ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-285-295

К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С КОНЕЧНОЗНАЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ КАК ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПЛЕКСНУЮ ПЛОСКОСТЬ[1]

О. А. Матвеева, В. Н. Кузнецов (г. Саратов)

Аннотация

Одним из известных направлений решения задачи аналитического продолжения рядов Дирихле является изучение свойств последовательности первообразных, возникающих в процессе итераций сумматорной функции коэффициентов ряда. На этом пути было получено, например, аналитическое продолжение дзета-функции Римана, L-функций Дирихле. В 1975 году Н. Г. Чудаков получил необходимое и достаточное условие аналитического продолжения рядов Дирихле как мероморфных функций с конечной функцией Линделёфа, выраженное в терминах поведения первообразных функций.

В данной статье получено необходимое и достаточное условие аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами целым образом на комплексную плоскость. Это условие сформулировано в терминах поведения чезаровских средних от коэффициентов ряда Дирихле. В отличие от результата Н. Г. Чудакова, где условие аналитического продолжения представлено в виде теоремы существования, здесь получен явный вид асимптотики чезаровских средних. В основе решения задачи лежит аппроксимационный подход, разработанный ранее авторами, позволивший связать решение задачи с возможностью приближения в критической полосе целых функций, определённых рядами Дирихле, полиномами Дирихле.

Ключевые слова: Ряд Дирихле, аналитическое продолжение, совместное приближение функции и ее производных.

Библиография: 15 названий.

ON THE PROBLEM OF ANALYTICAL CONTINUATION OF DIRICHLET SERIES WITH FINITE COEFFICIENTS AS ENTIRE FUNCTIONS ONTO THE COMPLEX PLANE

O. A. Matveeva, V. N. Kuznetsov (Saratov)

Abstract

One well-known approach to the problem of analytic continuation of Dirichlet series is analysis of properties of a sequence of primitive integrals, which arise in iterations of a summatory function of the coefficients of these series. With this approach it was possible to obtain an analytic continuation of the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions. In 1975 N. G. Chudakov presented necessary and sufficient conditions for an analytic continuation of Dirichlet series as meromorphic functions with a finite Lindelöf function, expressed through behavior of primitive integrals.

In this paper we formulate necessary and sufficient conditions of analytic continuation of Dirichlet series with finite-valued coefficients to an entire function. These conditions are

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00399).

expressed in terms of behavior of Cesàro means of coefficients of a Dirichlet series. Unlike the result of N. G. Chudakov, where conditions of analytic continuation are expressed as an existence theorem, in this paper we obtain an explicit form of the asymptotics of Cesàro means. This result is based on the approximation approach developed earlier by V. N. Kuznetsov and the author, which made it possible to establish a connection between the solution of this problem and a possibility to approximate entire functions defined by Dirichlet series by Dirichlet polynomials in the critical strip.

Keywords: Dirichlet series, analytic continuation, joint approximation of a function and its derivatives.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Одним из известных направлений решения задачи аналитического продолжения рядов Дирихле

$$f(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\ s=\sigma+it$$

является изучение свойств сумматорной функции коэффициентов и ее итераций, возникающих в результате последовательного интегрирования по частям интеграла в известном интегральном представлении ряда Дирихле в области сходимости:

$$f(s)=s\int_1^{\infty}\frac{S(u)}{u^{s+1}}du,$$

где $S(u)$ — сумматорная функция коэффициентов.

На этом пути получено, например, аналитическое продолжение дзета-функции Римана (см., например, [1]), L-функций Дирихле (см. [2]). В [2] же изучалось асимптотическое поведение последовательности итераций первообразных для сумматорной функции коэффициентов; получено необходимое и достаточное условие аналитического продолжения ряда Дирихле как мероморфной функции с конечным числом простых полюсов и конечной функцией Линделёфа $\mu(\sigma)$. Это условие заключается в существовании последовательности индексов m_k таких, что для функций $\Phi_{m_k}(x)$:

$$\Phi_0(x)=\sum_{n\le x}a_n,\ \Phi_{m+1}(x)=\int_1^x\Phi_m(x)dx,\ m=1,2,\ldots$$

выполняются асимптотические равенства:

$$\Phi_{m_k}(x)=P_{m_k}(x)+R_{m_k}(x), \tag{1}$$

где $P_{m_k}(x)$ — алгебраические многочлены, $R_{m_k}(x)=O(x^{n_k})$, и $(m_k-n_k)\to\infty$.

В данной статье для рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами

$$f(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{a_k}{k^s},\ s=\sigma+it, \tag{2}$$

получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты, при которых такие ряды определяют целые функции, удовлетворяющие неравенству

$$|f(s)\Gamma(s)|<e^{-\alpha|t|},\ 0\le\sigma\le 1, \tag{3}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция, $\alpha>0$ и зависит от функции $f(s)$.

Полученные необходимые и достаточные условия аналитического продолжения рядов Дирихле (2) целым образом на комплексную плоскость выражены в терминах чезаровских срезов порядка m от коэффициентов

$$S^1(x) = \sum_{k \le x} a_k, \quad S^m(x) = \sum_{k \le x} S^{m-1}(k),\ m \ge 2. \tag{4}$$

В отличие от работы [2], где условие аналитического продолжения (1) получено в виде теоремы существования, здесь получен явный вид асимптотики чезаровских средних.

При доказательстве основного результата используется, во-первых, результат В. Н. Кузнецова, полученный в 1987 году в [3] (см. также [4]), о том, что если ряд Дирихле (2) определяет целую функцию, то соответствующий (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n x^n \tag{5}$$

имеет конечные односторонние производные любого порядка в точке единица

$$\lim_{x \to 1-0} g^{(m)}(x) = \alpha_m,\ m = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Во-вторых, используется факт, доказанный уже в этой работе, и заключающийся в том, что степенной ряд (5) допускает совместное приближение функции $g(x)$ и её производных на отрезке $[0, 1]$ алгебраическими полиномами с ограниченными в совокупности коэффициентами.

В основе доказательства основного утверждения лежит аппроксимационный подход, разработанный ранее авторами (см. [5]–[11]), позволивший связать решение задачи с возможностью приближения в критической полосе целых функций, определённых рядами Дирихле, полиномами Дирихле: показано, что целые функции, определённые рядами Дирихле, допускают приближение в критической полосе полиномами Дирихле, чезаровские средние коэффициентов которых определяют свойства чезаровских средних коэффициентов ряда Дирихле.

2. Критерий возможности аналитического продолжения ряда Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целой функции на комплексную плоскость

Рассмотрим ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами (2) и чезаровские средние m-го порядка от коэффициентов этого ряда (4). Имеет место

Теорема 1. *Ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами*

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}, \quad s = \sigma + it$$

тогда и только тогда определяет целую функцию, удовлетворяющую условию

$$|f(s)\Gamma(s)| < e^{-\alpha|t|}, \quad 0 \le \sigma \le 1,$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция, $\alpha > 0$ и зависит от функции $f(s)$, когда для любого m определяется алгебраический полином $T_{m-1}(x)$ степени $m-1$, такой, что для чезаровских средних порядка m от коэффициентов ряда Дирихле при любом $x \ge 1$ выполняются равенства

$$S^m(x) = T_{m-1}(x) + O(1), \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где константа в символе «O» не зависит от x.

Доказательству теоремы 1 предпошлём ряд утверждений:

Лемма 1. *Пусть ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами*

$$f(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k^s},$$

определяет целую функцию, удовлетворяющую условию

$$|f(s)\Gamma(s)|<e^{-\alpha|t|},\quad 0\le\sigma\le 1,$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция, $\alpha>0$ и зависит от $f(s)$. Тогда соответствующий (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенной ряд определяет функцию

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k,$$

имеющую производные любого порядка на отрезке $[0,1]$, и для любого m существует последовательность полиномов $P_n(x)$,

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}x^k$$

с ограниченными в совокупности коэффициентами, которая равномерно сходится к $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ совместно с производными до m-го порядка, то есть при $n\to\infty$

$$P_n^{(l)}(x)\rightrightarrows g^{(l)}(x),\quad l=1,2,\ldots,m.$$

Доказательство. В [3], [4] показано, что если ряд Дирихле (2) определяет целую функцию с условием (3), то соответствующий степенной ряд (5) имеет конечные односторонние производные любого порядка (6) в точке единица, то есть степенной ряд (5) определяет функцию $g(x)$, имеющую производные любого порядка на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим частичные суммы ряда (5):

$$\widehat{P_n}(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k.$$

Выберем $\varepsilon>0$. В силу равномерной непрерывности $g^{(l)}(x)$ на отрезке $[0,1]$ существует $r_n,\ 0<r_n<1$, такое, что для $x\in[0,1]$

$$|g^{(l)}(x)-g^{(l)}(r_nx)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad l=0,1,\ldots,m.$$

В силу равномерной сходимости последовательность частичных сумм в круге радиуса <1 существует $n_0=n_0(\varepsilon)$, такое, что для $n\ge n_0$

$$|g^{(l)}(rx)-\widehat{P_n}^{(l)}(r_nx)|\le\frac{\varepsilon}{2},\quad l=0,1,\ldots,m.$$

Из последних неравенств следует, что для всех $x\in[0,1]$

$$|g^{(l)}(x)-\widehat{P_n}^{(l)}(r_nx)|<\varepsilon,\quad l=0,1,\ldots,m.$$

Рассмотрим полиномы вида $P_n(x) = \widehat{P_n}(r_n x)$, то есть

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k r_n^k x^k, \quad \text{где } r_n < 1. \tag{7}$$

В силу предыдущего неравенства последовательность таких полиномов равномерно сходится к функции $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ совместно с производными до m-го порядка.

Осталось заметить, что в силу конечнозначности коэффициентов ряда Дирихле (2) и, следовательно, ограниченности коэффициентов степенного ряда (5), коэффициенты полиномов $P_n(x) = \widehat{P_n}(r_n x)$ ограничены в совокупности, что завершает доказательство леммы 1. □

Обозначим $P_{n,\nu}(x)$ «урезанные» многочлены (7), то есть

$$P_{n,\nu}(x) = \sum_{k=1}^{\nu} a_{n,k} x^k, \quad \nu \le n. \tag{8}$$

Пусть также $S_n^m(\nu)$ — чезаровские средние порядка m для коэффициентов многочленов (8).

Имеет место

Лемма 2. *Пусть ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами*

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s},$$

определяет целую функцию, удовлетворяющую условию

$$|f(s)\Gamma(s)| < e^{-\alpha|t|}, \quad 0 \le \sigma \le 1,$$

где $\Gamma(s)$ — гамма функция, $\alpha > 0$ и зависит от $f(s)$.

Тогда для чезаровских средних порядка m от коэффициентов многочленов $P_{n,\nu}(x)$ имеет место равенство

$$S_n^m(\nu) = T_{n,\nu,m-1}(\nu),$$

где $T_{n,\nu,m-1}(x)$ — многочлены степени $m-1$, коэффиценты которых определяются коэффициентами и значениями полиномов $P_{n,\nu}(x)$ и их производных до $m-1$-го порядка в точке $x=1$.

Доказательство. Пусть $S_n^m(n)$ — чезаровские средние порядка m для коэффициентов многочленов (7), и $\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,m-1}$ — значения производных до $m-1$-го порядка многочлена (7) в точке $x=1$.

Рассмотрим чезаровские средние для коэффициентов (7):

$$S_n^1(n) = \sum_{k \le n} a_{n,k} = P_n(1) = \alpha_{n,0},$$

$$S_n^2(n) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k \le l} S_n^1(k) = n a_{n,1} + (n-1) a_{n,2} + \ldots + a_{n,n}.$$

Обозначим

$$\widehat{S_n^2}(n) = n a_{n,n} + (n-1) a_{n,n-1} + \ldots + a_{n,1} = P_n'(1) + a_{n,1} = \alpha_{n,1} + a_{n,1}.$$

Складывая два последних равенства, получим:

$$S_n^2(n) + \widehat{S_n^2}(n) = (n+1)(a_{n,1} + \ldots + a_{n,n}) = (n+1)\alpha_{n,0}.$$

Отсюда следует, что

$$S_n^2(n) = (n+1)\alpha_{n,0} - \alpha_{n,1} + a_{n,1} = T_{n,1}(n),$$

где $T_{n,1}(x)$ — многочлен первой степени:

$$T_{n,1}(x) = x\alpha_{n,0} + \alpha_{n,0} - \alpha_{n,1} + a_{n,1}.$$

Далее, рассуждая аналогично, для $S_n^3(n)$ получаем:

$$2S_n^3(n) = n(n+1)a_{n,1} + (n-1)na_{n,2} + \ldots + 2a_{n,n}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\widehat{S_n^3}(n) &= n(n+1)a_{n,n} + (n-1)na_{n,n-1} + \ldots + 2a_{n,1} = \\ &= (n(n-1)+2n)a_{n,n} + ((n-1)(n-2)+4n+2)a_{n,n-1} + \ldots + 2a_{n,1} = \\ &= \alpha_{n,2} + a_{n,1} + a_{n,2} + 2n(a_{n,n} + 2a_{n,n-1} + \ldots + na_{n,1}) = \\ &= \alpha_{n,2} + a_{n,1} + a_{n,2} + 2n(n\alpha_{n,0} + \alpha_{n,2} - \alpha_{n,1} - a_{n,1}).\end{aligned}$$

Сложив два последних равенства и выразив $2S_n^3(n)$, получим:

$$\begin{aligned}2S_n^3(n) &= (n(n+1)+1)\alpha_{n,0} - \alpha_{n,2} - a_{n,1} - a_{n,2} - 2n^2\alpha_{n,0} - 2n\alpha_{n,0} - 2n\alpha_{n,1} + 2na_{n,1} = \\ &= -n^2\alpha_{n,0} + n(\alpha_{n,0} - 2\alpha_{n,1} - 2a_{n,1}) + \alpha_{n,0} - \alpha_{n,2} - a_{n,1} - a_{n,2} = T_{n,2}(n),\end{aligned}$$

где $T_{n,2}(x)$ — многочлен второй степени.

Имея в виду предыдущие выкладки, можно предположить, что для $S_n^m(n)$ имеет место следующая формула:

$$S_n^m(n) = T_{n,m-1}(n),$$

где $T_{n,m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$. Более того, можно предположить, что и в общем случае для чезаровских средних $S_n^m(\nu)$, $\nu \le n$ порядка m для коэффициентов полиномов (8) имеют место формулы:

$$S_n^m(\nu) = T_{n,\nu,m-1}(\nu), \tag{9}$$

где $T_{n,\nu,m-1}(x)$ — многочлен степении $m-1$, коэффициенты которого определяются величинами $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,m-1}, \alpha_{n,\nu,0}, \alpha_{n,\nu,1}, \ldots, \alpha_{n,\nu,m-1}$, где $\alpha_{n,\nu,k} = P_{n,\nu}^{(k)}(1),\ k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Действительно, (9) полчается на основании индуктивных предположений для чезаровских средних меньшего порядка, применения упрощённой формулы Эйлера-Маклорена (см. [12], стр. 11), которую мы здесь приведём:

$$\sum_{a<n<b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \left(\frac{1}{2} - \{b\}\right) f(b) - \left(\frac{1}{2} - \{a\}\right) f(a) - \int_a^b \left(\frac{1}{2} - x + [x]\right) f''(x)dx,$$

а также с учётом соотношения $S_n^m(\nu) = \sum_{k=1}^{\nu} S_n^{m-1}(k)$. Действительно, в работе [2] стр. 20 показано, что

$$\int_1^\nu [x] f''(x)dx = -\sum_{k=1}^{\nu} f'(k) + \mu f'(\nu).$$

Затем применим формулу Эйлера-Маклорена к сумме $\sum_{k=1}^{\nu} f'(k)$ и повторим наши рассуждения еще $m-3$ раза.

Формула (9) завершает доказательство леммы 2. $\square$

Далее, имеет место

Лемма 3. *Пусть ряд Дирихле* (2) *определяет целую функцию, удовлетворяющую условию* (3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $N > 0$, *что для любого* $\nu \geq N$ *существует* $N_1 > 0$, *такое, что для всех* $n \geq N_1$ *имеет место неравенство*

$$|\alpha_{n,\nu,k} - \alpha_n| < \varepsilon, \quad k = \overline{0, m-1},$$

где α_k *определены условием* (6), *а* $\alpha_{n,\nu,k} = P_{n,\nu}^{(k)}(1)$, *где* $P_{n,\nu}(x)$ — *полиномы вида* (8).

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x)$, определённую рядом (5). При условиях леммы 3 $g(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией на отрезке $[0,1]$. Пусть $x_1 < 1$ — такое число, что для всех $x: \ x_1 < x < 1$

$$\left|g^{(s)}(x) - g^{(s)}(1)\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1}. \tag{10}$$

Такое x_1 существует в силу равномерной непрерывности функций $g^{(s)}(x), \ s = \overline{0, m-1}$ на отрезке $[0,1]$.

Пусть N_0 — такое число, что

$$\left|S_{N_0}^{(s)}(x_1) - g^{(s)}(x_1)\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1}, \tag{11}$$

где $S_{N_0}(x)$ — частичная сумма ряда (5). Запишем полином (7) в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k r_n^k x^k, \quad r_n < 1$$

Тогда для $r_n \leq x_1$ для любых $n \geq N_0, \ \nu \leq n$ будут выполняться оценки

$$\left|P_{n,\nu}^{(s)}(2) - \alpha_s\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1},$$

если только $\left|P_n^{(s)}(x) - g^{(s)}(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{6}, \ s = \overline{0, m-1}$. Это следует из неравенства (11) и того факта, что $P_{n,\nu}^{(s)}(1) = S_\nu^{(s)}(r_n)$.

Пусть n таково, чт $r_n > x_1$, и пусть $\nu > N_0$. Воспользуемся свойством ограниченности в совокупности коэффициентов многочленов вида (7). Как показано в [13] гл. II, т. 6, в этом случае имеет место сходимость коэффициентов полиномов (7) к коэффициентам степенного ряда (5), т.е.

$$a_{n,k} \to a_k \quad \text{при } n \to \infty. \tag{12}$$

При заданных m и ν выражения $P_{n,\nu}^{(s)}(x)$, где $1 \geq x > x_1$, являются конечной суммой слагаемых, каждое из которых в силу (12) при $n \to \infty$ стремится к соответствующему слагаемому суммы $S_n^{(s)}(x)$.

Пусть N_2 таково, что при $n \geq N_2$

$$\left|S_\nu^{(s)}(1) - P_{n,\nu}^{(s)}(1)\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1}, \tag{13}$$

и при $n = N_2$ r_n величину r_n обозначим как r_0. Будем считать, что $r_0 > x_1$. Пусть далее N_1 таково, что при $\nu \geq N_1$ имеет место оценка вида

$$\left|S_\nu^{(s)}(r_0) - g^{(s)}(r_0)\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1}. \tag{14}$$

Тогда в силу (13) при заданном $\nu \geq N_1$ и при любом $n \geq N_2$ имеет место неравенство

$$\left|P_{N_2,\nu}^{(s)}(1) - P_{n,\nu}^{(s)}(1)\right| \leq \left|P_{N_2,\nu}^{(s)}(1) - S_\nu^{(s)}(1)\right| + \left|P_{n,\nu}^{(s)}(1) - S_\nu^{(s)}(1)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

Но так как в силу (13), (14), (10)

$$\left|P_{N_2,\nu}^{(s)}(1) - g^{(s)}(1)\right| \le \left|P_{N_2,\nu}^{(s)}(1) - S_\nu^{(s)}(r_0)\right| + \left|S_\nu^{(s)}(r_0) - g^{(s)}(r_0)\right| + \\ + \left|g^{(s)}(r_0) - g^{(s)}(1)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad s = \overline{0, m-1}, \tag{16}$$

то из условий (15) и (16) получим, что при заданном $\nu > N_1$ и при любом $n \ge N_2$ имеют место неравенства

$$\left|P_{n,\nu}^{(s)}(1) - g^{(s)}(1)\right| \le \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы 3. □

При условиях леммы 3 имеет место

Лемма 4. *При любом натуральном ν для чезаровских средних порядка m имеет место соотношение*

$$S_n^m(\nu) \to S^m(\nu) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $S^m(\nu)$ — чезаровские средние порядка m для ν первых коэффициентов степенного ряда (5)*, соответствующего ряду Дирихле* (2)*.*

Доказательство. Утверждение леммы 4 следует из условий (12), в силу которых каждое слагаемое конечной суммы, определённой средним $S_n^m(\nu)$, стремится к соответствующему слагаемому суммы, определённой $S^m(\nu)$. □

Как следствие леммы 2, леммы 3 и леммы 4, получаем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть ряд Дирихле* (2) *определяет целую функцию, удовлетворяющую условию* (3)*. Тогда для любого m определяется многочлен $T_{m-1}(x)$ степени $m-1$, такой, что для чезаровских средних порядка m от коэффициентов ряда Дирихле* (2) *при любом x имеет место равенство*

$$S^m(x) = T_{m-1}(x) + O(1),$$

где константа в символе «O» не зависит от x.

Доказательство теоремы 1. Необходимость условий теоремы 1 следует из леммы 2.

Докажем достаточность, то есть покажем, что если для любого m и для любого x для чезаровских средних коэффициентов ряда Дирихле (2) имеет место равенство

$$S^m(x) = T_{m-1}(x) + O(1), \tag{17}$$

где $T_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$, а константа в символе «O» не зависит от x, то ряд Дирихле (2) определяет целую функцию, удовлетворяющую условию (3).

Рассмотрим в полуплоскости $\sigma > 1$ интегральное представление ряда Дирихле (2):

$$f(s) = s\int_1^\infty \frac{S(u)}{u^{s+1}}du, \tag{18}$$

где $S(x)$ — сумматорная функция коэффициентов ряда (2). В силу (17)

$$S(x) = O(1),$$

и, следовательно, представление (18) обеспечивает аналитическое продолжение ряда Дирихле (2) в полуплоскость $\sigma > 0$, и в критической полосе выполнено условие (3).

К интегралу (18) применим m раз формулу интегрирования по частям. Рассмотрим последовательност первообразных, полученных в результате итераци сумматорной функции $S(x)$:

$$\Phi^0(x) = S(x),\ \Phi^1(x) = \int_1^x \Phi^0(x)dx,\ \ldots,\ \Phi^m(x) = \int_1^x \Phi^{m-1}(x)dx.$$

Для функции $\Phi^m(x)$ получаем следующее представление:

$$\Phi^m(x) = \int_1^x \Phi^{m-1}(x)dx = \int_1^{[x]} \Phi^{m-1}(x)dx + \int_{[x]}^x \Phi^{m-1}(x)dx =$$
$$= \int_1^{[x]} S^m(x)dx + \{x\}S^m([x]+1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{[x]} S^m(k) + \{x\}S^m([x]+1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{[x]} S^m(k) + \{x\}\sum_{k=1}^{[x]+1} S^{m-1}(k).$$

Из последнего равенства и из (17) имеем:

$$\Phi^m(x) = \sum_{k=1}^{[x]} T_{m-1}(k) + \{x\}\sum_{k=1}^{[x]+1} T_{m-2}(x) + O(1).$$

Применяя формулу Эйлера-Маклорена ([12]) получаем:

$$\Phi^m(x) = 2\int_1^{[x]} T_{m-1}(x)dx + 2\{x\}\int_1^{[x]+1} T_{m-2}(x)dx + O(1). \tag{19}$$

Таким образом, применяя m раз формулу интегрирования по частям к интегралу (18), и в силу (19), получаем, что функция $f(s)$, определённая рядом Дирихле (2), является суммой конечного числа целых функций, функции, регулярной в полуплоскости $\sigma > -m+1$, и конечного числа функций вида

$$S(s+1) = s(s+1)\dots(s+k)\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+k+1}}dx, \quad k < m. \tag{20}$$

Разложим функцию $\{x\}$ в ряд Фурье (см. [1]):

$$\{x\} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin \pi n x}{\pi n}$$

и подставим это разложение в интеграл (20).

Тогда рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведённым в [1] на стр. 21–22 при доказательстве аналитического продолжения дзета-функции Римана, позволяют говорить о регулярности функций вида (20), а следовательно, и о регулярности ряда Дирихле (2) в полуплоскости $\sigma > -m+1$.

Осталось заметить, что условие (3) имеет место в силу интегрального представления (18), которое в нашем случае ($S(x) = O(1)$) имеет место в области $\sigma > 0$. Таким образом, теорема 1 полностью доказана. □

Замечание 1. *В работе [14] было показано, что если ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами определяет целую функцию f(s), модуль которой удовлетворяет условию*

$$|f(s)| < Ce^{|s|\ln|s|+A|s|},$$

где A — некоторая положительная константа, то коэффициенты ряда будут периодическими, начиная с некоторого номера.

В работе [15] приведен пример ряда Дирихле с конечнозначными непериодическими коэффициентами, который определяет целую функцию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана // М.: И. Л., 1953, с. 407

2. Чудаков Н. Г. Об одном классе рядов Дирихле // Теория чисел: сб. науч. трудов – Куйбышев, 1975, с. 53–57

3. Кузнецов. В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: межвуз. сб. науч. трудов. - Саратов: изд-во СГУ, 1987, с. 17–23

4. Кузнецов. В. Н., Кузнецова Т. А., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. О рядах Дирихле, определяющих целые функции с определеннным порядком роста модуля // Исследования по алгебре, теории чисел и смежным вопросам — Саратов, изд-во СГУ, 2007, Вып. 4, с. 69 – 75

5. Матвеева. О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов, изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, с. 80 – 84

6. Матвеев В. А., Матвеева О. А. О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликатиными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2012, т. 13, Вып. 2, С. 106 – 116

7. Матвеева. О. А. Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание ученой степени к. ф.-м. н. — Ульяновск, 2014, 110 с.

8. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, т. 17, Вып. 3, с. 115 – 124

9. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационный подход в некоторых задачах теории рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, т. 17, Вып. 4, с. 124 – 131

10. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, т. 17, Вып. 2, с. 181 – 189

11. Коротков А. Е., Матвеева О. А Об одном численном алгоритме определения нулей рядов Дирихле с периодическими коэффициентами // Научные ведомости БелГУ — Белгород: изд-во БелГУ, 2011, Вып. 24, с. 47 –54

12. А. А. Карацуба Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, с. 239

13. В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов Введение в минимакс — М.: Наука, 1972, с. 368

14. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сёге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, т. 38, Вып. 6, с. 805 – 813

15. Чернов В. И. Об одном классе рядов Дирихле с конечными функциями Линделёфа // Исследования по теории чисел: Межвуз. науч. сб., 1982, Вып.8, с. 92 – 95

REFERENCES

1. Titchmarsh, E. K. 1953, Teorija dzeta-funkcii Rimana, *Moscow, I. L.*, pp. 407.
2. Chudakov, N. G. 1975, “Ob odnom klasse rjadov Dirihle“, *Kujbyshev, Teorija chisel: sb. nauch. trudov*, pp. 53–57.
3. Kuznetsov, V. N. 1987, “Ob analiticheskom prodolzhenii odnogo klassa rjadov Dirihle“, *Saratov: izd-vo SGU, Vychislitel'nye metody i programmirovanie: mezhvuz. sb. nauch. trudov.*, pp. 17–23.
4. Kuznetsov, V. N. Kuznetsova, T. A. Secinskaja, E. V. & Krivibok, V. V. 2007, “O rjadah Dirihle, opredeljajushhih celye funkcii s opredelennnym porjadkom rosta modulja“, *Saratov: izd-vo SGU, ssledovanija po algebre, teorii chisel i smezhnym voprosam.*, iss. 4, pp. 69 – 75.
5. Matveeva, O. A. 2013, “Approksimacionnye polinomy i povedenie L-funkcij Dirihle v kriticheskoj polose“, *Saratov: izd-vo SGU, Izvestija Sarat. un-ta. Matematika, Mehanika. Informatika.*, iss. 4, vol. 2, pp. 80 – 84.
6. Matveev V. A. Matveeva, O. A. 2013, “O povedenii v kriticheskoj polose rjadov Dirihle s konechnoznachnymi mul'tiplikatinymi kojefficientami i s ogranichennoj summatornoj funkciej“, *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 13, pp. 106 – 116.
7. Matveeva, O. A. 2014, “Analiticheskie svojstva opredelennyh klassov rjadov Dirihle i nekotorye zadachi teorii L-funkcij Dirihle“, *Ulyanovsk: Thesis for the academic degree of the Ph.D.*, pp. 110.
8. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, “O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi kojefficientami“, *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 17, pp. 115 – 124.
9. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, “Approksimacionnyj podhod v nekotoryh zadachah teorii rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi kojefficientami “, *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 17, pp. 124 – 131.
10. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, “O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle“, *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 17, pp. 181 – 189.
11. Korotkov, A. E. Matveeva, O. A. 2011, “Ob odnom chislennom algoritme opredelenija nulej rjadov Dirihle s periodicheskimi kojefficientami“, *Belgorod: Nauchnye vedomosti BelGU.*, iss. 24, pp. 47 –54.
12. Karatsuba, A. A. 1983, Osnovy analiticheskoj teorii chisel, *Moscow, Nauka*, pp. 239.
13. Dem'janov, A. A. Malozemov V. N. 1972, Vvedenie v minimaks, *Moscow, Nauka*, pp. 368.
14. Kuznetsov, V. N. 1984, “Analog teoremy Sjoge dlja odnogo klassa rjadov Dirihle“, *Mat. zametki.*, vol. 38, iss. 6, pp. 805 – 813.
15. Chernov, V. I. 1982, “Ob odnom klasse rjadov Dirihle s konechnymi funkcijami Lindeljofa“, *Issledovanija po teorii chisel: Mezhvuz. nauch. sb.*, iss. 8, pp. 92 – 95.