ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511.35, 511.48, 511.75

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ПРИ ВОЗРАСТАНИИ ИХ ВЫСОТ

Д. В. Коледа (г. Минск, Беларусь)

Аннотация

До недавнего времени даже для алгебраических чисел второй степени не было известно, насколько часто они попадают в произвольный промежуток в зависимости от его положения и длины.

Пусть $\mathbb{A}_n$ — множество алгебраических чисел степени n, а $H(\alpha)$ — обычная высота алгебраического числа α, определяемая как высота его минимального многочлена. Вышеназванная проблема сводится к исследованию следующей функции:

$$\Phi_n(Q,x) := \#\left\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap \mathbb{R} : H(\alpha) \leqslant Q,\ \alpha < x\right\}.$$

Недавно автором была найдена точная асимптотика функции $\Phi_n(Q,x)$ при $Q \to +\infty$. При этом, фактически, была корректно определена и явно описана функция плотности алгебраических чисел на вещественной прямой. Статья посвящена результатам о распределении вещественных алгебраических чисел. Для $n = 2$ усилена оценка остатка в асимптотике для $\Phi_2(Q,x)$, и получена формула:

$$\Phi_2(Q,+\infty) = \lambda\, Q^3 - \kappa\, Q^2 \ln Q + O(Q^2),$$

где λ и κ — эффективные постоянные.

Ключевые слова: алгебраические числа, обобщённые ряды Фарея, целочисленные многочлены.

Библиография: 16 названий.

ON THE ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF ALGEBRAIC NUMBERS WITH GROWING NAIVE HEIGHT

D. V. Koleda (Minsk, Belarus)

Abstract

Till recently, even for quadratic algebraic numbers, it was unknown, how frequently do algebraic numbers appear in an arbitrary interval depending on its position and length.

Let $\mathbb{A}_n$ be the set of algebraic numbers of n-th degree, and let $H(\alpha)$ be the naive height of α that equals to the naive height of its minimal polynomial by definition. The above problem comes to the study of the following function:

$$\Phi_n(Q,x) := \#\left\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap \mathbb{R} : H(\alpha) \leqslant Q,\ \alpha < x\right\}.$$

The exact asymptotics of $\Phi_n(Q,x)$ as $Q \to +\infty$ was recently obtained by the author. There, in fact, the density function of real algebraic numbers was correctly defined and explicitly described. In the paper, we discuss the results on the distribution of real algebraic numbers. For $n = 2$, we improve an estimate of a remainder term in the asymptotics of $\Phi_2(Q,x)$, and obtain the following formula:

$$\Phi_2(Q,+\infty) = \lambda Q^3 - \kappa Q^2 \ln Q + O(Q^2),$$

where λ and κ are effective constants.

Keywords: algebraic numbers, generalized Farey series, integral polynomials.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Пусть
$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$
многочлен степени n, $H(p) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ — высота многочлена p.

Под алгебраическим числом будем понимать такое $\alpha \in \mathbb{C}$, для которого существует ненулевой многочлен $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, такой что $p(\alpha) = 0$.

Многочлен $m_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ наименьшей положительной степени с взаимно простыми в совокупности коэффициентами, для которого α является корнем, будем называть *минимальным многочленом* числа α. Степень и высоту алгебраического числа α определим соответственно как $\deg(\alpha) = \deg m_\alpha$ и $H(\alpha) = H(m_\alpha)$. Обозначим через $\mathbb{A}_n$ множество алгебраических чисел степени n.

Далее выражение $\#M$ обозначает количество элементов в конечном множестве M, а $\operatorname{mes}_k M$ — k–мерную Лебегову меру множества $M \subset \mathbb{R}^d$ ($k \leqslant d$). Длина промежутка I обозначается через $|I|$. Для записи асимптотических соотношений между функциями используется символ Виноградова $\ll$: выражение $f \ll g$ равнозначно неравенству $f \leqslant cg$, где c — некоторая константа. Запись $f \asymp g$ эквивалентна двойному неравенству $g \ll f \ll g$. Соотношение $f \ll_{x_1,x_2,\ldots}$ g

означает, что неявные постоянные зависят только от параметров $x_1, x_2, \ldots$, аналогично определяется $f \asymp_{x_1,x_2,\ldots} g$.

Алгебраические числа интересуют математиков с давних пор. С их распределением связан ряд известных, в том числе и нерешённых, проблем в теории чисел.

Постепенное развитие, углубление и обобщение результатов в теории диофантовых приближений привело к проблемам, связанным с вычислением Хаусдорфовой размерности множеств чисел, хорошо приближаемых алгебраическими числами. При решении проблем в этой области появляется в качестве мощного инструмента понятие регулярных систем алгебраических чисел [1]. Результаты работы [1] были усилены и обобщены в [2], [3], [4], что позволило доказать полный аналог теоремы Хинчина для приближения действительных и комплексных чисел алгебраическими.

Регулярность множества $\mathbb{A}_n \cap \mathbb{R}$ означает некоторую «равномерность» распределения, что упрощённо можно описать так: на любом промежутке I (для удобства будем считать $I \subset [-1, 1]$) при достаточно большом $Q \geqslant Q_0(I)$ найдётся $c_n Q^{n+1}|I|$ алгебраических чисел α, имеющих степень $\deg(\alpha) = n$ и высоту $H(\alpha) \leqslant Q$ и отстоящих друг от друга не менее чем на $Q^{-(n+1)}$. Но регулярность описывает только некоторое удобное подмножество алгебраических чисел, оставляя открытым вопрос о распределении алгебраических чисел в целом.

Самым простым и важным частным случаем алгебраических чисел являются рациональные числа. Наиболее известно упорядочение рациональных чисел в так называемые ряды Фарея. Данные последовательности имеют огромное множество приложений, а их распределение тесно связано с рядом открытых проблем в теории чисел [16]. Ряды Фарея распределены на промежутке $[0, 1]$ равномерно (см. например, [13], [14]).

В 1971 году К. Малер и Х. Браун [15] предложили естественное обобщение рядов Фарея на случай алгебраических чисел высших степеней. Однако до недавних пор, вопрос о распределении этих обобщённых рядов Фарея оставался открытым. Так, в 1985 году К. Малер в своём письме к В. Г. Спринджуку отмечал, что неизвестно, как распределены даже алгебраические числа второй степени, а именно, насколько часто попадают алгебраические числа в те или иные промежутки. В частной беседе В. И. Берник высказал гипотезу о равномерном распределении алгебраических чисел высших степеней и привёл некоторые естественные эвристические доводы в пользу своего предположения. Тем не менее, исследование [5], [6], [7] данной проблемы показало, что это не так.

Схема решения данной проблемы для произвольных степеней опубликована в [5]. Результат [5] опирается на оценки [6] количества многочленов, имеющих несколько корней на промежутке. Для второй степени полное доказательство получено в [7]. При этом используется упорядочение алгебраических чисел по обычной высоте, как наиболее естественное [15]. Однако, поскольку множество

$\mathbb{A}_n \cap \mathbb{R}$ всюду плотно на числовой прямой, существует бесконечно много способов упорядочить действительные алгебраические числа, при этом функции распределения будут существенно отличаться между собой. Здесь также следует упомянуть результаты по асимптотике общего количества алгебраических чисел с ограниченной мультипликативной высотой [8].

Сформулируем основной результат работ [5] и [7]. Обозначим количество действительных алгебраических чисел, имеющих степень n и высоту не больше Q, через $\Phi_n(Q,x)$, то есть

$$\Phi_n(Q,x) := \#\left\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap \mathbb{R} : H(\alpha) \leqslant Q,\ \alpha < x\right\}.$$

Общее количество действительных алгебраических чисел степени n и высоты не больше Q обозначим как $\Phi_n(Q,+\infty)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 ([5], [7]). *Существует непрерывная положительная функция $\phi_n(x)$, такая что для любых действительных a и b, $-\infty < a < b < +\infty$, верно равенство*

$$\Phi_n(Q,b) - \Phi_n(Q,a) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int\limits_a^b \phi_n(x)dx + O\big(Q^n (\ln Q)^{\ell(n)}\big), \tag{1}$$

где $\ell(n) = 0$ при $n \geqslant 3$, $\ell(n) = 1$ при $n = 2$, а неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от степени n. При этом существует бесконечно много промежутков $[a,b)$, для которых остаточный член имеет порядок $O(Q^n)$.

Функция $\phi_n(x)$ удовлетворяет функциональным уравнениям

$$1)\qquad \phi_n(-x) = \phi_n(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$2)\qquad x^2\phi_n(x) = \phi_n\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{3}$$

Функцию $\phi_n(t)$ можно вычислить по формуле

$$\phi_n(t) = \int\limits_{D_n(t)} \left|\sum_{k=1}^{n} k p_k t^{k-1}\right| dp_1 \ldots dp_n, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где $D_n(t) = \left\{(p_n,\ldots,p_1) \in \mathbb{R}^n : \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |p_i| \leqslant 1,\ \left|\sum\limits_{k=1}^{n} p_k t^k\right| \leqslant 1\right\}$,
$\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.

Заметим, что теорема 1 также включает в себя в качестве частного случая $n = 1$ общеизвестный результат о равномерном распределении рядов Фарея (другие доказательства см., например, в [13], [14]). В случае рациональных чисел функция плотности $\phi_1(x)$ имеет вид:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{x^2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

При этом (1) принимает вид

$$\Phi_1(Q,b) - \Phi_1(Q,a) = \frac{3Q^2}{\pi^2} \int\limits_a^b \phi_1(x)\,dx + O(Q \ln Q). \tag{5}$$

Здесь логарифмический множитель в остатке возникает при посчёте на плоскости количества точек с целыми взаимно простыми координатами. Тогда как для второй степени (см. [7]) логарифм в (1) появляется из оценки количества целочисленных многочленов, приводимых над $\mathbb{Q}$ (см. [9], [12]). При этом не учитывается, что количество таких многочленов, имеющих корни на промежутке I, уменьшается со стягиванием I.

2. Усиление оценки остаточного члена

Ниже будет доказана теорема, из которой будет следовать, что остаточный член в (1) при $n = 2$ имеет вид

$$O(Q^2 \ln Q |I| + Q^2).$$

С данным уточнением результат [7] становится неулучшаемым.

Чтобы доказать основной результат, оценки (5) недостаточно, потребуется следующий точный результат [14] о распределении рядов Фарея.

Теорема 2 ([14]). *Пусть*

$$\mathcal{F}_Q := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant a < b \leqslant Q,\ \gcd(a,b) = 1 \right\}.$$

Тогда для любого промежутка $I \subset [0,1]$ справедливо неравенство:

$$\left| \frac{\#(\mathcal{F}_Q \cap I)}{\#\mathcal{F}_Q} - |I| \right| \ll Q^{-1}. \tag{6}$$

Используя (2) и (3), легко расширить теорему 2 на всю числовую ось. При этом в (6) длину $|I|$ нужно заменить на интеграл $\frac{1}{4}\int_I \phi_1(x)\,dx$.

Перейдём непосредственно к теореме.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{R}_2(Q,I)$ есть множество целочисленных квадратичных многочленов высоты не больше Q, приводимых над $\mathbb{Q}$ и имеющих хотя бы один корень на промежутке I. Тогда*

$$\#\mathcal{R}_2(Q,I) \ll Q^2 \ln Q \int_I \phi_1(x)\,dx + O(Q^2),$$

Если промежуток I фиксирован и не зависит от Q, тогда при достаточно больших Q имеет место асимптотика:

$$\#\mathcal{R}_2(Q,I) \asymp Q^2 \ln Q \int_I \phi_1(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\nu(H,I)$ — количество рациональных чисел высоты H, лежащих на I. Пусть $f,g \in \mathbb{Z}[x]$ — линейные многочлены высот H_1 и H_2 соответственно. Пусть многочлен f имеет корень на I. Тогда количество многочленов, представимых в виде произведения fg, имеет порядок $H_2\,\nu(H_1,I)$.

Известно (см. [10, Теорема 17.2, с. 163]), что для любых линейных многочленов f и g справедлива оценка

$$\frac{1}{2}H(fg) \leqslant H(f)H(g) \leqslant \sqrt{3}\,H(fg).$$

Отсюда получаем, что

$$\#\mathcal{R}_2(Q,I) \asymp \sum_{\substack{1\leqslant H_1,H_2\\ H_1H_2\leqslant\sqrt{3}\,Q}} \nu(H_1,I)\,H_2 = \sum_{H_2=1}^{\sqrt{3}\,Q} H_2 \sum_{H_1=1}^{[\sqrt{3}\,Q/H_2]} \nu(H_1,I) =$$
$$= \sum_{H_2=1}^{\sqrt{3}\,Q} H_2\,N\left(\frac{\sqrt{3}\,Q}{H_2}, I\right),$$

где $N(Q,I)$ — количество рациональных чисел высоты не больше Q, лежащих на I.

Из (6) и классической оценки $\#\mathcal{F}_Q \asymp Q^2$

$$N\left(\frac{\sqrt{3}\,Q}{H_2}, I\right) \asymp \left(\frac{Q}{H_2}\right)^2 \int_I \phi_1(x)\,dx + O\left(\frac{Q}{H_2}\right).$$

Отсюда

$$\#\mathcal{R}_2(Q,I) \asymp Q^2 \int_I \phi_1(x)\,dx \sum_{H_2=1}^{\sqrt{3}\,Q} H_2^{-1} + O\left(Q \sum_{H_2=1}^{\sqrt{3}\,Q} 1\right).$$

Теорема доказана. □

Несложно увидеть, что для любых x

$$\phi_1(x) \asymp \frac{1}{1+x^2}.$$

Используя эту оценку, из теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $I = [a, b]$. Справедлива оценка*

$$\#\mathcal{R}_2(Q, I) \ll (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a)\, Q^2 \ln Q + O(Q^2).$$

3. Вычисление функции $\phi_2(x)$

Вычислим интеграл

$$\phi_2(t) = \iint\limits_{D_2(t)} |y + 2tz| dy\, dz,$$

где $D_2(t) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 :\ |y| \leqslant 1,\ |z| \leqslant 1,\ |zt^2 + yt| \leqslant 1\}$.

А именно, докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Функция $\phi_2(t)$ имеет вид:*

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 2 + \frac{8t^2}{3}, & |t| \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3|t|} + 4|t|, & \frac{1}{2} < |t| \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ -\frac{1}{t^4} + \frac{2}{|t|^3} + \frac{1}{3|t|} + 2|t| - t^2, & \frac{\sqrt{5}-1}{2} < |t| < \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \\ \frac{4}{|t|^3} + \frac{1}{3|t|}, & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \leqslant |t| < 2, \\ \frac{8}{3t^4} + \frac{2}{t^2}, & |t| \geqslant 2. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Из симметрии относительно начала координат следует, что

$$\iint\limits_{\mathcal{G}(t)} |y + 2tz| dy\, dz = \iint\limits_{\mathcal{G}_1(t)} |y + 2tz| dy\, dz = \frac{1}{2}\phi_2(t),$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 :\ |y| \leqslant 1,\ |z| \leqslant 1,\ |zt^2 + yt| \leqslant 1,\ y + 2tz > 0\right\},$$
$$\mathcal{G}_1(t) = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 :\ |y| \leqslant 1,\ |z| \leqslant 1,\ |zt^2 + yt| \leqslant 1,\ y + 2tz < 0\right\}.$$

Откуда получаем

$$\phi_2(t) = 2 \iint\limits_{\mathcal{G}(t)} (y + 2tz) dy\, dz.$$

Вычисление последнего интеграла удобно разбить на несколько случаев в зависимости от значения t. В силу свойств функции $\phi_2(t)$ достаточно рассмотреть только $t \in [0, 1]$.

1) $t^2+t\leqslant 1$, $t\geqslant 0$, что равносильно $t\in[0,t_0]$, где $t_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. На этом промежутке область $\mathcal{G}(t)$ имеет вид:

$$\mathcal{G}(t)=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2:\ |y|\leqslant 1,\ |z|\leqslant 1,\ y+2tz>0\right\}.$$

Далее, для удобства интегрирования, выделим здесь два подслучая.

а) $t\in[0,\tau_0]$, где $\tau_0=\frac{1}{2}$. В этом случае область $\mathcal{G}(t)$ принимает вид:

$$\mathcal{G}(t)=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2:\ |z|\leqslant 1,\ -2tz<y\leqslant 1\right\}.$$

В итоге

$$\phi_2(t)=2\int\limits_{-1}^{1}dz\int\limits_{-2tz}^{1}(y+2tz)\,dy=\int\limits_{-1}^{1}\left(1+4tz+4t^2z^2\right)dz=2+\frac{8t^2}{3}\,.$$

б) $t\in(\tau_0,t_0]$. При этом область $\mathcal{G}(t)$ имеет вид:

$$\mathcal{G}(t)=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2:\ |y|\leqslant 1,\ -\frac{y}{2t}<z\leqslant 1\right\}.$$

Откуда получаем

$$\phi_2(t)=2\int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{-y/2t}^{1}(y+2tz)\,dz=\int\limits_{-1}^{1}\left(2t+2y+\frac{y^2}{2t}\right)dy=\frac{1}{3t}+4t\,.$$

2) Рассмотрим случай $t\in(t_0,1]$. Область $\mathcal{G}(t)$ можно записать в виде:

$$\mathcal{G}(t)=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2:\ |y|\leqslant 1,\ -\frac{y}{2t}<z\leqslant\min\left(1,\frac{1-yt}{t^2}\right)\right\}.$$

Функцию $\phi_2(t)$ можно представить в виде удвоенной суммы двух интегралов $J_1(t)$ и $J_2(t)$:

$$J_1(t)=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{t}-t}dy\int\limits_{-y/2t}^{1}(y+2tz)\,dz,\qquad J_2(t)=\int\limits_{\frac{1}{t}-t}^{1}dy\int\limits_{-y/2t}^{\frac{1-yt}{t^2}}(y+2tz)\,dz.$$

Вычислим $J_1(t)$:

$$J_1(t)=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{t}-t}\left(t+y+\frac{y^2}{4t}\right)dy=t\left(\frac{1}{t}-t+1\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2-1\right)+$$

$$+\frac{1}{12t}\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^3+1\right)=\frac{1}{12t^4}+\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{12t}-\frac{1}{4}+t-\frac{7}{12}t^2.$$

Вычислим $J_2(t)$:

$$J_2(t) = \int\limits_{\frac{1}{t}-t}^{1} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{y}{t^2} + \frac{y^2}{4t} \right) dy = \frac{1}{t^3}\left(1 - \frac{1}{t} + t\right) - \frac{1}{2t^2}\left(1 - \left(\frac{1}{t} - t\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{12t}\left(1 - \left(\frac{1}{t} - t\right)^3\right) = -\frac{7}{12t^4} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{12t} + \frac{1}{4} + \frac{t^2}{12}.$$

В итоге получаем:

$$\phi_2(t) = -\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^3} + \frac{1}{3t} + 2t - t^2.$$

Учитывая функциональные тождества (2) и (3), из выражений при $0 \leqslant t \leqslant 1$ получаем утверждение леммы. □

4. Количество действительных квадратичных алгебраических чисел

Теорема 5. *Общее количество вещественных алгебраических чисел второй степени и высоты не больше Q равно:*

$$\Phi_2(Q, +\infty) = \frac{\gamma}{2\zeta(3)}\, Q^3 - \kappa\, Q^2 \ln Q + O(Q^2),$$

где

$$\gamma = \frac{2(41 + 6\ln 2)}{9}, \qquad \kappa = \frac{3\sqrt{5} + 2\ln(1+\sqrt{5}) - 2\ln 2}{\zeta(2)^2}.$$

Заметим, что постоянная γ выбрана так, чтобы $\gamma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)\, dx$.

Чтобы доказать эту теорему потребуется следущая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{R}_2^*(Q)$ — множество приводимых над $\mathbb{Q}$ квадратичных многочленов высоты не больше Q со взаимно простыми коэффициентами. Тогда*

$$\#\mathcal{R}_2^*(Q) = \kappa\, Q^2 \ln Q + O(Q^2),$$

где κ — та же постоянная, что и в теореме 5.

Доказательство. Будем считать Q целым числом. Пусть $\mathcal{R}_2(Q)$ — множество приводимых над $\mathbb{Q}$ квадратичных многочленов высоты не больше Q. В [12] получено следующее асимптотическое равенство:

$$\#\mathcal{R}_2(Q) = \tilde{\kappa}\, Q^2 \ln Q + O(Q^2), \tag{8}$$

где
$$\frac{6(3\sqrt{5}+2\ln(1+\sqrt{5})-2\ln 2)}{\pi^2}.$$

Несложно заметить, что
$$\#\mathcal{R}_2^*(Q)=\sum_{k=1}^{Q}\mu(k)\,\#\mathcal{R}_2(Q/k),$$

где $\mu(k)$ — функция Мёбиуса.

Из (8) получаем
$$\#\mathcal{R}_2^*(Q)=\tilde{\kappa}\sum_{k=1}^{Q}\mu(k)\left[\frac{Q}{k}\right]^2\ln\left[\frac{Q}{k}\right]+O\left(Q^2\sum_{k=1}^{Q}\frac{1}{k^2}\right).$$

Вычисляя сумму
$$\sum_{k=1}^{Q}\mu(k)\left[\frac{Q}{k}\right]^2\ln\left[\frac{Q}{k}\right]=Q^2\sum_{k=1}^{Q}\frac{\mu(k)}{k^2}\ln\left(\frac{Q}{k}\right)+O(Q(\ln Q)^2)=$$
$$=Q^2\ln Q\sum_{k=1}^{Q}\frac{\mu(k)}{k^2}-Q^2\sum_{k=1}^{Q}\frac{\mu(k)\ln k}{k^2}+O(Q(\ln Q)^2)=\frac{Q^2\ln Q}{\zeta(2)}+O(Q^2),$$

получаем утверждение леммы. □

Перейдём к доказательству теоремы 5. Несложно заметить, что количество действительных квадратичных алгебраических чисел высоты не больше Q равно удвоенному количеству неприводимых над $\mathbb{Z}$ многочленов (т.е со взаимно простыми коэффициентами) высоты не больше Q с положительным старшим коэффициентом и действительными корнями.

По принципу Липшица [11] о количестве целых точек в области получаем, что количество целочисленных многочленов, чьи вектора коэффициентов лежат в области $Q\cdot\mathcal{D}$, полученной растяжением в Q раз множества
$$\mathcal{D}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\max(|x|,|y|,|z|)\leqslant 1,\ z>0,\ y^2-4xz>0\right\},$$

равно
$$Q^3\operatorname{mes}_3\mathcal{D}+O(Q^2).$$

Отсюда, отсеивая по формуле включения-исключения многочлены, у которых коэффициенты имеют общий делитель больше единицы, и вычитая приводимые многочлены (лемма 1), получаем
$$\Phi_2(Q,+\infty)=\frac{2\operatorname{mes}_3\mathcal{D}}{\zeta(3)}Q^3-\kappa Q^2\ln Q+O(Q^2).$$

Несложно заметить, что

$$\operatorname{mes}_3 \mathcal{D} = 2(2 - \operatorname{mes}_3 \mathcal{M}_1 + \operatorname{mes}_3 \mathcal{M}_2), \tag{9}$$

где

$$\mathcal{M}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{xz}\right\},$$
$$\mathcal{M}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ 4xz \geqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{xz}\right\}.$$

Вычисляя объёмы областей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, получаем

$$\operatorname{mes}_3 \mathcal{M}_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{2\sqrt{xz}} dy \ = \ 2\left(\int\limits_0^1 \sqrt{t}\,dt\right)^2 \ = \ \frac{8}{9},$$

$$\operatorname{mes}_3 \mathcal{M}_2 = \int\limits_{\frac14}^1 dx \int\limits_{\frac{1}{4x}}^1 dz \int\limits_1^{2\sqrt{xz}} dy = \int\limits_{\frac14}^1 \left(\frac{4\sqrt{x}}{3} - 1 + \frac{1}{12x}\right) dx = \frac{1}{36} + \frac{\ln 2}{6}.$$

Подставляя полученные значения в (9), получаем значение γ. Теорема доказана.

5. Заключение

В настоящей работе была уточнена оценка остаточного члена в формуле (1) для случая алгебраических чисел второй степени. В результате, равенство (1) при $n = 2$ принимает вид

$$\Phi_2(Q,b) - \Phi_2(Q,a) = \frac{Q^3}{2\zeta(3)} \int\limits_a^b \phi_2(x)\,dx + O\Big(\operatorname{arctg} x\big|_{x=a}^{b}\, Q^2 \ln Q + Q^2\Big),$$

где неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ абсолютна.

Для функции $\phi_2(x)$ получено явное выражение через элементарные функции.

Найдена асимптотическая формула для общего количества действительных алгебраических чисел второй степени.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baker A., Schmidt W. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. London Math. Soc. 1970. Vol. 21. No. 3. P. 1–11.

2. Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arith. 1989. Vol. 53. No. 1. P. 17–28.

3. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. Vol. 90. No. 2. P. 97–112.

4. Берник В. И., Васильев Д. В. Теорема типа Хинчина для целочисленных многочленов комплексной переменной // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 1999. Т. 3. С. 10–20.

5. Каляда Д. У. Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені // Доклады НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 3. С. 28–33.

6. Коледа Д. В. О количестве многочленов с заданным числом корней на конечном промежутке // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2013. № 1. С. 41–49.

7. Коледа Д. В. О распределении действительных алгебраических чисел второй степени // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2013. № 3. С. 54–63.

8. Masser D., Vaaler J. D. Counting Algebraic Numbers with Large Height I // Diophantine Approximation. Developments in Mathematics. 2008. Vol. 16. P. 237–243.

9. van der Waerden B. L. Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt // Monatshefte für Mathematik. 1936. Vol. 43, No. 1. P. 133–147.

10. Прасолов В. В. Многочлены. 2-е издание стереотипное. М.: МЦНМО, 2001. 336 с.

11. Davenport H. On a principle of Lipschitz // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 179–183.
Davenport H. Corrigendum: “On a principle of Lipschitz” // J. London Math. Soc. 1964. Vol. 39. P. 580.

12. Dubickas A. On the number of reducible polynomials of bounded naive height // Manuscripta Mathematica. 2014. Vol. 144, No. 3–4. P. 439–456.

13. Mikolás M. Farey series and their connection with the prime number problem. I // Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. 1949. Vol. 13. P. 93–117.

14. Niederreiter H. The distribution of Farey points // Math. Ann. 1973. Vol. 201. P. 341–345.

15. Brown H., Mahler K. A generalization of Farey sequences: Some exploration via the computer // J. Number Theory. 1971. Vol. 3, No. 3. P. 364–370.

16. Cobeli C., Zaharescu A. The Haros-Farey sequence at two hundred years // Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 2003. No. 5. P. 1–38.

REFERENCES

1. Baker, A. & Schmidt, W. 1970, "Diophantine approximation and Hausdorff dimension", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 21, no. 3, pp. 1–11.

2. Bernik, V. I. 1989, "The exact order of approximating zero by values of integral polynomials", *Acta Arith.*, vol. 53, no. 1, pp. 17–28. (In Russian)

3. Beresnevich, V. 1999, "On approximation of real numbers by real algebraic numbers", *Acta Arith.*, vol. 90, no. 2, pp. 97–112.

4. Bernik, V. I. & Vasil'ev, D. V. 1999, "A Khinchin-type theorem for integer-valued polynomials of a complex variable", *Trudy Instituta Matematiki, Natl. Akad. Nauk Belarusi, Inst. Mat.*, vol. 3, pp. 10–20. (In Russian)

5. Koleda, D. V. 2012, "Distribution of real algebraic numbers of a given degree", *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, vol. 56, no. 3, pp. 28–33. (In Belarusian)

6. Koleda, D. V. 2013, "On the number of polynomials with a given number of roots on a finite interval", *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk*, no. 1, pp. 41–49. (In Russian)

7. Koleda, D. V. 2013, "Distribution of real algebraic numbers of the second degree", *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk*, no. 3, pp. 54–63. (In Russian)

8. Masser, D. & Vaaler, J. D. 2008, "Counting Algebraic Numbers with Large Height I", *Diophantine Approximation. Developments in Mathematics*, vol. 16, pp. 237–243.

9. van der Waerden, B. L. 1936, "Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt", *Monatshefte für Mathematik*, vol. 43, no. 1, pp. 133–147.

10. Prasolov, V. V. 2001, *Mnogochleny* [Polynomials], 2-nd ed., MCCME, Moskow. (Russian)

11. Davenport, H. 1951, "On a principle of Lipschitz", *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 179–183.
    Davenport, H. 1964, "Corrigendum: «On a principle of Lipschitz»", *J. London Math. Soc.*, vol. 39, pp. 580.

12. Dubickas, A. 2014, "On the number of reducible polynomials of bounded naive height", *Manuscripta Mathematica*, vol. 144, no. 3–4, pp. 439–456.

13. Mikolás, M. 1949, "Farey series and their connection with the prime number problem. I", *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, vol. 13, pp. 93–117.

14. Niederreiter, H. 1973, “The distribution of Farey points”, *Math. Ann.*, vol. 201, pp. 341–345.

15. Brown, H. & Mahler, K. 1971, “A generalization of Farey sequences: Some exploration via the computer”, *J. Number Theory*, vol. 3, no. 3, pp. 364–370.

16. Cobeli, C. & Zaharescu, A. 2003, “The Haros-Farey sequence at two hundred years”, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, no. 5, pp. 1–38.

Институт математики НАН Беларуси (г. Минск, Беларусь)
Поступило 4.02.2015