s} \lambda_1^{(\mu)}\lambda_1^{(\mu)} & \ldots & \sum\limits_{\mu=1}^{s} \lambda_1^{(\mu)}\lambda_s^{(\mu)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \sum\limits_{\mu=1}^{s} \lambda_s^{(\mu)}\lambda_1^{(\mu)} & \ldots & \sum\limits_{\mu=1}^{s} \lambda_s^{(\mu)}\lambda_s^{(\mu)} \end{pmatrix}.$$

Известно, что если алгебраическое число $\lambda \in F_s$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$f(\lambda) = 0, \quad f(x) = x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x],$$

то для следа $\mathrm{Tr}(\lambda)$ справедливо соотношение $\mathrm{Tr}(\lambda) = -a_{s-1} \in \mathbb{Q}$.

Используя функцию след, матрицу $Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ можно записать в виде

$$Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_1) & \ldots & \mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_s) \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \mathrm{Tr}(\lambda_s\lambda_1) & \ldots & \mathrm{Tr}(\lambda_s\lambda_s) \end{pmatrix},$$

где λ_1, …, λ_s из F_s — соответствующая фундаментальная система из F_s. Тем самым утверждение леммы доказано. □

Лемма 5. *Для любой рациональной, невырожденной матрицы $M \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$ и алгебраической решётки $\Lambda \in \mathbb{A}(F_s)$ решётка $\Lambda_1 = M\Lambda$ — алгебраическая: $\Lambda_1 \in \mathbb{A}(F_s)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$ и базисная матрица $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ имеет вид (2), а

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \ldots & m_{1,s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ m_{s,1} & \ldots & m_{s,s} \end{pmatrix}, \quad m_{\nu,\mu} \in \mathbb{Q} \quad (1 \leqslant \nu, \mu \leqslant s),$$

тогда базисная матрица $A_1 = M \cdot A$ имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{1,\nu}\lambda_\nu^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{1,\nu}\lambda_\nu^{(s)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{s,\nu}\lambda_\nu^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{s,\nu}\lambda_\nu^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \sum_{\nu=1}^{s} m_{\mu,\nu}\lambda_\nu^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)} \quad (1 \leqslant \nu, \mu \leqslant s)$$

и лемма доказана. □

Для алгебраических решёток и сама решётка, и её взаимная решётка не имеют ненулевых точек с нулевым произведением координат. Для обоснования этого достаточно показать, что координаты любой ненулевой точки взаимной решётки для алгебраической решетки образуют полный набор алгебраически сопряженных чисел из одного и того же алгебраического чисто вещественного поля степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$, заданную равенством

$$\Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu^{(1)} m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu^{(s)} m_\nu \right) \middle| \, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{4}$$

Так как координаты любой ненулевой точки $\vec{x} \in \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ — алгебраически сопряженные алгебраические числа, то произведение $x_1 \ldots x_s$ — ненулевое рациональное число.

Из предыдущего следует, что каждая строка матрицы $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ состоит из полного набора алгебраически сопряженных чисел, а все элементы ν-ого столбца матрицы принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $F_s^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Так как точки решетки $\Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ — целочисленные линейные комбинации строк матрицы $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$, то координаты каждой точки $\vec{x} \in \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел, а ν-ая координата для любой точки этой решетки принадлежит одному и тому же алгебраическому полю $F_s^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

Покажем, что этим свойством обладает и взаимная решётка.

Обозначим через $U_{\nu\,j} = U_{\nu\,j}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$ элементы матрицы $Q(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)^{-1}$. Ясно, что из симметричности матрицы $Q(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$ вытекает симметричность матрицы $Q(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)^{-1}$.

Обозначим через $A^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$ базисную матрицу взаимной решётки $\Lambda^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$ к решётке $\Lambda(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$, которая взаимна базисной матрице $A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$A^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}\lambda_k^{(1)} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}\lambda_k^{(s)} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}\lambda_k^{(1)} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}\lambda_k^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}\lambda_k^{(1)} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}\lambda_k^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Действительно, из равенства

$$Q(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) \cdot A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)^{\top}$$

вытекает $A^{-1}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)^{\top} \cdot Q(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)^{-1}$. Так как

$$A^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = (A^{-1}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s))^{\top}$$

и $Q^{\top}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = Q(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$, то из предыдущего следует

$$A^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \Big(A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)^{\top} \cdot Q(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)^{-1}\Big)^{\top} = Q(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)^{-1} \cdot A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) =$$

$$= \begin{pmatrix} U_{1\,1} & \dots & U_{1\,s} \\ U_{2\,1} & \dots & U_{2\,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{s\,1} & \dots & U_{s\,s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(s)} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \lambda_s^{(1)} & \dots & \lambda_s^{(s)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}\lambda_k^{(1)} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}\lambda_k^{(s)} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}\lambda_k^{(1)} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}\lambda_k^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}\lambda_k^{(1)} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}\lambda_k^{(s)} \end{pmatrix},$$

и лемма доказана. □

Лемма 7. *Произвольная точка $\vec{x}$ решетки $\Lambda^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$ имеет вид*

$$\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k} m_\nu\right)\lambda_k^{(1)}, \dots, \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k} m_\nu\right)\lambda_k^{(s)}\right),$$

где $m_1, \dots, m_s$ — произвольные целые числа.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из вида матрицы $A^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$, так как произвольная точка решётки $\Lambda^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$ является линейной целочисленной комбинацией строк матрицы $A^*(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$. □

3. Основная теорема о плотности множества алгебраических решёток

Приступим к доказательству основной теоремы о плотности множества алгебраических решёток, предварительно докажем лемму о норме обратной матрицы близкой к единичной для этого нам потребуется одна лемма из [7] (см. стр. 158).

Лемма 8. *Пусть матрица $A = E_s + B$, причём $\|B\| < 1$. Тогда матрица A — невырожденная, причём матрица $C = E_s - A^{-1}$ удовлетворяет условию $\|C\| \leqslant \frac{\|B\|}{1-\|B\|}$.*

Доказательство. См. [7], стр. 158. □

Лемма 9. *Пусть для невырожденной матрице A:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

и натурального $N > 2\|A^{-1}\|s$ определены матрицы A_N, Θ_N, $A = A_N + \Theta_N$:

$$A_N = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{N} & \dots & \frac{m_{1s}}{N} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{m_{s1}}{N} & \dots & \frac{m_{ss}}{N} \end{pmatrix}, \quad \Theta_N = \begin{pmatrix} \frac{\theta_{11}}{N} & \dots & \frac{\theta_{1s}}{N} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\theta_{s1}}{N} & \dots & \frac{\theta_{ss}}{N} \end{pmatrix}, \quad m_{\nu\mu} = [Na_{\nu\mu}], \quad \theta_{\nu\mu} = \{Na_{\nu\mu}\}.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\begin{gathered} A = A_N(E_s + A_N^{-1}\Theta_N), \quad A_N = A(E_s - A^{-1}\Theta_N), \\ \|A^{-1}\Theta_N\| \leqslant \frac{s\|A^{-1}\|}{N}, \quad \|A_N^{-1}\Theta_N\| \leqslant \frac{s(s+1)\|A^{-1}\|}{N}, \\ A = (E_s + \Theta_N A_N^{-1})A_N, \quad A_N = (E_s - \Theta_N A^{-1})A, \\ \|\Theta_N A^{-1}\| \leqslant \frac{s\|A^{-1}\|}{N}, \quad \|\Theta_N A_N^{-1}\| \leqslant \frac{s(s+1)\|A^{-1}\|}{N}. \end{gathered}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу неравенства $N > \|A^{-1}\|s$ выполняется оценка $\|A^{-1}\Theta_N\| \leqslant \frac{s\|A^{-1}\|}{N} < 1$, поэтому из леммы 8 вытекает, что матрица $A_N = A(E_s - A^{-1}\Theta_N)$ — невырожденная матрица.

Так как согласно лемме 8 при $N > 2\|A^{-1}\|s$

$$\|E_s - (E_s - A^{-1}\Theta_N)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\Theta_N\|}{1 - \|A^{-1}\Theta_N\|} \leqslant \frac{s\|A^{-1}\|}{N - s\|A^{-1}\|} < 1,$$

то

$$\|(E_s - A^{-1}\Theta_N)^{-1}\| \leqslant \|E_s\| + \|E_s - (E_s - A^{-1}\Theta_N)^{-1}\| \leqslant s + 1.$$

Поэтому

$$\|A_N^{-1}\Theta_N\| \leqslant \|A^{-1}\|\|(E_s - A^{-1}\Theta_N)^{-1}\| \leqslant \frac{s(s+1)\|A^{-1}\|}{N}.$$

Остальные соотношения доказываются аналогично и лемма полностью доказана. □

Доказательство. **[Основной теоремы]** Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda \in PR_s$ с базисной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,s} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \lambda_{s,1} & \dots & \lambda_{s,s} \end{pmatrix}$$

и базисом $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{1,s}), \ldots, \vec{\lambda}_1 = (\lambda_{s,1}, \ldots, \lambda_{s,s})$, то есть $\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A$. Пусть N — достаточно большое натуральное число, оценки для которого снизу укажем позднее. Рассмотрим фиксированную алгебраическую решётку $\Lambda_0 = \Lambda_0(\vec{\lambda}_{1,0}, \ldots, \vec{\lambda}_{s,0}) \in \mathbb{A}(F_s)$, заданную равенством

$$\Lambda_0(\vec{\lambda}_{1,0}, \ldots, \vec{\lambda}_{s,0}) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu,0}^{(1)} m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu,0}^{(s)} m_\nu \right) \middle| m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{5}$$

которой соответствует базисная матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_{1,0}^{(1)} & \ldots & \lambda_{1,0}^{(s)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_{s,1}^{(1)} & \ldots & \lambda_{s,0}^{(s)} \end{pmatrix}$$

и базис $\vec{\lambda}_{1,0} = (\lambda_{1,0}^{(1)}, \ldots, \lambda_{1,0}^{(s)}), \ldots, \vec{\lambda}_{s,0} = (\lambda_{s,1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{s,0}^{(s)})$, то есть $\Lambda_0 = A_0 \cdot \mathbb{Z}^s$.

Так как базисные матрицы A и A_0 — невырожденные, то найдётся невырожденная матрица

$$M = A \cdot A_0^{-1}, \quad M^{-1} = A_0 \cdot A^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

такая, что $A = M \cdot A_0$, $A_0 = M^{-1} \cdot A$ и решётки связаны равенствами $\Lambda = M \cdot \Lambda_0$, $\Lambda_0 = M^{-1} \cdot \Lambda$.

Определим матрицы M_N и Θ_N из условий

$$M_N = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{N} & \ldots & \frac{m_{1s}}{N} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{m_{s1}}{N} & \ldots & \frac{m_{ss}}{N} \end{pmatrix}, \quad \Theta_N = \begin{pmatrix} \frac{\theta_{11}}{N} & \ldots & \frac{\theta_{1s}}{N} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\theta_{s1}}{N} & \ldots & \frac{\theta_{ss}}{N} \end{pmatrix}, \quad m_{\nu\mu} = [N a_{\nu\mu}], \quad \theta_{\nu\mu} = \{N a_{\nu\mu}\}$$

и рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda_N = \Lambda_N(\vec{\lambda}_{1,0}, \ldots, \vec{\lambda}_{s,0}) = M_N \cdot \Lambda_0(\vec{\lambda}_{1,0}, \ldots, \vec{\lambda}_{s,0}) \in \mathbb{A}(F_s)$.

Так как $M = M_N + \Theta_N$, то для решёток Λ и Λ_N справедливы соотношения

$$\Lambda = (E_s + \Theta_N M_N^{-1}) \Lambda_N, \quad \Lambda_N = (E_s - \Theta_N M^{-1}) \Lambda.$$

Отсюда в силу леммы 9 следует, что

$$\rho(\Lambda, \Lambda_N) \leqslant \ln \frac{s(s+1) \|A^{-1}\|}{N}.$$

Поэтому, полагая $N > s(s+1)\|A^{-1}\| e^{-\varepsilon}$, получим $\rho(\Lambda, \Lambda_N) \leqslant \varepsilon$, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

4. Заключение

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda \in PR_s$. Согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву [3] *решётка Λ и решётка Λ_1 рационально связаны, если $\Lambda_1 = M \cdot \Lambda$, $\Lambda = M^{-1} \cdot \Lambda_1$ и $M \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$.* Множество всех решёток Λ_1 рационально связанных с решёткой Λ обозначим через $\mathfrak{Q}(\Lambda)$.

Дословно повторяя доказательство основной теоремы можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой решётки $\Lambda \in PR_s$ множество всех решёток рационально связанных с решёткой Λ всюду плотно в PR_s.*

Другими словами: $\mathfrak{Q}(\Lambda)$ всюду плотно в PR_s.

Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ — произвольная точка общего положения, то есть $\alpha_j \neq 0$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Рассмотрим рациональное s-мерное арифметическое пространство $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \subset \subset \mathbb{R}^s$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, которое определяется равенством

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \{(m_1\alpha_1, \ldots, m_s\alpha_s) | \vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Q}^s\}.$$

Нетрудно видеть, что справедлива следующая теорема

Теорема 3. *Рациональное s-мерное арифметическое пространство $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ всюду плотно в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$.*

Именно на этом факте основаны теоремы 1, 2 и 3 из работы [18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акрамов У. А. Теорема изоляции для форм, отвечающих чисто вещественным алгебраическим полям, // Аналитическая теория чисел и теория функций: 10. Зап. науч. семинара. ЛОМИ. 1990. N 185. С. 5–12.

2. Г. Вейль Алгебраическая теория чисел. М.: Гос. из-во И. Л. 1947. 226 с.

3. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1940. Т. 11. С. 3–340.

4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

5. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

6. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

7. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

8. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

9. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток Тез. докл. III Междунар. конф. // Современные проблемы теории чисел: Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

10. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

11. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

12. Скубенко Б. Ф. Теорема изоляции для разложимых форм чисто вещественных алгебраических полей степени $n \geqslant 3$ Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 112. 1981. С. 167–171.

13. Б. Ф. Скубенко К совместным приближениям алгебраических иррациональностей // Целочисленные решетки и конечные линейные группы, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 116, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, С. 142–154; J. Soviet Math., 26:3 (1984), 1922–1930.

14. Скубенко Б. Ф. О произведении n линейных форм от n переменных // Труды МИАН СССР. N 158. 1981. С. 175–179.

15. Б. Ф. Скубенко Циклические множества точек и решеток // Аналитическая теория чисел и теория функций. 8, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 160, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1987, С. 151–158.

16. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 168. 1988. С. 125–139.

17. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geqslant 3$ // Модулярные функции и квадратичные формы. 1. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 183. 1990. С. 142–154.

18. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.

19. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

20. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

21. Шмелева Т. С. Непрерывность гиперболического параметра решетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 92–100.

22. Т. С. Шмелева О непрерывности гиперболического параметра решеток // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы: материалы VII Международной конференции. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. 2010. С. 202–206.

23. Т. С. Шмелева Приближение решеток // Материалы XII Международной конференции Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященной восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. С. 311–314.

24. Т. С. Шмелева Приближение решеток и их применение // Материалы XIII Международной конференции Алгебра,теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 384–386.

REFERENCES

1. Akramov, U. A. 1990, "The isolation theorem for forms corresponding to purely real algebraic fields", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 10 Zap. nauchn. sem. LOMI*, no. 185, pp. 5–12.

2. Vejl', G. 1947, *Algebraicheskaya teoriya chisel [Algebraic number theory]*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moscow, Russia.

3. Delone, B. N. & Faddeev, D. K. 1940, "Theory of irrationalities of the third degree", *Trudy matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova* (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics), vol. 11, pp. 3–340.

4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skij, M. N., Dobrovol'skij, N. M. & Dobrovol'skij, N. N. 2012, "Hyperbolic zeta functions of grids and grids and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

5. Dobrovol'skij, M. N. 2005, *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya* [Multidimensional number-theoretic grids and grids and their applications], Izdatel'stvo tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L. N. Tolstogo, Tula, Russia.

6. Dobrovol'skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices", *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

7. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

8. Korobov, N. M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Numerical-numerical methods in approximate analysis], 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.

9. Rebrova, I. YU. "The continuity of the hyperbolic zeta function of the lattices", *Tez. dokl. III Mezhdunar. konf. "Sovremennye problemy teorii chisel"* (Abstracts of the report of the III International Conference "Contemporary problems of number theory"), Tula, 1996, p. 119.

10. Rebrova, I. YU. 1998, "The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.

11. Rebrova, I. YU. 1999, "The lattice space and the functions on it", Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

12. Skubenko, B. F. 1981, "The isolation theorem for decomposable forms of purely real algebraic fields of degree $n > 3$", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij.* 4 Zap. nauchn. sem. LOMI, no.112, pp. 167–171.

13. Skubenko, B. F. 1982, "To joint approximations of algebraic irrationalities", *Tselochislennye reshetki i konechnye linejnye gruppy, Zap. nauchn. sem. LOMI*, pp. 142–154.

14. Skubenko, B. F. 1981, "On the product of n linear forms of n variables", *Trudy MIAN SSSR*, no.158, pp. 175–179.

15. Skubenko, B. F. 1987, "Cyclic sets of points and lattices", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 8 Zap. nauchn. sem. LOMI*, pp. 151–158.

16. Skubenko, B. F. 1988, "The minima of a decomposable cubic form in three variables", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij.* 9 Zap. nauchn. sem. LOMI, no.168, pp. 151–158.

17. Skubenko, B. F. 1990, "Minima of decomposable forms of degree n of n variables for $n > 3$", *Modulyarnye funktsii i kvadratichnye formy. 1 Zap. nauchn. sem. LOMI*, no.183, pp. 142–154.

18. Trikolich, E. V., & Yushina, E. I. 2009, “Chain fractions for quadratic irrationalities from the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$“, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 10, no. 1, pp. 77–94.

19. Frolov, K. K. 1976, “Estimates from above of the error of quadrature formulas on function classes“, *DAN SSSR*, no.4, pp. 818–821.

20. Frolov, K. K. 1979, “Quadrature formulas on function classes“, Ph.D. Thesis, Computing Center of the Russian Academy of Sciences of the USSR, Moscow, Russia.

21. Shmeleva, T. S. 2009, “The continuity of the hyperbolic lattice parameter“, *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki*, no.3, pp. 92–100.

22. Shmeleva, T. S. “On the continuity of the hyperbolic parameter of lattices“, *Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya, posvyashhennoj pamyati professora Anatoliya Alekseevicha Karatsuby: materialy VII Mezhdunarodnoj konferentsii* (Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications, dedicated to the memory of Professor Anatoly Alekseevich Karatsuba: materials of the VII International Conference), Tula, 2010, pp. 202–206.

23. Shmeleva, T. S. “Approximation of lattices“, *Materialy XII Mezhdunarodnoj konferentsii Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya, posvyashhennoj vos'midesyatiletiyu professora Viktora Nikolaevicha Latysheva* (Materials of the XII International Conference Algebra and Number Theory: Contemporary Problems and Applications, dedicated to the eightieth birthday of Professor Viktor Nikolaevich Latyshev), Tula, 2014, pp. 311–314.

24. Shmeleva, T. S. “Approximation of gratings and their application“, *Materialy XIII Mezhdunarodnoj konferentsii Algebra,teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya, posvyashhennoj vos'midesyatipyatiletiyu so dnya rozhdeniya professora Sergeya Sergeevicha Ryshkova* (Materials of the XIII International Conference Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications, dedicated to the eightieth anniversary of the birth of Professor Sergey Sergeevich Ryshkov), Tula, 2015, pp. 384–386.

Оренбургский государственный университет
Тульский государственный университет
Тульский государственный педагогический университет