ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 512.5 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-305-324

НОВЫЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ЦЕЛЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ

Н. П. Панов (г. Ульяновск)

Аннотация

Исследуются почти нильпотентные многообразия неассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики в классе всех алгебр, удовлетворяющих тождественному соотношению $x(yz) \equiv 0$. Ранее в данном классе алгебр для любого натурального $m \geqslant 2$ была определена алгебра A_m, порождающая почти нильпотентное многообразие $var(A_m)$ экспоненциального роста с экспонентой, равной m. В настоящей работе исследуются числовые характеристики многообразий $var(A_m)$. Для этого в относительно свободных алгебрах многообразий $var(A_m)$ рассматриваются пространства полилинейных элементов, соответствующих левонормированным многочленам с фиксированной образующей на первой позиции.

Для каждого такого пространства как вполне приводимого модуля над групповой алгеброй симметрической группы определены все кратности в разложении соответствующего кохарактера в сумму неприводимых характеров.

На основе определений данных кратностей приводится метод вычисления кратностей, соответствующих полилинейным частям относительно свободных алгебр многообразий $var(A_m)$. С помощью приведенного метода вычисления кратностей для каждого $n \geqslant 1$ получены кодлины многообразий $var(A_m)$, $m \geqslant 2$. Для каждого многообразия $var(A_m)$, $m \geqslant 2$, в работе также описано соответствующее множество определяющих тождеств.

Ключевые слова: тождество, линейная алгебра, почти нильпотентное многообразие, экспоненциальный рост.

Библиография: 16 названий.

NEW PROPERTIES OF ALMOST NILPOTENT VARIETIES WITH INTEGER EXPONENTS

N. P. Panov (Ulyanovsk)

Abstract

Almost nilpotent varieties of nonassociative algebras over a field of zero characteristic in the class of all algebras satisfying identical relation $x(yz) \equiv 0$ are studied. Earlier in this class of algebras for each natural number $m \geqslant 2$ the algebra A_m generating the almost nilpotent variety $var(A_m)$ of exponential growth with exponent of m was defined. In the paper numerical characteristics of varieties $var(A_m)$ are studied.

To this end in the relatively free algebras of the varieties $var(A_m)$ the spaces of multilinear elements corresponding to left normed polynomials with fixed variable on the first position are considered.

Each space is considered as completely reducible module of the symmetric group and multiplicities in the decomposition of the corresponding cocharacter into sum of irreducible characters are calculated. The multiplicities corresponding to the multilinear parts of relatively free algebras of the variety $var(A_m)$ are defined by the calculated values. Colengths of the varieties $var(A_m)$, $m \geqslant 2$ are obtained using this method. For each $m \geqslant 2$ the set of identical relations that defines the variety $var(A_m)$ is obtained.

Keywords: polynomial identity, linear algebra, almost nilpotent variety, exponential growth.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

В данной работе продолжается изучение многообразий алгебр над полем нулевой характеристики, а именно почти нильпотентных многообразий с целой экспонентой в классе всех алгебр, удовлетворяющих тождественному соотношению $x(yz) \equiv 0$. Информацию об алгебрах с тождествами, в том числе используемые далее определения и обозначения, можно найти в монографиях [1], [2], [3]. Результаты, касающиеся некоторых почти нильпотентных многообразий в различных классах алгебр, представлены в обзоре [4].

Хорошо известно, что в классе всех ассоциативных алгебр единственным почти нильпотентным многообразием является многообразие всех ассоциативно-коммутативных алгебр ([5], Remark 1). В классе алгебр Ли также существует единственное почти нильпотентное многообразие — подмногообразие всех алгебр, удовлетворяющих тождеству метабелевости $(xy)(zt) \equiv 0$ [6]. Ровно два почти нильпотентных многообразия существуют в классе алгебр Лейбница [7]. Все почти нильпотентные подмногообразия подэкспоненциального (полиномиального или промежуточного) роста определены в многообразиях алгебр с тождеством $x(yz) \equiv 0$ [8], метабелевых коммутативных алгебр [9], метабелевых антикоммутативных алгебр [10]. В каждом многообразии таких подмногообразий также ровно два. Дискретная серия почти нильпотентных многообразий линейного роста, определенных с помощью бесконечных периодических слов в алфавите из двух символов, представлена в работе [11].

Перечисленные почти нильпотентные многообразия имеют подэкспоненциальный рост. И хотя это их свойство кажется естественным, известны примеры почти нильпотентных многообразий экспоненциального роста. Рассмотрим подробнее в классе алгебр с тождеством $x(yz) \equiv 0$ подмногообразие, обозначим его через $var(A_2)$, определенное в работе [5]. Это многообразие экспоненциального роста с экспонентой, равной двум. Для его изучения в соответствующей относительно свободной алгебре авторы рассматривали пространства полилинейных элементов, соответствующих многочленам, все мономы которых являются левонормированными и имеют фиксированную образующую на первой позиции. Данные пространства рассматривались как вполне приводимые модули симметрических групп, и авторы оставили открытым вопрос о точном значении кратностей с диаграммами Юнга из двух строк равной длины. Ответ на него дан в [12], где также представлены основные числовые характеристики многообразия $var(A_2)$ и множество определяющих его тождеств. В работе [13] по аналогии с $var(A_2)$ для каждого натурального $m \geqslant 3$ определено многообразие $var(A_m)$ экспоненты m, имеющее почти нильпотентное подмногообразие. Позже было доказано, что все многообразия $var(A_m)$, $m \geqslant 3$, сами являются почти нильпотентными [14]. Целью настоящей работы является описание числовых характеристик и определяющих тождеств многообразий $var(A_m)$, $m = 3, 4, \ldots$.

Обозначим основное поле через Φ, и пусть в свободной алгебре $F(X)$ счетного ранга P_n — пространство полилинейных неассоциативных многочленов от $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$. Так как характеристика Φ равна нулю, то любое тождество эквивалентно некоторой системе полилинейных тождеств, и информацию о многообразии $\mathbf{V}$ можно получить, изучив в соответствующей относительно свободной алгебре $F(X, \mathbf{V})$ подпространства $P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V}))$. Одной из основных числовых характеристик многообразия $\mathbf{V}$ является последовательность коразмерностей $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geqslant 1}$, $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$. Говорят, что её асимптотическое поведение определяет рост многообразия $\mathbf{V}$, и что экспонента многообразия $\mathbf{V}$ экспоненциального роста равна α, если предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$ существует и равен α. Известно, что пространство $P_n(\mathbf{V})$ можно рассматривать как вполне приводимый ΦS_n-модуль с кохарактером $\chi_n(\mathbf{V})$, равным сумме неприводимых характеров χ_λ с кратностями $m_\lambda(\mathbf{V})$, которые соответствуют диаграммам Юнга λ разбиений n, $\lambda \vdash n$, S_n — симметрическая группа. Для каждого $n \geqslant 1$ с помощью кратностей $m_\lambda(\mathbf{V})$, $\lambda \vdash n$, определяются коразмерность $c_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) d_\lambda$ и кодлина $l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})$, где d_λ — степень неприводимого характера χ_λ.

Так как во всех рассматриваемых далее алгебрах элементы имеют левонормированное строение, то договоримся записывать их без скобок, например $abab = (((ab)a)b)$. В алгебрах операцию умножения справа на образующую a будем также обозначать соответствующим оператором R_a, например $a(R_bR_c)^2 = abcbc$. Оператор умножения справа на свободную образующую x обозначим соответствующей заглавной буквой X, например $x_0(XY)^2 = x_0xyxy$. При этом будем считать, что $x_0w(X_1,\dots,X_k) = x_0$, если степень ассоциативного монома w от операторов $X_1,\dots,X_k$ равна нулю. Также договоримся считать всякое произведение вида $ab_ib_{i+1}\dots b_k$, где $i > k$, равным a. В произведении пропуск множителя x, находящегося на третьей или последующих позициях, обозначим через $\widehat{X}$, например $x_0X_1\widehat{X}_2X_3 = x_0X_1X_3$. Указанный символ над оператором будем использовать только для обозначения пропуска множителя или отсутствия элемента в множестве. Другие символы над операторами или образующими используем для обозначения альтернирования, например

$$x_0\overline{X}_1\overline{X}_2\widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_2 = \sum_{p,q\in S_2}(-1)^p(-1)^q x_0X_{p(1)}X_{p(2)}Y_{q(1)}Y_{q(2)},$$

$$z\overline{R}_{a_1}\overline{R}_{a_2} = zR_{a_1}R_{a_2} - zR_{a_2}R_{a_1},$$

где $(-1)^p$ — четность перестановки p. Для краткости $k \geqslant 2$ следующих друг за другом различных альтернированных произведений по t множителей X_i, $i = 1,\dots,t$, будем обозначать через $(\overline{X}_1\dots\overline{X}_t)^k$, например $x_0(\overline{X}_1\dots\overline{X}_t)^2 = x_0(\overline{X}_1\dots\overline{X}_t)(\widetilde{X}_1\dots\widetilde{X}_t)$.

Обозначим через $S_{i,j}$ подгруппу S_n, $n \geqslant 1$, элементами которой являются подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & \dots & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & j+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

переставляющие числа с i по j, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Наконец, приведем следующее предложение из работы [15], с помощью которого докажем все основные результаты.

Предложение 1. *Пусть T — таблица Юнга, соответствующая разбиению $\lambda \vdash n$, и $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ — ΦS_n-модуль, где M_i — изоморфные неприводимые подмодули с характером χ_λ. Тогда k равно максимальному числу линейно независимых элементов $g \in M$ таких, что $\sigma \cdot g = g$ для любого элемента $\sigma \in R_T$.*

2. Определения алгебр и вспомогательные утверждения

Рассматриваемые алгебры A_m, $m = 2,3,\dots$, заданы образующими $z, a_1,\dots,a_m$ и следующими определяющими соотношениями:

1. $a_iu = 0,\ u \in A_m,\ 1 \leqslant i \leqslant m,$
2. $\big(zw(R_{a_1},\dots,R_{a_m})\big)\big(zw'(R_{a_1},\dots,R_{a_m})\big) = 0,\ \deg w, \deg w' \geqslant 0,$
3. $z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k a_{i_1}\dots a_{i_s}a_{i_{s+1}}\dots a_{i_t} + z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k a_{i_1}\dots a_{i_{s+1}}a_{i_s}\dots a_{i_t} = 0,$

где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1,\dots,i_m \leqslant m$. Из определяющих соотношений 3 следуют равенства $z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k w(R_{a_1},\dots,R_{a_m}) = 0$ для $k \geqslant 0$ и мономов w, $\deg w \leqslant m$, степени не меньше двух хотя бы по одному R_{a_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$. Элементы

$$a_1,\dots,a_m,\ z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k,\ z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_t},$$

$$k \geqslant 0,\ 1 \leqslant t < m,\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_t \leqslant m$$

образуют базис A_m.

Каждая алгебра A_m удовлетворяет тождествам

$$x(yz) \equiv 0, \tag{1}$$

$$\sum_{\sigma \in S_{m+1}} (-1)^\sigma x_0 X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(2)} \dots X_{\sigma(m+1)} \equiv 0, \tag{2}$$

$$x_0 X^3 \equiv 0, \tag{3}$$

$$x_0 X^2 Z_1 \dots Z_s Y^2 \equiv 0, \tag{4}$$

$$x_0 XYX \equiv -x_0 YXX - x_0 XXY, \tag{5}$$

$$x_0 X_2 X_1 w Y^2 \equiv -x_0 X_1 X_2 w Y^2, \tag{6}$$

$$x_0 X^2 w Y_2 Y_1 \equiv -x_0 X^2 w Y_1 Y_2, \tag{7}$$

$$x_0 X_2 X_1 w Y_2 Y_1 \equiv -x_0 X_1 X_2 w Y_2 Y_1 - x_0 X_2 X_1 w Y_1 Y_2 - x_0 X_1 X_2 w Y_1 Y_2, \tag{8}$$

где $w = Z_1 \dots Z_s$, и остаток от деления s на m не равен $m-2$.

Предложение 2. *В алгебре A_m любое полилинейное тождество*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i v_i(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \equiv 0,\ n \geqslant 2, \tag{9}$$

эквивалентно системе тождеств

$$x_i v_i(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \equiv 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{10}$$

где v_i — ассоциативный многочлен от операторов X_j, $j \neq i$.

Доказательство. Очевидно, что из системы тождеств (10) следует тождество (9). Обратное утверждение докажем от противного. Предположим, что для некоторого j существует ненулевая подстановка ϕ элементов алгебры A_m в многочлен $x_j v_j$, тогда по определяющим соотношениям 2 элемент $\phi(x_j)$ принадлежит идеалу, порожденному образующей z. При этом для всех $i \neq j$ в силу определяющих соотношений 2 выполняются равенства $\phi(x_i v_i) = 0$. Получили противоречие, и предложение доказано.

Договоримся для краткости в круглых скобках вместо $var(A_m)$ писать A_m, например $m_\lambda(A_m)$. Обозначим через $\mathbf{N_m}$, $m = 2, 3, \dots$, многообразие, $var(A_m) \subseteq \mathbf{N_m}$, определенное тождествами (1)–(4), и исследуем ΦS_n-модули $P_n(\mathbf{N_m})$, $P_n(A_m)$, $n = 1, 2, \dots$. Для этого определим пространство полилинейных многочленов от образующих $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$L_n = span\{x_0 X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

и вполне приводимые ΦS_n-модули $L_n(\mathbf{V}) = L_n/(L_n \cap Id(\mathbf{V}))$, $\mathbf{V} = \mathbf{N_m}, var(A_m)$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, $k, n \geqslant 1$, и T_λ — таблица Юнга с диаграммой λ, тогда полилинейный элемент

$$f_{T_\lambda} = e_{T_\lambda}(x_0 X_1 \dots X_n) = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}, \tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \sigma\tau(x_0 X_1 \dots X_n)$$

порождает неприводимые подмодули в $L_n(\mathbf{N_m})$ и $L_n(A_m)$, R_{T_λ}, C_{T_λ} — стабилизаторы строк и соответственно столбцов таблицы T_λ. Соответствующие $L_n(\mathbf{N_m})$, $L_n(A_m)$ кохарактеры $\chi_n^L(\mathbf{N_m})$, $\chi_n^L(A_m)$ являются линейными комбинациями неприводимых характеров χ_λ с кратностями $m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, $m_\lambda^L(A_m)$.

Через L_λ, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \vdash n \geqslant 1$, $t = 1, \dots, n$, обозначим пространство полиоднородных многочленов полистепени $(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ по $x_1, \dots, x_t$

$$L_\lambda = span\{x_0 v(X_1, \dots, X_t) \mid \deg_{X_i} v = \lambda_i, i = 1, \dots, t\},$$

где $v(X_1, \dots, X_t)$ — мономы, и пусть пространство $L_\lambda(\mathbf{N_m}) = L_\lambda/(L_\lambda \cap Id(\mathbf{N_m}))$.

Предложение 3. *Пусть в мономе $x_0v(X_1,\ldots,X_t)$, $t\geqslant 2$, найдется пара образующих x_i, $1\leqslant i\leqslant t$, между которыми расположены k, $0\leqslant k\leqslant m-1$, других различных образующих. Зафиксируем i и обозначим x_0v через $(r,s)_k$, где r и s — номера позиций x_i, $r<s$, $k=s-r-1$. Пусть $(r,s)_0=(r,s)$, тогда по модулю тождеств (5), (8), $m\geqslant 2$, выполняется равенство*

$$(r,s)_k=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}(r+k-j,s-j). \tag{11}$$

Данное утверждение обобщает предложение 1, сформулированное в работе [14] для мономов $x_0v(X_1,\ldots,X_m)$, $\deg v\geqslant m+1$, $\deg_{X_i}v>0$, $i=1,\ldots,m$. Легко видеть, что его доказательство повторяет доказательство из работы [14], так как в последнем используются только тождества (5), (8).

Предложение 4. *Зафиксируем $m\geqslant 3$. По модулю тождеств многообразия $\mathbf{N_m}$ любой ненулевой моном $x_0v(X_1,\ldots,X_t)\in L_\lambda$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_t)$, $1\leqslant t\leqslant m$, $\lambda_1\geqslant 2$, равен линейной комбинации мономов вида:*

1. *при $t=m$ и $\lambda_m\geqslant 2$*

$$x_0w'(X_1\ldots X_{m-1})^{r_1}X_m^2(X_1\ldots X_{m-1})^{r_2}(X_1\ldots X_m)^s w'', \tag{12}$$

где $r_1,r_2\leqslant 1$, $r_1>0$ или $r_2>0$, $s\geqslant 0$, $s>0$ только при $r_1=r_2=1$, полилинейные мономы w' и w'', $0\leqslant\deg w',\deg w''<m$, от операторов $X_1,\ldots,X_m$ не зависят от X_m соответственно при $r_1=0$ и $r_2=0$, и все операторы в w', w'' упорядочены;

2. *при $t=m$ и $\lambda_m=1$ или $t<m$*

$$x_0w'(X_2\ldots X_m)^{r_1}X_1^2(X_2\ldots X_m)^{r_2}w'', \tag{13}$$

где $r_1,r_2\leqslant 1$, $r_1=0$ или $r_2=0$ (оба равенства выполняются при $t<m$), полилинейные мономы w' и w'', $0\leqslant\deg w',\deg w''<t$, от операторов $X_1,\ldots,X_t$ не зависят от X_1 соответственно при $r_1=0$ и $r_2=0$, и все операторы в w', w'' упорядочены.

Доказательство. Зафиксируем $m\geqslant 3$ и покажем, что моном $x_0v(X_1,\ldots,X_t)$ может быть представлен линейной комбинацией мономов следующего общего вида

$$x_0w'(X_1\ldots X_m)^{s_1}(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_1}X_j^2(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_2}(X_1\ldots X_m)^{s_2}w'', \tag{14}$$

где $1\leqslant j\leqslant t$, $r_1,r_2\leqslant 1$, $s_1,s_2\geqslant 0$, $s_1>0$ или $s_2>0$ только при $r_1=r_2=1$, и полилинейные мономы w' и w'', $0\leqslant\deg w',\deg w''<t$, не зависят от X_j при $r_1=0$ и $r_2=0$ соответственно. В силу тождеств (6), (7) будем считать, что операторы в мономах w', w'' упорядочены, например по возрастанию индексов.

Так как $\lambda_1\geqslant 2$, то в мономе x_0v число различных образующих x_i, $1\leqslant i\leqslant t\leqslant m$, между любыми двумя одинаковыми не превышает $m-1$. Выберем пару таких образующих x_j и с помощью равенства (11) представим x_0v линейной комбинацией ненулевых мономов x_0v', содержащих произведение X_j^2. Так как $x_0v'\not\equiv 0$, то в силу тождеств (3), (6), (7) в мономе v' слева или справа к X_j^2 примыкает либо произведение $X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m$, либо соответственно мономы w', w'', удовлетворяющие указанным условиям,

$$v'=\ldots(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_1}X_j^2(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_2}\ldots,$$

где $r_1,r_2\leqslant 1$. В силу тождеств (6), (7) все ненулевые мономы x_0v' слева и справа от выписанных операторов имеют соответственно $s_1\geqslant 0$ и $s_2\geqslant 0$ произведений $X_1\ldots X_m$,

$$v'=\ldots(X_1\ldots X_m)^{s_1}(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_1}X_j^2(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_2}(X_1\ldots X_m)^{s_2}\ldots.$$

Остальные операторы X_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, принадлежат мономам $w'(X_1,\ldots,X_t)$, $w''(X_1,\ldots,X_t)$, $0 \leqslant \deg w', \deg w'' < t$, которые в силу (6), (7) являются полилинейными.

Покажем, что $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ только при $r_1 = r_2 = 1$. Так как случаи $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ симметричны, то достаточно рассмотреть случай $r_1 = s_1 = 0$, $r_2 = 1$, $s_2 > 0$, то есть моном v' вида $w'X_j^2(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)(X_1\ldots X_m)^{s_2}w''$. С помощью тождеств (7) на границе следующих за X_j^2 скобок соберем произведение X_k^2, $k \neq j$, и, упорядочив операторы, получим моном $\widetilde{w}'(X_1\ldots\widehat{X_k}\ldots X_m)X_k^2(X_1\ldots\widehat{X_k}\ldots X_m)(X_1\ldots X_m)^{s_2-1}w''$, в котором $r_1 = 1$. Таким образом, моном $x_0v(X_1,\ldots,X_t)$ равен линейной комбинации мономов вида (14).

Покажем, что ненулевой моном x_0v' вида (14) в зависимости от полистепени v' можно привести к виду (12) или (13). Пусть $t = m$ и $\lambda_m \geqslant 2$, $\deg v' \geqslant 2m$. Так как $\deg v' \geqslant 2m$, то в мономе v' в силу (6), (7) слева или справа от X_j^2 находятся $m-1$ различных операторов X_i, $i \neq j$, то есть $r_1 = 1$ или $r_2 = 1$. В силу симметрии примем $r_1 = 0$ и рассмотрим моном $v' = w'X_j^2X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_mw''$, $j \neq m$. Пусть сначала $\deg_{X_m} w' = 1$, $j \neq m$, тогда с помощью тождеств (6), (7) представим v' в виде $\widetilde{w}'X_mX_jX_jX_mX_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_{m-1}w''$. Воспользуемся равенством (11) и тождеством (4),

$$x_0X_mX_jX_jX_m \equiv x_0X_m^2X_j^2 + x_0X_jX_mX_mX_j + x_0X_j^2X_m^2 \equiv x_0X_jX_mX_mX_j,\ m \geqslant 3, \tag{15}$$

и приведем полученные мономы к виду (12), упорядочив все остальные операторы с помощью тождеств (6), (7). Пусть теперь $\deg_{X_m} w'' = 1$, тогда с помощью тождества (7) приведем моном v' к виду $w'X_j^2X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_mX_m\widetilde{w}''$ и, упорядочив операторы, снова получим требуемое. Рассмотрим случай $r_1 = r_2 = 1$. Если $s_1 > 1$ или $s_1 = 1$ и $j \neq m$, то с помощью тождества (6) соберем произведение X_m^2 на границе первых двух скобок, следующих за w', и, упорядочив остальные операторы, получим моном вида (12), в котором $s = s_1 + s_2$. Если $s_1 = 0$ и $j \neq m$ или $s_1 = 1$ и $j = m$, то с помощью тождеств (6), (7) представим v' в виде $w'(X_1\ldots\widehat{X_k}\ldots X_mX_kX_kX_m\ldots\widehat{X_k}\ldots X_{m-1})\ldots$, $k \neq m$, и применим тождество (15).

Пусть $t < m$, тогда в мономе x_0v' вида (14) имеем $r_i = s_i = 0$, $i = 1,2$, и из условия $\lambda_1 \geqslant 2$ (считая $j \neq 1$) и полилинейности w', w'' следуют равенства $\deg_{X_1} w' = \deg_{X_1} w'' = 1$. Тогда с помощью тождеств (6), (7) соберем произведение $\ldots X_1X_jX_jX_1\ldots$ и по аналогии с рассмотренными случаями получим моном вида (13).

Если $t = m$ и $\lambda_m = 1$, то возможны следующие два случая. Пусть сначала в мономе (14) либо $r_1 \neq 0$, либо $r_2 \neq 0$. В силу симметрии примем $v' = w'X_j^2X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_mw''$ и получим аналогичный рассмотренному выше случай, в котором достаточно заменить X_m на X_1. При $r_1 = r_2 = 0$ достаточно применить рассуждения для случая $t < m$.

Покажем, что все мономы x_0v' вида (12), (13) не равны тождественно нулю в алгебре A_m. Пусть в них моном $w' = X_{i_1}\ldots X_{i_s}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant m$, $s < t$, или $\deg w' = 0$. Рассмотрим следующие подстановки элементов алгебры A_m. Если $r_1 = 1$ в записи x_0v', тогда вместо x_0 подставим $za_1\ldots\widehat{a}_{i_1}\ldots\widehat{a}_{i_2}\ldots\widehat{a}_{i_s}\ldots a_m$. Пусть $r_1 = 0$, тогда вместо x_0 в моном вида (12) подставим $za_1\ldots\widehat{a}_{i_1}\ldots\widehat{a}_{i_2}\ldots\widehat{a}_{i_s}\ldots a_{m-1}$ и подставим $za_2\ldots\widehat{a}_{i_1}\ldots\widehat{a}_{i_2}\ldots\widehat{a}_{i_s}\ldots a_m$ в моном (13). Вместо x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, везде подставим соответственно a_i. В каждом случае результат подстановки окажется с точностью до знака равным элементу вида $z(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^ka_{j_1}\ldots a_{j_r}$ или $z(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^k$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant r < m$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant m$. Доказательство предложения завершено.

Предложение 5. *Неравенство $m_\lambda^L(A_m) > 0$, где $m \geqslant 3$, выполняется тогда и только тогда, когда разбиение $\lambda \vdash n \geqslant 1$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. $\lambda = (1^k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$;
2. $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^k, \mathfrak{s}^{m-k}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$;

3. $\lambda = \big((\mathfrak{s}+2)^{k_1}, (\mathfrak{s}+1)^{k_2}, \mathfrak{s}^{m-k_1-k_2}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 0$, $k_1 + k_2 \leqslant m-1$.

Доказательство. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, $t \geqslant m+1$, тогда для любой таблицы Юнга T_λ полилинейный многочлен $e_{T_\lambda}(x_0 X_1 \ldots X_n)$ равен сумме многочленов

$$\sigma \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau x_0 X_{\tau(1)} \ldots X_{\tau(n)},\ \sigma \in R_{T_\lambda},$$

кососимметричных по более чем m образующим. Все такие многочлены тождественно равны нулю в силу (2).

Определим подстановку ϕ элементов алгебры A_m,

$$\phi(x_0) = z,\ \phi(x_i) = a_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

Тогда $m^L_{(1^k)}(A_m) = 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, так как $\phi(x_0 \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_k) = k! z a_1 \ldots a_k$ по определяющим соотношениям 3 алгебры A_m.

Пусть теперь $t \leqslant m$ и $\lambda_1 \geqslant 2$. Так как характеристика поля Φ равна нулю, то рассмотрим полиоднородный многочлен $g_{T_\lambda}(x_0, x_1, \ldots, x_t) \in L_\lambda$, который получен из соответствующего полилинейного многочлена $f_{T_\lambda} = e_{T_\lambda}(x_0 X_1 \ldots X_n)$, $f_{T_\lambda} \not\equiv 0$, в результате отождествления образующих, индексы которых находятся в одних и тех же строках таблицы T_λ. По предложению 4 многочлен g_{T_λ} по модулю тождеств многообразия $\mathbf{N_m}$, $var(A_m) \subseteq \mathbf{N_m}$, равен линейной комбинации мономов вида (12) или (13), поэтому $\deg_{X_1} g_{T_\lambda} - \deg_{X_m} g_{T_\lambda} \leqslant 2$. Таким образом, если $m^L_\lambda(A_m) > 0$, $\lambda_1 \geqslant 2$, то λ удовлетворяет либо условию 2, либо условию 3. Покажем, что $m^L_\lambda(A_m) > 0$ для всех таких разбиений λ.

Пусть $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^k, \mathfrak{s}^{m-k}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и в таблице T_λ числа от 1 до $\mathfrak{s}m + k$ выписаны в столбец в порядке возрастания, тогда $g_{T_\lambda} = x_0(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_m)^{\mathfrak{s}} \widetilde{X}_1 \ldots \widetilde{X}_k$ и $\phi(g_{T_\lambda}) = k!(m!)^{\mathfrak{s}} z (R_{a_1} \ldots R_{a_m})^{\mathfrak{s}} a_1 \ldots a_k$.

Пусть λ удовлетворяет условию 3, тогда обозначим через l_1 высоту крайнего справа столбца таблицы T_λ, $l_1 = k_1$, и пусть l_2 — высота второго справа столбца, $l_2 = k_1 + k_2$. В многочлен

$$g_{T_\lambda} = x_0(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_m)^{\mathfrak{s}} \widetilde{X}_1 \ldots \widetilde{X}_{l_2} \overline{\overline{X}}_1 \ldots \overline{\overline{X}}_{l_1}$$

вместо x_0 подставим $z a_{l_2+1} \ldots a_m$ и a_i вместо x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Результат подстановки равен $((m-l_2)!)^{\mathfrak{s}} (l_2!)^{\mathfrak{s}+1} l_1! z (R_{a_{l_2+1}} \ldots R_{a_m} R_{a_1} \ldots R_{a_{l_2}})^{\mathfrak{s}+1} a_1 \ldots a_{l_1}$, и предложение доказано.

Предложение 6. *Если* $\lambda = (\mathfrak{s}^m)$, $m \geqslant 3$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, *то* $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$.

Доказательство. Зафиксируем таблицу Юнга T_λ, $\lambda = (\mathfrak{s}^m)$, и по модулю тождеств многообразия $\mathbf{N_m}$ оценим сверху максимальное число линейно независимых полиоднородных элементов $h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, полученных из соответствующих полилинейных элементов $e_{T_\lambda}\sigma(x_0 X_1 \ldots X_n)$, $\sigma \in S_n$, в результате отождествления образующих, индексы которых принадлежат одним и тем же строкам таблицы T_λ. Так как поле Φ нулевой характеристики, то данная оценка будет оценкой сверху значения $m^L_\lambda(\mathbf{N_m})$.

По предложению 4 любой элемент пространства $L_\lambda(\mathbf{N_m})$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, является линейной комбинацией элементов, соответствующих мономам (12). В случае $\mathfrak{s} = 2$ разобьем множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) на m подмножеств S^2_t, $t = 0, \ldots, m-1$, по числу t операторов X_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, слева от произведения $(X_1 \ldots X_m)$ или $(X_m X_1 \ldots X_{m-1})$,

$$\begin{aligned} S^2_t = \big\{ & x_0 X_{i_1} \ldots X_{i_t} (X_1 \ldots X_m) X_m X_1 \ldots \widehat{X}_{i_1} \ldots \widehat{X}_{i_t} \ldots X_{m-1}, \\ & x_0 X_{i_1} \ldots X_{i_{t-1}} X_m (X_m X_1 \ldots X_{m-1}) X_1 \ldots \widehat{X}_{i_1} \ldots \widehat{X}_{i_{t-1}} \ldots X_{m-1} \mid \\ & 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m-1 \big\}, \end{aligned}$$

где $S_0^2 = \{x_0(X_1 \dots X_m)X_m X_1 \dots X_{m-1}\}$. При $\mathfrak{s} \geqslant 3$ множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) разобьем на m подмножеств по значениям $t = 0, \dots, m-1$ степени монома $w'(X_1, \dots, X_m)$,

$$S_t^{\mathfrak{s}} = \big\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_t}(X_1 \dots X_{m-1})X_m^2(X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{\mathfrak{s}-3} X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_t} \dots X_m \mid \\ 1 \leqslant i_1 < \dots < i_t \leqslant m\big\},$$

где $S_0^{\mathfrak{s}} = \{x_0(X_1 \dots X_{m-1})X_m^2(X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{\mathfrak{s}-2}\}$. Заметим, что множество $S_t^{\mathfrak{s}}$ имеет $\binom{m}{t}$ элементов, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, $t = 0, \dots, m-1$, $\binom{m}{t}$ — биномиальный коэффициент.

Покажем, что для каждого фиксированного $\mathfrak{s} \geqslant 2$ все выписанные мономы по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ являются линейно независимыми. Элементы множества $S_t^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, обозначим через $h_{t,j}$, $1 \leqslant j \leqslant \binom{m}{t}$, и предположим, что в многообразии $\mathbf{N_m}$ выполняется тождество

$$\sum_{t=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{\binom{m}{t}} \alpha_{t,j} h_{t,j} \equiv 0, \ \alpha_{t,j} \in \Phi.$$

Заметим, что все мономы $h_{t,j}$, кроме $h_{0,1}$, имеют либо $\deg_{X_1} w' = 1$, либо $\deg_{X_1} w'' = 1$, поэтому умножим тождество справа на x_1 и подставим произведение $x_0 x_1$ вместо x_0. В силу (6), (7) в полученном следствии останется единственный ненулевой моном с коэффициентом $\alpha_{0,1}$, то есть $\alpha_{0,1} = 0$. Зафиксируем индексы $s > 0$, k и покажем равенство $\alpha_{s,k} = 0$. Заметим, что в $h_{s,k}$ моном $w''(X_1, \dots, X_m)$ может быть с точностью до порядка операторов единственным образом дополнен до монома $\widetilde{w}''$, такого что $\deg_{X_j} \widetilde{w}'' = 1$, где $j = 1, \dots, m$ при $r_2 = 1$ (в записи $h_{s,k}$ (12)), и $j = 1, \dots, m-1$ при $r_2 = 0$. В результате умножения таким образом тождества справа на различные x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, в полученном следствии ненулевыми окажутся некоторые мономы $\widetilde{h}_{t,j}$, $t \neq s$, и $\widetilde{h}_{s,k}$. Если последней в цепочке умножений была образующая x_r, $1 \leqslant r \leqslant m$, то в мономе $\widetilde{h}_{s,k}$ имеем $\deg_{X_r} w'' = 0$, и $\deg_{X_r} w'' = 1$ во всех остальных $\widetilde{h}_{t,j}$. Умножим тождество справа на x_r и получим единственный ненулевой моном с коэффициентом $\alpha_{s,k}$. Таким образом, для всех t, j выполняются равенства $\alpha_{t,j} = 0$. Следовательно, по предложению 4 для каждого $\mathfrak{s} \geqslant 2$ элементы пространства $L_{(\mathfrak{s}^m)}(\mathbf{N_m})$, соответствующие мономам из $S_t^{\mathfrak{s}}$, $t = 0, \dots, m-1$, образуют базис.

По определению $h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m)$ для любой подстановки $\sigma \in S_m$ выполняется равенство

$$h_{T_\lambda}(x_0, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = (-1)^{\sigma\mathfrak{s}} h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m).$$

При этом

$$h_{T_\lambda} = \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{\binom{m}{t}} \beta_{t,j} h_{t,j}, \ \beta_{t,j} \in \Phi.$$

Рассмотрим результаты действий подстановок $\sigma \in S_m$ на элементы множеств $S_t^{\mathfrak{s}}$. Под действием подстановки, как и в полилинейном случае, понимается перестановка индексов образующих. Пусть $\mathfrak{s} \geqslant 3$, тогда с помощью рассуждений из доказательства предложения 4 для любого $\sigma \in S_m$ получим тождество

$$\sigma(x_0(X_1 \dots X_{m-1})X_m^2(X_1 \dots X_{m-1})) \equiv x_0(X_1 \dots X_{m-1})X_m^2(X_1 \dots X_{m-1}).$$

По модулю данного тождества и тождеств (6), (7) для каждого $h_{t,j}$ выполняется равенство

$$\sigma h_{t,j} = \pm h_{t,k}, \tag{16}$$

где знак при $h_{t,k}$ зависит от j, t, σ, $1 \leqslant k \leqslant \binom{m}{t}$, причем для любых $h_{t,j}$, $h_{t,k}$ найдется такая подстановка σ.

Пусть $\mathfrak{s}=2$. Если $\sigma(m)=m$, то при помощи тождеств (6), (7) также получим равенства (16). Если $\sigma(m)=i$, $i\neq m$, то в силу симметрии достаточно рассмотреть следующие два случая:

$$\sigma(x_0\dots(X_1\dots X_m)X_m\dots X_i\dots)=x_0\dots(X_1\dots X_m\dots X_i)X_i\dots X_m\dots,$$

$$\sigma(x_0\dots X_i\dots(X_1\dots X_m)X_m\dots)=x_0\dots X_m\dots(X_1\dots X_m\dots X_i)X_i\dots.$$

С помощью тождеств (6), (7), (15) приведем полученные мономы к виду (12) и видим, что для $\mathfrak{s}=2$ также выполняются равенства (16) с указанным условием. Так как при этом по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ все мономы $h_{t,j}$ линейно независимы, то приходим к следующему выводу.

Пусть коэффициент $\beta_t=|\beta_{t,j}|$ и $\theta_{t,j}\in\{0,1\}$, $t=0,\dots,m-1$, $j=1,\dots,\binom{m}{t}$, тогда выполняется тождество

$$h_{T_\lambda}\equiv\sum_{t=0}^{m-1}\beta_t\sum_{j=1}^{\binom{m}{t}}(-1)^{\theta_{t,j}}h_{t,j}.$$

То есть в пространстве $L_\lambda(\mathbf{N_m})$ элементы, соответствующие многочленам h_{T_λ}, являются линейными комбинациями не более m фиксированных элементов, поэтому $m^L_\lambda(\mathbf{N_m})\leqslant m$, $\lambda=(\mathfrak{s}^m)$, $m\geqslant 3$, $\mathfrak{s}\geqslant 2$. Предложение доказано.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Зафиксируем $m\geqslant 2$. Если $\lambda=(\mathfrak{s}^m)$, $\mathfrak{s}\geqslant 2$, то $m^L_\lambda(A_m)=m^L_\lambda(\mathbf{N_m})=m$, и для любого $k=1,\dots,m$ выполняются равенства $m^L_{(1^k)}(A_m)=m^L_{(1^k)}(\mathbf{N_m})=1$.*

Доказательство. В доказательстве предложения 5 получены неравенства $m^L_{(1^k)}(A_m)\neq 0$, $m\geqslant 3$, $k=1,\dots,m$, доказательство которых распространяется на случай $m=2$. И так как $A_m\in\mathbf{N_m}$, $m^L_{(1^k)}(\mathbf{N_m})\leqslant 1$, $m\geqslant 2$, то выполняются равенства

$$m^L_{(1^k)}(A_m)=m^L_{(1^k)}(\mathbf{N_m})=1,\ 1\leqslant k\leqslant m.$$

Докажем неравенства $m^L_\lambda(A_m)\geqslant m$ для $m\geqslant 2$, $\mathfrak{s}\geqslant 2$. В случае $\mathfrak{s}=2$ зафиксируем таблицу

$$T=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & m+1\\\hline \vdots & \vdots\\\hline m & 2m\\\hline\end{array}$$

и по модулю тождеств многообразия $var(A_m)$ покажем линейную независимость следующих m полилинейных многочленов

$$f_i=e_T(x_0X_1\dots X_iX_{m+1}X_{i+1}\dots X_mX_{m+2}\dots X_{2m}),\ i=m,\dots,1,$$

где

$$f_m=e_T(x_0X_1\dots X_{2m})=\sum_{\sigma\in R_T}x_0\overline{X}_{\sigma(1)}\dots\overline{X}_{\sigma(m)}\widetilde{X}_{\sigma(m+1)}\dots\widetilde{X}_{\sigma(2m)}.$$

Заметим, что все f_i удовлетворяют условию $\sigma f_i=f_i$, $\sigma\in R_T$. Предположим, что в алгебре A_m выполняется тождество $\sum_{i=1}^m\alpha_if_i\equiv 0$, $\alpha_i\in\Phi$. В результате замены индексов образующих на номера строк, в которых они находятся в таблице T, из данного тождества получим полиоднородное следствие $\sum_{i=1}^m\alpha_ig_i\equiv 0$,

$$g_i=x_0\overline{X}_1\dots\overline{X}_i\widetilde{X}_1\overline{X}_{i+1}\dots\overline{X}_m\widetilde{X}_2\dots\widetilde{X}_m,\ i=m,\dots,1, \tag{17}$$

где $g_m = x_0\overline{X}_1\dots\overline{X}_m\widetilde{X}_1\dots\widetilde{X}_m$.

Определим m подстановок ϕ_i элементов алгебры A_m, $i = m,\dots,1$,

$$\begin{gathered}\phi_1(x_0) = z, \quad \phi_2(x_0) = za_m,\ \dots,\ \phi_{m+1-i}(x_0) = za_{i+1}\dots a_m,\ \dots,\ \phi_m(x_0) = za_2\dots a_m,\\ \phi_{m+1-i}(x_j) = a_j,\ j = 1,\dots,m.\end{gathered} \tag{18}$$

Результаты $\phi_{m+1-i}(g_j)$, $i,j = m,\dots,1$, выпишем в таблицу, строки которой пометим коэффициентами α_j, столбцы — значениями $\phi_{m+1-i}(x_0)$.

	z	za_m	$\dots$
α_m	$z(\overline{R}_{a_1}\dots\overline{R}_{a_m})(\widetilde{R}_{a_1}\dots\widetilde{R}_{a_m})$	$z(R_{a_m}\overline{R}_{a_1}\dots)(\overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_1}\dots)\widetilde{R}_{a_m}$	$\dots$
α_{m-1}	$z(\dots\overline{R}_{a_{m-1}}\widetilde{R}_{a_1})(\overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2}\dots\widetilde{R}_{a_m})$	$z(R_{a_m}\overline{R}_{a_1}\dots\overline{R}_{a_{m-1}})(\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_m}\dots)\widetilde{R}_{a_m}$	$\dots$
α_{m-2}	$z(\dots\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_{m-1}})(\overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2}\dots\widetilde{R}_{a_m})$	$z(R_{a_m}\overline{R}_{a_1}\dots\widetilde{R}_{a_1})(\overline{R}_{a_{m-1}}\overline{R}_{a_m}\dots)\widetilde{R}_{a_m}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Таблица 1.

В силу определяющих соотношений 3 алгебры A_m результаты подстановок в столбце $za_{i+1}\dots a_m$, $i < m$, с точностью до ненулевого коэффициента равны $z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^2a_{i+1}\dots a_m$ и $z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^2$ в столбце z. Получили однородную систему линейных уравнений порядка m с неизвестными α_i. Коэффициенты при неизвестных обозначим через γ_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant m$, и соответственно их расположению в таблице 1 выпишем в матрицу $\Gamma = (\gamma_{ij})$, которая будет транспонированной матрицей рассматриваемой системы уравнений.

Вычислим коэффициенты, находящиеся на главной диагонали матрицы Γ,

$$\phi_{m+1-i}(g_i) = z(R_{a_{i+1}}\dots R_{a_m}\overline{R}_{a_1}\dots\overline{R}_{a_i})(\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_{i+1}}\dots\overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2}\dots\widetilde{R}_{a_i})\widetilde{R}_{a_{i+1}}\dots\widetilde{R}_{a_m} =$$

$$\gamma_{(m+1-i)(m+1-i)}z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^2R_{a_{i+1}}\dots R_{a_m},$$

$$\gamma_{(m+1-i)(m+1-i)} = (-1)^{m-i}i!i!(m-i)!(m-i)!,\ i = m,\dots,1.$$

Определим следующие элементы Γ под главной диагональю,

$$\phi_{m+1-i}(g_{i-1}) = z(R_{a_{i+1}}\dots R_{a_m}\overline{R}_{a_1}\dots\overline{R}_{a_{i-1}}\widetilde{R}_{a_1})(\overline{R}_{a_i}\dots\overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2}\dots\widetilde{R}_{a_i})\widetilde{R}_{a_{i+1}}\dots\widetilde{R}_{a_m} =$$

$$\gamma_{(m+2-i)(m+1-i)}z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^2R_{a_{i+1}}\dots R_{a_m},$$

$$\gamma_{(m+2-i)(m+1-i)} = (-1)^{m-i}i!(i-1)!(m-i+1)!(m-i)!,\ i = m,\dots,2.$$

Заметим, что значения γ_{jj}, γ_{j+1j} одного знака, $j = 1,\dots,m-1$. При этом в силу определяющих соотношений 3 алгебры A_m выполняются равенства $\gamma_{ij} = -\gamma_{i+1j}$, $i \neq j$, так как

$$zuR_{a_k}R_{a_1} = -zuR_{a_1}R_{a_k},\ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{19}$$

где остаток от деления $\deg u(R_{a_1},\dots,R_{a_m})$ на m не равен $m-1$. Например, при $m = 2$

$$z(R_{a_2}\overline{R}_{a_1})(\overline{R}_{a_2}\widetilde{R}_{a_1})\widetilde{R}_{a_2} = -z(R_{a_2}\overline{R}_{a_1})(\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_2})\widetilde{R}_{a_2}.$$

В матрице

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & -\gamma_{22} & \gamma_{33} & \dots \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & -\gamma_{33} & \dots \\ -\gamma_{21} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \dots \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix} \tag{20}$$

будем последовательно складывать строки с номерами $i+1$, i и результат записывать в строку $i+1$, $i = m-1, \ldots, 1$. Получим матрицу $\Gamma' = (\gamma'_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$,

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & -\gamma_{22} & \gamma_{33} & \ldots \\ \gamma_{11}+\gamma_{21} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \gamma_{22}+\gamma_{32} & 0 & \ldots \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \end{pmatrix},$$

в которой все элементы равны нулю, кроме элементов первой строки и γ'_{i+1i}, $i = 1, \ldots, m-1$.

Следовательно, ранг Γ равен m, система уравнений имеет единственное решение $\alpha_i = 0$, $i = m, \ldots, 1$, и по предложению 1 выполняются неравенства $m^L_{(2^m)}(A_m) \geqslant m$, $m = 2, 3, \ldots$.

Пусть $\mathfrak{s} \geqslant 3$, тогда зафиксируем таблицу

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & m+1 & \ldots & (\mathfrak{s}-1)m+1 \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline m & 2m & \ldots & \mathfrak{s}m \\ \hline \end{array}$$

и по модулю тождеств $var(A_m)$ покажем линейную независимость m многочленов

$$f'_i = e_{T'}(x_0 X_1 \ldots X_i X_{m+1} X_{i+1} \ldots X_m X_{m+2} \ldots X_{2m} \ldots X_{\mathfrak{s}m}),\ i = m, \ldots, 1,$$

где $f'_m = e_{T'}(x_0 X_1 \ldots X_{\mathfrak{s}m})$. Соответствующие f'_i полиоднородные многочлены g'_i по таблице T' определяются через многочлены g_i (17),

$$g'_i = g_i(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_m)^{\mathfrak{s}-2},\ i = m, \ldots, 1.$$

В результате рассуждений по аналогии с рассмотренным случаем $\mathfrak{s} = 2$ получим матрицу коэффициентов, в каждом столбце которой элементы отличаются от соответствующих элементов матрицы Γ на ненулевой множитель, зависящий от номера столбца. Следовательно, в полученной матрице сохраняются все установленные для матрицы Γ соотношения между элементами, её ранг также равен m, и все элементы f'_i линейно независимы, $i = m, \ldots, 1$.

Таким образом, по предложению 1 выполняются неравенства $m^L_\lambda(A_m) \geqslant m$, $m \geqslant 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$.

В работе [5] неравенства $m^L_{(\mathfrak{s}^2)}(A_2) \leqslant 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, доказаны посредством применения тождества (3) и его частичной линеаризации [5, Proposition 3]. То есть авторами также доказаны неравенства $m^L_{(\mathfrak{s}^2)}(\mathbf{N_2}) \leqslant 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$. И так как по предложению 6 $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$, $\lambda = (\mathfrak{s}^m)$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, $m \geqslant 3$, то для всех $m = 2, 3, \ldots$ получили требуемые равенства. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для разбиений* $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^l, \mathfrak{s}^{m-l}\big)$, $m \geqslant 3$, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, *выполняются равенства* $m^L_\lambda(A_m) = m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = m$.

Доказательство. Сначала по аналогии с доказательством предложения 6 покажем неравенства $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\mathfrak{s} = 1$, тогда разобьем соответствующее множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (13) на m подмножеств $S^1_{1t_1}$, $S^1_{2t_2}$, $t_1 = 0, \ldots, l$, $t_2 = 1, \ldots, m-1-l$. При $l = m-1$ рассматриваются только m множеств $S^{\mathfrak{s}}_{1t_1}$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$. Элементами множества $S^1_{1t_1}$ являются такие мономы, которые слева от произведения $(X_1 \ldots X_m)$ или $(X_2 \ldots X_m X_1)$ имеют t_1 операторов X_i, $1 \leqslant i \leqslant l$,

$$\begin{aligned} S^1_{1t_1} = \big\{ & x_0 X_{i_1} \ldots X_{i_{t_1}} (X_2 \ldots X_m X_1) X_1 X_2 \ldots \widehat{X}_{i_1} \ldots \widehat{X}_{i_{t_1}} \ldots X_l, \\ & x_0 X_{i_1} \ldots X_{i_{t_1-1}} X_1 (X_1 \ldots X_m) X_2 \ldots \widehat{X}_{i_1} \ldots \widehat{X}_{i_{t_1-1}} \ldots X_l \mid 2 \leqslant i_1 < \ldots < i_{t_1} \leqslant l \big\}, \end{aligned}$$

где $S^1_{10} = \{x_0(X_2 \dots X_m X_1) X_1 \dots X_l\}$, $S^1_{1l} = \{x_0 X_2 \dots X_l X_1 (X_1 \dots X_m)\}$. Все элементы множества $S^1_{2t_2}$ имеют t_2 операторов X_i, $l+1 \leqslant i \leqslant m$, слева от произведения $(X_2 \dots X_l X_1^2 X_2 \dots X_l)$,

$$S^1_{2t_2} = \bigl\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_2}} (X_2 \dots X_l X_1^2 X_2 \dots X_l) X_{l+1} \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_2}} \dots X_m \mid \\ l+1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{t_2} \leqslant m\bigr\}.$$

В случае $\mathfrak{s} = 2$ множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) разобьем на m подмножеств $S^2_{1t_1}$, $S^2_{2t_2}$,

$$S^2_{1t_1} = \bigl\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_1}} (X_1 \dots X_m)(X_m X_1 \dots X_{m-1}) X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_1}} \dots X_l \mid \\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{t_1} \leqslant l\bigr\},\ t_1 = 0, \dots, l,$$
$$S^2_{2t_2} = \bigl\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_2}} X_1 \dots X_l (X_1 \dots X_m) X_m X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_2}} \dots X_{m-1}, \\ x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_2 - 1}} X_1 \dots X_l X_m (X_m X_1 \dots X_{m-1}) X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_2-1}} \dots X_{m-1} \mid \\ l+1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{t_2} \leqslant m-1\bigr\},\ t_2 = 1, \dots, m-1-l.$$

Если $\mathfrak{s} \geqslant 3$, то разобьем множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) на m подмножеств

$$S^{\mathfrak{s}}_{1t_1} = \bigl\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_1}} (X_1 \dots X_m)(X_m X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{\mathfrak{s}-2} X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_1}} \dots X_l \mid \\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{t_1} \leqslant l\bigr\},\ t_1 = 0, \dots, l,$$
$$S^{\mathfrak{s}}_{2t_2} = \bigl\{x_0 X_{i_1} ... X_{i_{t_2}} X_1 ... X_l (X_1 ... X_m)(X_m X_1 ... X_{m-1})(X_1 ... X_m)^{\mathfrak{s}-3} X_1 ... \widehat{X}_{i_1} ... \widehat{X}_{i_{t_2}} ... X_m \mid \\ l+1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{t_2} \leqslant m\bigr\},\ t_2 = 1, \dots, m-1-l.$$

Заметим, что для каждого $\mathfrak{s} \geqslant 1$, применив метод умножений из доказательства предложения 6, получим, что в пространстве $L_\lambda(\mathbf{N_m})$ элементы, соответствующие выписанным мономам, образуют базис.

Для таблицы Юнга T_λ по аналогии с доказательством предложения 6 определим полиоднородный элемент $h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m) \in L_\lambda$. По определению h_{T_λ} для любых подстановок $\sigma_1 \in S_l$, $\sigma_2 \in S_{l+1,m}$ ($S_{l+1,m}$ — подгруппа S_m) выполняются равенства

$$h_{T_\lambda}(x_0, x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(l)}, x_{\sigma_2(l+1)}, \dots x_{\sigma_2(m)}) = (-1)^{\sigma_1(\mathfrak{s}+1)}(-1)^{\sigma_2 \mathfrak{s}} h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m).$$

При этом, применив рассуждения из доказательства предложения 6, получим, что результат действия подстановок σ_1, σ_2 на любой элемент множества $S^{\mathfrak{s}}_{1t_1}$ или $S^{\mathfrak{s}}_{2t_2}$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, с точностью до знака равен некоторому элементу этого же множества, причем такая подстановка σ_1 (или σ_2) найдется для любой пары элементов из $S^{\mathfrak{s}}_{1t_1}$ (или $S^{\mathfrak{s}}_{2t_2}$), $t_1 = 0, \dots, l$, $t_2 = 1, \dots, m-1-l$.

Рассуждая по аналогии с доказательством предложения 6, h_{T_λ} тождественно равен линейной комбинации не более m фиксированных многочленов. Таким образом, выполняются неравенства $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$.

Покажем, что $m^L_\lambda(A_m) \geqslant m$. При $\mathfrak{s} \geqslant 2$ определим m многочленов

$$g'_i = g_i(\overline{X}_1 \dots \overline{X}_m)^{\mathfrak{s}-2} \widetilde{X}_1 \dots \widetilde{X}_l,$$

g_i — многочлены (17), и предположим, что алгебра A_m удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i g'_i \equiv 0,\ \alpha_i \in \Phi. \tag{21}$$

К данному тождеству применим рассуждения из доказательства теоремы 1 и получим матрицу коэффициентов, в которой по определению многочленов g'_i, $i = 1, \dots, m$, все элементы, находящиеся в одном и том же столбце, отличаются от соответствующих элементов матрицы Γ (20) на ненулевой множитель. Поэтому заключаем, что $m^L_\lambda(A_m) \geqslant m$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$.

В случае $\mathfrak{s} = 1$ предположим, что в алгебре A_m выполняется тождество (21), в котором $g'_i = x_0\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_i\widetilde{X}_1\overline{X}_{i+1} \ldots \overline{X}_m\widetilde{X}_2 \ldots \widetilde{X}_l$, $i = m, \ldots, 1$. По аналогии с матрицей Γ определим матрицу $\Theta = (\theta_{ij})$, $1 \leqslant i, j, \leqslant m$, коэффициентов, полученных в результате подстановок (18) элементов алгебры A_m в многочлены g'_i,

$$\phi_{m+1-i}(g'_i) = z(R_{a_{i+1}} \ldots R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \ldots \overline{R}_{a_i})\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_i+1} \ldots \overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2} \ldots \widetilde{R}_{a_l} =$$

$$\begin{cases} i \leqslant l, \ \theta_{(m+1-i)(m+1-i)}z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^2R_{a_{i+1}} \ldots R_{a_l}, \\ i > l, \ \theta_{(m+1-i)(m+1-i)}z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})R_{a_1} \ldots R_{a_l}R_{a_{i+1}} \ldots R_{a_m}, \end{cases} \quad i = m, \ldots, 1,$$

$$\phi_{m+1-i}(g'_{i-1}) = z(R_{a_{i+1}} \ldots R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \ldots \overline{R}_{a_{i-1}}\widetilde{R}_{a_1})\overline{R}_{a_i} \ldots \overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2} \ldots \widetilde{R}_{a_l} =$$

$$\begin{cases} i \leqslant l, \ \theta_{(m+2-i)(m+1-i)}z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^2R_{a_{i+1}} \ldots R_{a_l}, \\ i > l, \ \theta_{(m+2-i)(m+1-i)}z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})R_{a_1} \ldots R_{a_l}R_{a_{i+1}} \ldots R_{a_m}, \end{cases} \quad i = m, \ldots, 2.$$

$$\theta_{(m+1-i)(m+1-i)} = \begin{cases} i \leqslant l, \ (-1)^{m-i}i!i!(m-i)!(l-i)!, \\ i > l, \ (-1)^{(m-i)(l+i-1)}i!l!(m-i)!, \end{cases} \quad i = m, \ldots, 1,$$

$$\theta_{(m+2-i)(m+1-i)} = \begin{cases} i \leqslant l, \ (-1)^{m-i}i!(i-1)!(m-i+1)!(l-i)!, \\ i > l, \ (-1)^{(m-i)(l+i-1)}l!(i-1)!(m-i+1)!, \end{cases} \quad i = m, \ldots, 2.$$

Так как θ_{jj} и θ_{j+1j}, $j = 1, \ldots, m-1$, одного знака, то в силу соотношений (19) ранг матрицы Θ равен m, и выполняются равенства $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Таким образом, для всех разбиений λ из условия выполняются неравенства $m_\lambda(A_m) \geqslant m$, $m_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$, и теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda = \big((\mathfrak{s}+2)^{k_1}, (\mathfrak{s}+1)^{k_2}, \mathfrak{s}^{m-k_1-k_2}\big)$, $m \geqslant 3$, $\mathfrak{s} \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 0$, $k_1 + k_2 \leqslant m - 1$. *Обозначим через* l_1 *высоту крайнего справа столбца диаграммы* λ, $l_1 = k_1$, *и пусть* l_2 *— высота второго справа столбца,* $l_2 = k_1 + k_2$, *тогда*

$$m^L_\lambda(A_m) = m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = k_2 + 1 = l_2 - l_1 + 1.$$

Доказательство. Докажем теорему по аналогии с ранее рассмотренными случаями. Сначала покажем неравенства $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant l_2 - l_1 + 1$.

В случае $\mathfrak{s} = 0$ разобьем множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (13) на $l_2 - l_1 + 1$ подмножеств

$$\begin{aligned} S^0_t = \big\{&x_0X_{i_1} \ldots X_{i_t}(X_2 \ldots X_{l_1}X_1^2X_2 \ldots X_{l_1})X_{l_1+1} \ldots \widehat{X}_{i_1} \ldots \widehat{X}_{i_t} \ldots X_{l_2} \mid \\ &l_1 + 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant l_2\big\}, \ t = 0, \ldots, l_2 - l_1. \end{aligned}$$

По предложению 3 и в силу тождеств (3), (6), (7) имеет место тождество

$$x_0X_1(X_1 \ldots X_m)X_1 \equiv (-1)^{m-1}x_0X_1(X_2 \ldots X_mX_1)X_1,$$

поэтому при $\mathfrak{s} = 1$ следующие $l_2 - l_1 + 1$ множеств

$$\begin{aligned} S^1_t = \big\{&x_0X_{i_1} \ldots X_{i_t}X_2 \ldots X_{l_1}X_1(X_1 \ldots X_m)X_1 \ldots \widehat{X}_{i_1} \ldots \widehat{X}_{i_t} \ldots X_{l_2} \mid \\ &l_1 + 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant l_2\big\}, \ t = 0, \ldots, l_2 - l_1, \end{aligned}$$

задают разбиение множества всех различных по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ мономов (13).

Если $\mathfrak{s} \geqslant 2$, то соответствующее множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) разобьем на подмножества

$$S_t^{\mathfrak{s}} = \bigl\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_t} X_1 \dots X_{l_1}(X_1 \dots X_m)(X_m X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{\mathfrak{s}-2} X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_t} \dots X_{l_2} \mid \\ l_1 + 1 \leqslant i_1 < \dots < i_t \leqslant l_2\bigr\},\ t = 0, \dots, l_2 - l_1.$$

Заметим, что в каждом случае все перечисленные мономы являются линейно независимыми по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$, в чем можно убедиться, применив метод умножений из доказательства предложения 6.

Зафиксируем таблицу Юнга T_λ и рассмотрим соответствующий полиоднородный многочлен $h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_k)$ полистепени $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ по $x_1, \dots, x_k$, где $k = m$ при $\mathfrak{s} \geqslant 1$, иначе $k = l_2$. В случае $l_2 = l_1$ для каждого $\mathfrak{s}$ существует единственное множество $S_0^{\mathfrak{s}}$ из одного элемента и $\dim L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant 1$. Так как $m_\lambda(A_m) \geqslant 1$, то $m_\lambda(\mathbf{N_m}) = m_\lambda(A_m) = 1$ при $l_2 = l_1$.

Далее на протяжении всего доказательства предполагается, что $l_2 > l_1$. Для всех подстановок $\sigma \in S_{l_1+1,l_2}$ (S_{l_1+1,l_2} — подгруппа S_{l_2}) в зависимости от значения полистепени h_{T_λ} выполняются равенства

$$h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_{\sigma(l_1+1)}, \dots, x_{\sigma(l_2)}, \dots) = (-1)^{\sigma(\mathfrak{s}+1)} h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_k),\ k = l_2, m.$$

При этом для любой подстановки $\sigma \in S_{l_1+1,l_2}$ и элементов множества $S_t^{\mathfrak{s}}$ выполняются равенства вида (16) с указанным условием. Следовательно, в пространстве $L_\lambda(\mathbf{N_m})$ полиоднородный элемент, соответствующий h_{T_λ}, является линейной комбинацией не более $l_2 - l_1 + 1$ фиксированных элементов и $m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) \leqslant l_2 - l_1 + 1$, $\mathfrak{s} \geqslant 0$, $m \geqslant 3$.

По аналогии с доказательством теоремы 1 покажем неравенства $m_\lambda^L(A_m) \geqslant l_2 - l_1 + 1$, $m = 3, 4, \dots$. Пусть $\mathfrak{s} = 0$ и в алгебре A_m выполняется тождество

$$\sum_{i=l_1}^{l_2} \alpha_i g'_i \equiv 0,\ \alpha_i \in \Phi, \quad g'_i = x_0 \overline{X}_1 \dots \overline{X}_i \widetilde{X}_1 \overline{X}_{i+1} \dots \overline{X}_{l_2} \widetilde{X}_2 \dots \widetilde{X}_{l_1},\ i = l_2, \dots, l_1,$$

где $g'_{l_2} = x_0 \overline{X}_1 \dots \overline{X}_{l_2} \widetilde{X}_1 \dots \widetilde{X}_{l_1}$. Чтобы определить значения α_i, составим однородную систему уравнений, в которой коэффициенты получим в результате подстановок ϕ_{m+1-j} (18) элементов алгебры A_m в многочлены g'_i, $i, j = l_2, \dots, l_1$. Коэффициенты запишем в матрицу $\Theta = (\theta_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant l_2 - l_1 + 1$, которая будет транспонированной матрицей рассматриваемой системы уравнений. Определим значения θ_{ii}, θ_{i+1i},

$$\begin{aligned} \phi_{m+1-i}(g'_i) = {} & z(R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m} \overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_i}) \widetilde{R}_{a_1} \overline{R}_{a_{i+1}} \dots \overline{R}_{a_{l_2}} \widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_{l_1}} = \\ & \theta_{(l_2+1-i)(l_2+1-i)} z(R_{a_1} \dots R_{a_m}) R_{a_1} \dots R_{a_{l_1}} R_{a_{i+1}} \dots R_{a_{l_2}} \end{aligned}$$

$$\theta_{(l_2+1-i)(l_2+1-i)} = (-1)^{i(m-i)+(l_1-1)(l_2-i)} i!(l_2-i)! l_1!, \quad i = l_2, \dots, l_1,$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+1-i}(g'_{i-1}) = {} & z(R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m} \overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_{i-1}} \widetilde{R}_{a_1}) \overline{R}_{a_i} \dots \overline{R}_{a_{l_2}} \widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_{l_1}} = \\ & \theta_{(l_2+2-i)(l_2+1-i)} z(R_{a_1} \dots R_{a_m}) R_{a_1} \dots R_{a_{l_1}} R_{a_{i+1}} \dots R_{a_{l_2}}, \end{aligned}$$

$$\theta_{(l_2+2-i)(l_2+1-i)} = (-1)^{i(m-i)+(l_1-1)(l_2-i)} l_1!(i-1)!(l_2+1-i)!, \quad i = l_2, \dots, l_1+1.$$

Знаки элементов θ_{jj}, θ_{j+1j}, $j = 1, \dots, l_2 - l_1$, совпадают, причем во всех остальных случаях в силу соотношений (19) имеем $\theta_{ij} = -\theta_{i+1j}$, $i \neq j$. Следовательно, ранг Θ равен $l_2 - l_1 + 1$, и система уравнений имеет единственное нулевое решение $\alpha_{l_1} = \dots = \alpha_{l_2} = 0$. Таким образом, $m_\lambda^L(A_m) \geqslant l_2 - l_1 + 1$ для $\mathfrak{s} = 0$.

В случае $\mathfrak{s} \geqslant 1$ покажем линейную независимость по модулю тождеств A_m многочленов

$$g''_i = x_0(\overline{\overline{X}}_1 \dots \overline{\overline{X}}_m)^{\mathfrak{s}} \overline{X}_1 \dots \overline{X}_i \widetilde{X}_1 \overline{X}_{i+1} \dots \overline{X}_{l_2} \widetilde{X}_2 \dots \widetilde{X}_{l_1},\ i = l_2, \dots, l_1.$$

Рассуждая по аналогии с рассмотренным случаем, результатами подстановок (18) $\phi_{m+1-j}(g''_i)$, $l_1 \leqslant i, j \leqslant l_2$, в алгебре A_m являются $l_2 - l_1 + 1$ базисных элементов

$$z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^{\mathfrak{s}+1} R_{a_1} \dots R_{a_{l_1}} R_{a_{i+1}} \dots R_{a_{l_2}},\ i = l_2, \dots, l_1,$$

с коэффициентами, которые отличаются от соответствующих элементов матрицы Θ на ненулевой множитель, общий для всех элементов в одном и том же столбце. Таким образом, ранг соответствующей данному случаю матрицы коэффициентов равен $l_2 - l_1 + 1$, и выполняются неравенства $m^L_\lambda(A_m) \geqslant l_2 - l_1 + 1$, $\mathfrak{s} = 0, 1, \dots$, $m = 3, 4, \dots$. Теорема доказана.

Заметим, что в работе [5] доказательства равенств

$$m^L_\lambda(A_2) = \begin{cases} 2, \lambda = ((\mathfrak{s}+1), \mathfrak{s}), \mathfrak{s} \geqslant 1, \\ 1, \lambda = ((\mathfrak{s}+2), \mathfrak{s}), \mathfrak{s} \geqslant 0 \end{cases}$$

аналогичны доказательствам теорем 2, 3. То есть авторы с помощью тождеств многообразия $\mathbf{N_2}$ оценивали данные кратности сверху и с помощью определения алгебры A_2 получали равную оценку снизу. Следовательно, для данных разбиений λ авторами доказаны равенства $m^L_\lambda(A_2) = m^L_\lambda(\mathbf{N_2})$. При этом для разбиений λ, отличных от данных и от рассматриваемых в теореме 1 при $m = 2$, в той же работе доказаны равенства $m^L_\lambda(\mathbf{N_2}) = 0$.

Таким образом, в силу равенств $m^L_\lambda(A_m) = m^L_\lambda(\mathbf{N_m})$, $m = 2, 3, \dots$, и по предложению 2

Теорема 4. *Многообразие $var(A_m)$ и заданное системой тождеств* (1)–(4) *многообразие $\mathbf{N_m}$ совпадают, $var(A_m) = \mathbf{N_m}$, $m = 2, 3, \dots$.*

Суммируем, в том числе приведенные в работе [5], утверждения о кратностях $m^L_\lambda(\mathbf{N_m})$, $m = 2, 3, \dots$, в следующей теореме.

Теорема 5. *Кратности $m^L_\lambda(\mathbf{N_m})$, $m = 2, 3, \dots$, определяются следующим образом:*

1. *если $\lambda = (1^k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, то $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = 1$;*
2. *если $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^k, \mathfrak{s}^{m-k}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, то $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = m$;*
3. *если $\lambda = \big((\mathfrak{s}+2)^{k_1}, (\mathfrak{s}+1)^{k_2}, \mathfrak{s}^{m-k_1-k_2}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 0$, $k_1 + k_2 \leqslant m - 1$, то $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = k_2 + 1$;*
4. *$m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = 0$ для всех остальных λ.*

Заметим, что в работе [13] доказаны равенства

$$c_{n+1}(A_m) = (n+1) \dim L_n(A_m) = (n+1) \sum_{\lambda \vdash n} m^L_\lambda(A_m) d_\lambda,\ n \geqslant 1,\ m \geqslant 2,$$

позволяющие вычислять коразмерности $c_n(\mathbf{N_m})$, $n \geqslant 2$, без знания кратностей $m_\lambda(\mathbf{N_m})$. Поэтому вопрос определения кратностей $m_\lambda(\mathbf{N_m})$ представляет отдельный интерес.

Теорема 6. *Все ненулевые кратности $m_\lambda(\mathbf{N_m})$, $m \geqslant 2$, определяются следующим образом:*

1. *если удалением одной клетки из диаграммы λ может быть получена единственная диаграмма μ, для которой $m^L_\mu(\mathbf{N_m}) > 0$, то $m_\lambda(\mathbf{N_m}) = m^L_\mu(\mathbf{N_m})$;*
2. *если удалением одной клетки из диаграммы λ могут быть получены две различные диаграммы μ_1, μ_2, для которых $m^L_{\mu_1}(\mathbf{N_m}), m^L_{\mu_2}(\mathbf{N_m}) > 0$, то $m_\lambda(\mathbf{N_m}) = m^L_{\mu_1}(\mathbf{N_m}) + m^L_{\mu_2}(\mathbf{N_m})$.*

Доказательство. Для каждого $n \geqslant 1$ определим пространство $L_{n,n+1} \cong L_n$, все элементы которого в мономах на первой позиции вместо x_0 имеют x_{n+1}, и ΦS_n-модуль $L_{n,n+1}(\mathbf{N_m}) \cong L_n(\mathbf{N_m})$. Тогда ΦS_{n+1}-модуль $P_{n+1}(\mathbf{N_m})$ является индуцированным модулем $L_{n,n+1}(\mathbf{N_m})$, и все кратности $m_\lambda(\mathbf{N_m})$, $\lambda \vdash n+1$, определяются с помощью правила Литтлвуда-Ричардсона (см. напр. [2], с. 114),

$$m_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant \sum_{i=1}^{t} m^L_{\mu_i}(\mathbf{N_m}),\ t = t(\lambda) \leqslant 2,$$

где диаграммы Юнга μ_i получены из диаграммы λ в результате удаления одной клетки. При этом $t \leqslant 2$, так как для каждого n существует не больше двух таких удовлетворяющих условиям теоремы 5 диаграмм μ_i, $\mu_i \vdash n$, из которых в результате присоединения одной клетки получим одну и ту же диаграмму λ.

При $t = 1$, $\mu = \mu_1$, в пространстве $L_{n,n+1}$ зафиксируем $\mathfrak{m} = m^L_\mu(\mathbf{N_m})$ линейно независимых по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ элементов $e_T f_j(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $T = T_\mu$, $j = 1, \ldots, \mathfrak{m}$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ таблицу Юнга с диаграммой λ, полученную из таблицы T добавлением клетки с числом $n+1$. Предположим, что в многообразии $\mathbf{N_m}$ выполняется тождество

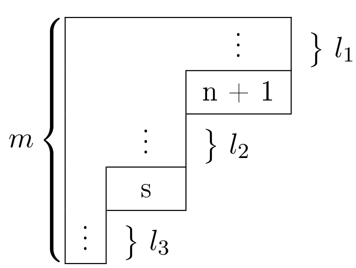
$$\sum_{j=1}^{\mathfrak{m}} \alpha_j e_{\mathfrak{T}} f_j(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv 0,\ \alpha_j \in \Phi,\ f_j \in L_{n,n+1}.$$

Представим слагаемое $e_{\mathfrak{T}} f_j$ в виде $e_{\mathfrak{T}} f_j = e_T f_j + f'_j(x_1, \ldots, x_{n+1})$, где во всех мономах многочлена f'_j образующая x_{n+1} находится не на первой позиции. По предложению 2 получили следствие

$$\sum_{j=1}^{\mathfrak{m}} \alpha_j e_T f_j(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv 0$$

и в силу линейной независимости равенства $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, \mathfrak{m}$. Следовательно, элементы $e_{\mathfrak{T}} f_j$, $j = 1, \ldots, \mathfrak{m}$, по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ линейно независимы, и по предложению 1 выполняется неравенство $m_\lambda(\mathbf{N_m}) \geqslant \mathfrak{m}$. Таким образом, $m_\lambda(\mathbf{N_m}) = \mathfrak{m}$.

При $t = 2$ зафиксируем следующую таблицу Юнга $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\lambda$, которая по теореме 5 имеет форму



$l_1, l_2, l_3 \geqslant 0,\ s \leqslant n.$

Рисунок 1.

Обозначим через T_{n+1} таблицу Юнга с диаграммой μ_1, которая получается из таблицы $\mathfrak{T}$ в результате удаления клетки с числом $n+1$, и пусть таблица T_s с диаграммой μ_2 получена из $\mathfrak{T}$ удалением клетки с числом s.

Пусть пространство $L_{n,s}$ получено из $L_{n,n+1}$ транспозицией образующих x_{n+1} и x_s во всех мономах, $L_{n,s} \cong L_{n,n+1}$. То есть все мономы из $L_{n,s}$ имеют x_s на первой позиции. И пусть симметрическая группа G действует на множестве $\{1, \ldots, \widehat{s}, \ldots, n+1\}$, $G \cong S_n$. Тогда ΦG-модуль $L_{n,s}(\mathbf{N_m}) = L_{n,s}/(L_{n,s} \cap Id(\mathbf{N_m}))$ и ΦS_n-модуль $L_{n,n+1}(\mathbf{N_m})$ изоморфны. Зафиксируем $\mathfrak{m}_1 = m^L_{\mu_1}(\mathbf{N_m})$ линейно независимых по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ элементов $e_{T_{n+1}} f_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in L_{n,n+1}$ и $\mathfrak{m}_2 = m^L_{\mu_2}(\mathbf{N_m})$ линейно независимых элементов

$e_{T_s}h_j(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in L_{n,s}$, $i=1,\ldots,\mathfrak{m}_1$, $j=1,\ldots,\mathfrak{m}_2$. Предположим, что имеет место тождество
$$\sum_{i=1}^{\mathfrak{m}_1}\alpha_i e_{\mathfrak{T}} f_i + \sum_{j=1}^{\mathfrak{m}_2}\beta_j e_{\mathfrak{T}} h_j \equiv 0,\ \alpha_i,\beta_j\in\Phi,\ f_i\in L_{n,n+1},\ h_j\in L_{n,s},$$
которое представим в виде
$$\sum_{i=1}^{\mathfrak{m}_1}\alpha_i(e_{T_{n+1}}f_i+f_i') + \sum_{j=1}^{\mathfrak{m}_2}\beta_j(e_{T_s}h_j+h_j') \equiv 0,$$
где $e_{T_{n+1}}f_i\in L_{n,n+1}$, $f_i'\notin L_{n,n+1}$, $e_{T_s}h_j\in L_{n,s}$, $h_j'\notin L_{n,s}$. В таблице $\mathfrak{T}$ число $n+1$ находится выше s, и каждое из них расположено в угловых клетках, поэтому для всех $\sigma\in R_{\mathfrak{T}}$, $\tau\in C_{\mathfrak{T}}$ имеем неравенство $\sigma\tau(n+1)\neq s$, и так как $f_i\in L_{n,n+1}$, то $f_i'\notin L_{n,s}$, $i=1,\ldots,\mathfrak{m}_1$. Следовательно, только $e_{T_s}h_j\in L_{n,s}$, $j=1,\ldots,\mathfrak{m}_2$, и по предложению 2 получаем следствие
$$\sum_{j=1}^{\mathfrak{m}_2}\beta_j e_{T_s}h_j\equiv 0,$$
в котором по условию все $\beta_j=0$. Следовательно, также выполняются равенства $\alpha_i=0$, $i=1,\ldots,\mathfrak{m}_1$. Таким образом, по предложению 1 выполняется неравенство $m_\lambda(\mathbf{N_m})\geqslant \mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$. Теорема доказана.

Определим все значения кодлин $l_n^L(\mathbf{N_m})$, $l_n(\mathbf{N_m})$ для модулей $L_n(\mathbf{N_m})$ и $P_n(\mathbf{N_m})$ соответственно. Будем обозначать через $\lfloor k\rfloor$ — наибольшее целое число, меньшее или равное k, $\lceil k\rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное k.

Теорема 7. *Пусть $m\geqslant 2$. При $n>m$ положим $r=n-\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$, если m не делит n, и $r=m$ если m делит n. Тогда выполняются следующие равенства*
$$l_n^L(\mathbf{N_m})=\begin{cases} m+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{r}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{m-r}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{m-r}{2}\right\rceil,\ n>m,\\ 1+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\ n\leqslant m.\end{cases}$$

Доказательство. По теореме 5 все диаграммы, которым соответствуют ненулевые кратности $m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, имеют не более m строк. Зафиксируем такую диаграмму $\lambda\vdash n$, $n>m$, имеющую не более одного неполного (высоты меньше m) столбца, тогда высота крайнего справа столбца диаграммы λ равна r. Так как диаграммы, соответствующие разбиениям из условия теоремы 5, имеют не более двух неполных столбцов, то все другие такие диаграммы получаются из λ разбиением крайнего справа столбца на два столбца и при $r\leqslant m-2$ разбиением находящегося в строках с номерами с $r+1$ по m крайнего справа столбца на два. Таким образом, в силу теоремы 5 при $n>m$ выполняются равенства
$$l_n^L(\mathbf{N_m})=m+\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(r-2i+1)+\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{m-r}{2}\right\rfloor}(m-r-2i+1),$$
где $m=m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, $n>m$, и в скобках выписаны значения кратностей для диаграмм с двумя неполными столбцами. Так как
$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}(k+1-2i)=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil, \tag{22}$$
то получаем требуемые равенства.

При $n \leqslant m$ диаграмма λ состоит из одного столбца, $\lambda = (1^n)$, $m^L_{(1^n)}(\mathbf{N_m}) = 1$, поэтому

$$l^L_n(\mathbf{N_m}) = 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(n - 2i + 1) = 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Теорема доказана.

Для определения значений $l_n(\mathbf{N_m})$ используем так называемую нотацию Айверсона (см. напр. [16], с. 42). Пусть B — утверждение, которое является либо истинным, либо ложным, тогда

$$[B] = \begin{cases} 1, \text{если } B \text{ истинно}, \\ 0, \text{если } B \text{ ложно}. \end{cases}$$

Например, если число r четное, то $[2 \mid r] = 1$, иначе $[2 \mid r] = 0$.

Теорема 8. *Пусть $m \geqslant 2$. Выполняется равенство $l_1(\mathbf{N_m}) = 1$. Если натуральное $n \leqslant m$, то*

$$l_{n+1}(\mathbf{N_m}) = 2 + 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - [2 \mid n].$$

Пусть $n > m$, положим $r = n - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$, если m не делит n, и $r = m$ если m делит n, тогда

$$l_{n+1}(\mathbf{N_m}) = \alpha m + \beta \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil - [2 \mid r] + \gamma \left\lfloor \frac{m-r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{m-r}{2} \right\rceil - [r \leqslant m-2 \text{ и } 2 \mid m-r],$$

где $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$ при $m < n < 2m$. Если $n \geqslant 2m$, то $\alpha = 3 - [r = m]$, $\beta = 4$, $\gamma = 4$.

Доказательство. Равенство $l_1(\mathbf{N_m}) = 1$ очевидно. По теореме 6 значение $l_{n+1}(\mathbf{N_m})$ равно сумме всех кратностей $m^L_\mu(\mathbf{N_m}) > 0$, $\mu \vdash n$, взятых столько раз, сколько существует способов добавления одной клетки к соответствующим диаграммам μ.

Существует два способа добавления одной клетки к любой прямоугольной диаграмме и три способа для диаграммы $\mu \vdash n > m$ с одним неполным (высоты меньше m) столбцом, поэтому при $n \leqslant m$ имеем $m_{(1^n)}(\mathbf{N_m}) = 2$, при $m < n < 2m$ коэффициент $\alpha = 3$, и $\alpha = 3 - [r = m]$ при $n \geqslant 2m$.

Пусть диаграмма μ состоит из двух неполных столбцов и $n \leqslant m$, тогда существует три способа добавления клетки к диаграмме μ, если столбцы имеют разную высоту, и два способа, если столбцы одной высоты. При этом для любой диаграммы λ, $\lambda \vdash n$, $n \geqslant 2$, с двумя неполными столбцами равной высоты, такой что $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) > 0$, по теореме 5 выполняется равенство $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = 1$. Следовательно, в рассматриваемом случае для краткости сумму кратностей (22), где $k = n$, можем умножить на три и вычесть единицу, если n четно. Получим требуемые равенства для $n \leqslant m$. Рассуждения при $n > m$ для всех диаграмм μ с двумя неполными столбцами аналогичны. Теорема доказана.

4. Заключение

В работе для многообразий $var(A_m)$, $m = 2, 3, \ldots$, определенных на основе алгебр A_m, получены системы определяющих тождеств. В случае $m = 2$ определены значения кратностей $m^L_{(\mathfrak{s}^2)}(A_2) = 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, и все кратности $m^L_\lambda(A_m)$, $m \geqslant 3$, с помощью которых могут быть непосредственно вычислены требуемые значения коразмерностей $c_n(A_m)$, $m \geqslant 2$. Таким образом, в качестве частного случая получили все заявленные основными результаты работы [12]. Также определены значения всех кодлин $l^L_n(A_m)$ и приведен метод вычисления кратностей $m_\lambda(A_m)$, с помощью которого определены кодлины $l_n(A_m)$, $m \geqslant 2$.

Автор выражает благодарность профессору Мищенко С. П. за ценные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. AMS Mathematical Surveys and Monographs. 2005. Vol. 122. 352 p.

2. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.

3. Drensky V. Free Algebras and PI-Algebras. Graduate Course in Algebra. Springer-Verlag, 2000.

4. Шулежко О. В. О почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 1. С. 67–88.

5. Mishchenko S., Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics. 2014. Vol. 199, № 1. P. 241–257.

6. Мищенко С. П. Многообразия линейных алгебр кодлины один // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 1. С. 25–30.

7. Фролова Ю. Ю., Шулежко О. В. Почти нильпотентные многообразия алгебр Лейбница // Прикладная дискретная математика. 2015. № 2(28). С. 30–36.

8. Mishchenko S., Valenti A. On almost nilpotent varieties of subexponential growth // Journal of Algebra. 2015. Vol. 423, № 1. P. 902–915.

9. Мищенко С. П. О многообразиях коммутативных метабелевых алгебр / С. П. Мищенко, Н. П. Панов, Ю. Ю. Фролова, Чанг Т. К. Нгуен // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 1. С. 165–180.

10. Мищенко С. П., Шулежко О. В. Описание почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий с подэкспоненциальным ростом // Мальцевские чтения : тез. докл. международ. конф. Новосибирск, 2014. С. 110.

11. Мищенко С. П. Бесконечные периодические слова и почти нильпотентные многообразия // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2017. № 4. С. 62–66.

12. Шулежко О. В. Новые свойства почти нильпотентного многообразия экспоненты два // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 3. С. 316–320.

13. Мищенко С. П., Шулежко О. В. Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 2. С. 53–57.

14. Панов Н. П. О почти нильпотентных многообразиях с целой экспонентой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, № 3. С. 331–343.

15. Зайцев М. В., Мищенко С. П. О кодлине многообразий линейных алгебр // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 553–559.

16. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. М. : Мир, 1998. 703 с.

REFERENCES

1. Giambruno, A. & Zaicev, M. 2005, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, Providence, R.I. doi: 10.1090/surv/122

2. Bahturin, Yu. A. 1987, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Science Press, Utrecht.

3. Drensky, V. 2000, *Free Algebras and PI-Algebras. Graduate Course in Algebra*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Singapore.

4. Shulezhko, O. V. 2015, "On almost nilpotent varieties in different classes of linear algebras", *Chebyshevskiy Sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 67–88.

5. Mishchenko, S., Valenti, A. 2014, "An almost nilpotent variety of exponent 2", *Israel Journal of Mathematics*, vol. 199, no. 1, pp. 241–257. doi: 10.1007/s11856-013-0029-4

6. Mishchenko, S. P. 2010, "Varieties of linear algebras with colength one", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 65, no. 1, pp. 23-–27. doi: 10.3103/S0027132210010043

7. Frolova, Yu. Yu., Shulezhko, O.V. 2015, "Almost nilpotent varieties of Leibniz algebras", *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, no. 2(28), pp. 30—36. doi: 10.17223/20710410/28/3

8. Mishchenko, S., Valenti, A. 2015, "On almost nilpotent varieties of subexponential growth", *Journal of Algebra*, vol. 423, no. 1, pp. 902–915. doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.038

9. Mishchenko, S. P., Panov, N. P., Frolova, Yu. Yu., Nguyen, Trang 2016, "On the varieties of commutative metabelian algebras", *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 21, no. 1, pp. 165–180.

10. Mishchenko, S. P., Shulezhko, O. V. 2014, "Description of almost nilpotent anticommutative metabelian varieties of subexponential growth", *Mal'tsevskie Chteniya : tez. dokl. mezhdunarod. konf. (Mal'tsev Meeting : collection of abstracts of international conference)*, Novosibirsk, pp. 110.

11. Mishchenko, S. P. 2017, "Infinite periodic words and almost nilpotent varieties", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 72, no. 2, pp. 173–176

12. Shulezhko, O. V. 2014, "New properties of almost nilpotent variety of exponent 2", *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 14, no. 3, pp. 316–320.

13. Mishchenko, S. P., Shulezhko, O. V. 2015, "Almost nilpotent varieties of arbitrary integer exponent", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 70, no. 2, pp. 92—95. doi: 10.3103/S0027132215020084

14. Panov, N. P. 2017, "On Almost Nilpotent Varieties with Integer PI-Exponent", *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 17, no. 3, pp. 331–343. doi: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-331-343

15. Zaitsev, M. V., Mishchenko, S. P. 2006, "Colength of varieties of linear algebras", *Math. Notes*, vol. 79, no. 4, pp. 511—517. doi: 10.1007/s11006-006-0056-0

16. Graham, R. L., Knuth, D. E. & Patashnik, O. 1994, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley.

Ульяновский государственный университет.