

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-255-259

ОЦЕНКА МНОГОЧЛЕНА ОТ ГЛОБАЛЬНО  
ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО ПОЛИАДИЧЕСКОГО ЧИСЛА

Е. С. Крупицын (г. Москва)

## Аннотация

Пусть

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n_n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_n \leq n_n,$$

где  $n_k$  — быстро возрастающая последовательность натуральных чисел. Этот ряд сходится во всех полях  $\mathbb{Q}_p$   $p$ -адических чисел и представляет собой полиадическое число. Кольцо целых полиадических чисел является прямым произведением колец целых  $p$ -адических чисел по всем простым числам  $p$ . Это позволяет рассматривать  $\alpha$ , как бесконечномерный вектор  $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}, \dots)$ , где координата с номером  $n$  равна сумме этого ряда в поле  $\mathbb{Q}_{p_n}$ , где  $p_n$  —  $n$ -ое простое число.

Для любого многочлена  $P(x)$ , отличного от тождественного нуля и имеющего целые коэффициенты, имеет место равенство

$$P(\alpha) = (P(\alpha^{(1)}), \dots, P(\alpha^{(n)}), \dots).$$

Полиадическое число  $\alpha$  называется алгебраическим, если  $P(\alpha)$  есть нулевой вектор,  $P(\alpha) = (0, \dots, 0)$ .

В работах В.Г. Чирского введены понятия трансцендентного, бесконечно трансцендентного, глобально трансцендентного числа. Именно, полиадическое число  $\alpha$  называется алгебраическим, если для любого многочлена  $P(x)$  полиадическое число  $P(\alpha)$  не равно нулю, т.е. имеет хотябы одну отличную от нуля координату  $P(\alpha^{(n)})$ . Полиадическое число называется бесконечно трансцендентным, если таких координат бесконечно много и глобально трансцендентным, если все  $P(\alpha^{(n)}) \neq 0$ . В работе получены оценки снизу  $|P(\alpha^{(n)})|_{p_n}$  в любом поле  $\mathbb{Q}_{p_n}$ . Следствием является глобальная трансцендентность  $\alpha$ .

*Ключевые слова:* оценка многочлена, полиадическое число, трансцендентность.

*Библиография:* 15 названий.

ESTIMATES OF POLYNOMIALS IN A LIOUVILLEAN  
POLYADIC INTEGER

E. S. Krupitsyn (Moscow)

## Abstract

Let

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n_n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_n \leq n_n,$$

with a rapidly growing sequence  $n_k$  of positive integers. This series converges in all  $p$ -adic fields  $\mathbb{Q}_p$  so it is a polyadic number.

The ring of polyadic integers is a direct product of the rings  $\mathbb{Z}_p$  of  $p$ -adic integers over all prime numbers  $p$ .

So  $\alpha$  can be considered as the vector  $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}, \dots)$  with coordinates equal to the sums  $\alpha^{(n)}$  of the series  $\alpha$  in the field  $\mathbb{Q}_{p_n}$  for the  $n$ -th prime  $p_n$ .

For any nonzero polynomial  $P(x)$  with integer coefficients one has

$$P(\alpha) = \left( P(\alpha^{(1)}), \dots, P(\alpha^{(n)}), \dots \right).$$

The polyadic integer  $\alpha$  is called transcendental, if for any nonzero polynomial  $P(x)$  with rational integer coefficients there exist a prime  $p^{(n)}$  with  $P(\alpha^{(n)}) \neq 0$  in  $p_n$ .

The polyadic integer is infinitely transcendental if there exist infinitely many primes  $p_n$  such that  $P(\alpha^{(n)}) \neq 0$  in  $\mathbb{Q}_{p_n}$  and it is called globally transcendental, if  $P(\alpha^{(n)}) \neq 0$  for any  $n$ .

The paper presents estimates from below of  $|P(\alpha^{(n)})|_{p_n}$  in any  $\mathbb{Q}_{p_n}$ . As a corollary we get the global transcendence of  $\alpha$ .

*Keywords:* polyadic integer, estimates of polynomials.

*Bibliography:* 15 titles.

## 1. Введение

В работе дается оценка многочлена от полиадического лиувиллева числа. Теория полиадических чисел изложена, например, в книге [1]. Арифметические свойства полиадических чисел исследовались в работах В. Г. Чирского [2]–[11], [15], Д. Бертрана [12], В. Ю. Матвеева, Е. С. Крупицына [13] и др.

В работе Цайсова [14] установлена оценка многочлена от лиувиллева числа в архимедовом случае.

Цель этой работы — доказательство теоремы.

## 2. Основной текст статьи

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_k \leq n_k, \quad n_k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$\frac{(n_k + 1) \ln(n_k + 1)}{n_k + 1} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Пусть  $\varepsilon(H) \rightarrow 0$  при  $H \rightarrow +\infty$ . Пусть  $\tilde{p} \in \mathbb{N}$ . Тогда существует  $H_0 = H_0(\tilde{p})$  такая, что для любого простого числа  $p \leq \tilde{p}$  и любого многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа  $H$ ,  $H \geq H_0$ , имеющего степень  $m$ , удовлетворяющую неравенству

$$m\varepsilon(H) < \frac{\ln \tilde{p}}{2(\tilde{p} - 1)} \quad (3)$$

выполнено неравенство

$$|P(\alpha)|_p > \frac{1}{m+1} \cdot H^{-1-\varepsilon^{-1}(H)(\ln \ln H + \ln \varepsilon^{-1}(H)) \cdot m}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для  $N \in \mathbb{N}$   $\alpha_N = \sum_{k=1}^N a_k n_k!$ . Имеет место равенство

$$P(\alpha_N) = P(\alpha) + P'(\alpha)(\alpha_N - \alpha) + \dots + \frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!}(\alpha_N - \alpha)^m \quad (5)$$

Если

$$\alpha_N > H + 1, \quad (6)$$

то по лемме о модуле старшего члена  $P(\alpha_N) \neq 0$  и

$$|P(\alpha_N)|_p \geq \frac{1}{|P(\alpha_N)|} \quad (7)$$

Ввиду неравенства

$$\left| P'(\alpha)(\alpha_N - \alpha) + \dots + \frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!}(\alpha_N - \alpha)^m \right|_p \leq |\alpha_N - \alpha|_p \leq |n_{N+1}|_p$$

из (5) и (7) следует, что

$$|P(\alpha)|_p \geq \frac{1}{|P(\alpha_N)|} \quad (8)$$

если

$$|n_{N+1}|_p < \frac{1}{|P(\alpha_N)|}. \quad (9)$$

Для величины  $|P(\alpha_N)|$  имеем оценку

$$|P(\alpha_N)| \leq H \cdot (m+1) \cdot \alpha_N^m \leq H \cdot (m+1) \cdot ((n_N + 1)!)^m. \quad (10)$$

Ввиду формулы  $|n!|_p = p^{-\frac{n-S_n}{p-1}}$ , где  $S_n$  — сумма цифр  $p$ -ичного разложения числа  $n$  получаем, что неравенство (10) следует из неравенства

$$\ln(H(m+1)) + m(n_N + 1) \ln(n_N + 1) < \frac{\ln p}{p-1} \cdot n_{N+1} - \ln(p \cdot n_{N+1}). \quad (11)$$

При  $N \geq N_0(H)$  ввиду (2),

$$\frac{(n_N + 1) \ln(n_N + 1)}{n_{N+1}} < \varepsilon(H) \quad (12)$$

и

$$\ln(n_{N+1} p) < m\varepsilon(H)n_{N+1}.$$

Поэтому (8) выполняется, если одновременно выполнены эти неравенства, условие (6) и неравенство

$$n_{N+1} > \frac{(\ln H(m+1))(p-1)}{\ln p - 2m(p-1)\varepsilon(H)}. \quad (13)$$

В свою очередь, условие (6) следует из неравенства

$$(n_N + 1) \ln \left( \frac{n_N + 1}{e} \right) > \ln(H+1)$$

или, с учетом (12), из

$$n_{N+1} > \frac{\ln(H+1)}{\varepsilon(H)}. \quad (14)$$

Если считать, что  $m(H) \leq H$ , то неравенство (13) следует из (14).

Пусть теперь  $N$  выбрано так, что  $N \geq N_0(H)$  и выполняются неравенства (14) и

$$n_N \leq \frac{\ln(H+1)}{\varepsilon(H)}. \quad (15)$$

Это можно сделать при  $H \geq H_0(p)$ . Тогда из (15) получаем заключение теоремы (4).  $\square$

### 3. Заключение

Подобными, но существенно более громоздкими рассуждениями можно получить оценку многочлена от совокупности полиадических чисел. Отметим, что в отличие от архимедовского случая проще устанавливается, что значение многочлена в приближающей точке отлично от нуля.

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.
2. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика, том 439, №6, с. 677-679, 2014.
3. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, том 81, выпуск 2, с. 215-232, 2017.
4. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник, том 17, №3, с. 180-185, 2016.
5. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, том 78, №6, с. 193-210, 2014.
6. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Матем. заметки, том 48, вып. 2, с. 123-127, 1990.
7. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета, Серия 1: Математика. Механика. №1, с. 59-61, 2015.
8. Чирский В. Г., Нестеренко А. Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискретная математика, том 27, №4, с. 150-157, 2015.
9. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та. — Сер.1, матем., механ., №3, с.93-95, 1994.
10. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник, том 12, №4, с. 129-134, 2011.
11. Чирский В. Г. Чирский Полиадические оценки для  $F$ -рядов. // Чебышёвский сборник, т.13, вып.2, с. 131-136, 2012.
12. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse – V.XIII, №2. 2004. pp. 241-260.
13. Крупицын Е. С., Чирский В. Г. Оценки многочленов от некоторых полиадических чисел // Преподаватель XXI век, №4, с. 217-224, 2012.
14. Cijssouw P. L. Transcendence measures. Amsterdam: Acad. Proefschrift, 1972.
15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of yu.v. nesterenko // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 24, no. 2. — P. 153–171.

## REFERENCES

1. Postnikov A. G. 1971, *Introduction to the analytic number theory*. Moscow.
2. Chirskii V. G. 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, vol. 90, no. 3, pp. 766-768.
3. Chirskii V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izvestiya Mathematics*, vol. 81, no. 2. pp. 444-461.
4. Chirskii V. G. 2016, "An approach to the transformation of periodic sequences", *Chebyshevskii sb.*, vol. 17, no. 3, pp. 180-185.
5. Chirskii V. G. 2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya Mathematics*, no. 6, pp. 1244-1260.
6. Chirskii V. G. 1990, "On global relations", *Math. notes*, vol. 48, no. 2, pp. 123-127. 1990.
7. Chirskii V. G. 2015, "Arithmetic properties of Euler series", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 70, no. 1, pp. 41-43.
8. Chirskii V. G., Nesterenko A. Yu. 2017, "An approach to the transformation of periodic sequences", *Discrete Mathematics and Applications*, vol. 27. no. 1, pp. 1-6.
9. Chirskii V. G. 1994, "On series which are algebraically independent in all local fields", *Vestnik Mosc. Univ., Ser.1, math.-mech.* no. 3, pp. 93-95.
10. Chirskii V. G. 2011, "Estimates for linear forms and polynomials in polyadic numbers", *Tchebyshev. Sbornik*, vol. 12, no. 4, pp. 129-134.
11. Chirskii V. G. 2012, "Polyadic estimates for  $F$ -series", *Tchebyshev. Sbornik*, vol. 13, no. 2, pp. 131-136.
12. Bertrand D., Chirskii V. G., & Yebbou Y. 2004, "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse –* vol. 13, no. 2, pp. 241-260.
13. Krupitsyn E. S., Chirskii V. G. 2012, "Estimates of polynomials in some polyadic numbers", *Prepodavatel' XXI century*, no. 4, pp. 217-224.
14. Cijssouw P. L. 1972, *Transcendence measures*. Amsterdam, Acad. Proefschrift.
15. Chirskii V. G. 2017, "Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu. V. Nesterenko", *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153-171.