ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 517.948

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254

КОЭРЦИТИВНАЯ ОЦЕНКА И ТЕОРЕМА РАЗДЕЛИМОСТИ
ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОПЕРАТОРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О. Х. Каримов (г. Душанбе)

Аннотация

Проблема разделимости дифференциальных операторов впервые исследовалась в работах В. Н. Эверитта и М. Гирца в начале семидесятых годов прошлого столетия. В своих работах они в основном исследовали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Позже этой проблемой занимались К. Х. Бойматов, М. Отелбаев, Ф. В. Аткинсон (F. V. Atkinson), В. Д. Эванс (W. D. Evans), А. Цеттл (A. Zettl) и др. Основная часть опубликованных работ по этому направлению относятся к случаю линейных операторов (как обыкновенных дифференциальных операторов, так и операторов с частными производными). Разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, рассматривалась в случае, когда исследуемый оператор является слабым возмущением линейного оператора. Случай, когда исследуемый оператор не является слабым возмущением линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Результаты настоящей работы, также относятся к этому малоизученному случаю. Она посвящена изучению коэрцитивных свойств нелинейных дифференциальных операторов вида

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x)$$

в гильбертовом пространстве $L_2(R)$ и доказана теорема о разделимости этого оператора.

Исследуемый оператор $L[u(x)]$ является строго нелинейным, то есть его нельзя представить в виде слабого возмущения линейного оператора.

Ключевые слова: нелинейный дифференциальный оператор, коэрцитивная оценка, теорема разделимости, гильбертово пространство.

Библиография: 19 названий.

COERCIVE ESTIMATE AND SEPARATION THEOREM FOR
ONE NONLINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR IN A
HILBERT SPACE

O. Kh. Karimov (Dushanbe)

Abstract

Problem of separation for differential operators was first investigated by W. N. Everitt and M. Gierztz in the beginning of seventieth of the last century. They mainly have investigated, in their works, separation of Sturm–Liouville operator operator and its powers. Later, this problem was investigated by K. Kh. Boimatov, M. Otelbaev, F. V. Atkinson, W. D. Evans, A. Zettl and others. The main part of papers published in this direction concerns with the case of linear operators (both ordinary differential operators and partial differential operators). Separation of nonlinear differential operators was mainly investigated in case when operator under consideration was a weak perturbation of linear one. The case when operator under consideration is not a weak perturbation of linear one was investigated only in some works.

Results of this paper also concerns with this poorly studied case. The paper is devoted to studying coercive properties of nonlinear differential operator of the form

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x)$$

in Hilbert space $L_2(R)$ and separation theorem for this operator is proved.

The investigated operator $L[u(x)]$ is strictly nonlinear, in the sense that in the general case it cannot be represented as a weak perturbation of a linear operator.

Keywords: nonlinear differential operator, coercive estimate, separation theorem, Hilbert space.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

Термин «разделимость» впервые введен В. Н. Эвериттом и М. Гирцом [1], где исследовалась разделимость оператора Штурма–Лиувилля

$$L[y] = -y''(x) + V(x)y(x), \quad x \in I,$$

в пространстве $L_2(I)$, I — некоторый отрезок вещественной оси. В последующих своих работах (см., например, [2]–[4]) они также исследовали разделимость степеней оператора Штурма–Лиувилля. В дальнейшем в исследовании и развитие данной теории внесли свой вклад К. Х. Бойматов, М. Отелбаев и их ученики (см. [5]–[11] и имеющиеся там ссылки).

Впервые разделимость дифференциальных выражений с частными производными исследовалась К.Х. Бойматовым [5]. Из последних работ, посвященных разделимости линейных операторов с частными производными, отметим [12]–[15] и [16]. В статье [12] рассматривается разделимость линейного оператора Гельмгольца

$$Au(x) = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x)u(x)$$

в гильбертовом пространстве.

В работах [13] и [16] исследовалась разделимость линейного бигармонического оператора $L[u(x)] = \Delta^2 u(x) + V(x)u(x)$ в пространстве $L_2(R^n)$. Случай линейного трижды гармонического дифференциального оператора

$$L[u(x)] = -\Delta^3 u(x) + V(x)u(x)$$

рассматривался в статье [14]. Работа [15] посвящена исследованию разделимости и разрешимости уравнения Лапласа–Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, рассматривалась тогда, когда исследуемый оператор является слабым возмущением линейного оператора (см., например, [8] и [10]). Лишь в отдельных работах (см., например, [7], [17] — [19]) изучалась разделимость строго нелинейных дифференциальных операторов, то есть операторов не представляющихся в виде слабого возмущения линейного оператора. В работах [7] и [8] изучались коэрцитивные свойства нелинейного оператора Шредингера и Дирака, в статье [17] рассматривается вопрос о разделимости нелинейного дифференциального операторов второго порядка с матричными коэффициентами. В работе [19] изучались коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом

$$L[u(x)] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

во всём n -мерном евклидовом пространстве.

Здесь мы исследуем разделимость нелинейного дифференциального оператора

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x), \quad x \in R = (-\infty, +\infty),$$

в гильбертовом пространстве $L_2(R)$. То есть, как в [7], [17], [18], [19] рассматриваемый нами оператор является строго нелинейным.

2. Формулировка основного результата

В пространстве $L_2(R)$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $V(x, z)$ -положительная функция. За областью определения оператора (1) примем множество всех $u(x) \in L_2(R) \cap W_{2,loc}^6(R)$ таких, что $L[u(x)] \in L_2(R)$.

Представим функцию $V(x, z)$ в виде

$$V(x, z) = F(x, \xi, \eta), \quad \xi = Rez, \quad \eta = Imz.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор $L[u]$) называется разделимым в $L_2(R)$, если

$$u^{VI}(x), V(x, u)u(x) \in L_2(R)$$

для всех $u(x) \in L_2(R) \cap W_{2,loc}^6(R)$ таких, что $f(x) \in L_2(R)$.

Предположим, что $F(x, \xi, \eta) \in C^3(R^3)$ и для всех $x \in R$, $\omega = \xi + i\eta \in C$, $\Omega = \mu + i\nu \in C$, $u \in W_2^2(R)$ выполняется следующие неравенства

$$\|F^{-\frac{1}{2}}F'''_{xxx}F^{-1}; L_2(R)\| \leq \sigma_1, \quad (2)$$

$$\|F^{-\frac{1}{2}}F''_{xx}u'(x); L_2(R)\| \leq \sigma_2\|Fu; L_2(R)\|, \quad (3)$$

$$\|F^{-\frac{1}{2}}F'_xu''(x); L_2(R)\| \leq \sigma_3\|Fu; L_2(R)\|, \quad (4)$$

$$\|F^{-\frac{1}{2}}(F'_\xi\mu + F'_\eta\nu)\omega; C\| \leq \delta_3\|F^{\frac{1}{2}}\Omega; C\|, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\|F^{-\frac{1}{2}}(F''_{\xi\xi}\mu^2 + F''_{\xi\xi}\mu'_x + 2F''_{x\xi}\mu + 2F''_{\xi\eta}\mu\nu + 2F''_{x\eta}\nu + \\ &\quad + F'_\eta\nu'_x + F''_{\eta\eta}\nu^2)\omega; C\| \leq \delta_2\|F^{\frac{1}{2}}\Omega; C\|; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\|F^{-\frac{1}{2}}(F'''_{\xi\xi\xi}\mu^3 + F'_\xi\mu''_{xx} + 3F'''_{xx\xi}\mu + 3F'''_{xx\eta}\nu + 3F'''_{x\xi\xi}\mu^2 + \\ &\quad + 3F'''_{\xi\xi\eta}\mu^2\nu + 3F''_{\xi\xi}\mu\mu'_x + 3F''_{x\xi}\mu'_x + 6F'''_{x\xi\eta}\mu\nu + 3F'''_{x\eta\eta}\nu^2 + \\ &\quad + 3F''_{\xi\eta}\nu\mu'_x + 3F''_{\xi\eta\eta}\mu\nu'_x + 3F''_{x\eta}\nu'_x + 3F''_{\eta\eta}\nu\nu'_x + 3F'''_{\xi\eta\eta}\mu\nu^2 + \\ &\quad + F'_\eta\nu''_{xx} + F'''_{\eta\eta\eta}\nu^3)\omega; C\| \leq \delta_1\|F^{\frac{1}{2}}\Omega; C\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Сформулируем основной результат работы

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (2)-(7) и пусть числа $\sigma_j \quad j = \overline{1, 3}$, $\delta_i \quad i = \overline{1, 3}$ такие, что

$$3\sigma_1 + 9\sigma_2 + 9\sigma_3 + 4\delta_1 + 12\delta_2 + 12\delta_3 < 4. \quad (8)$$

Тогда нелинейный оператор (1) разделяется в пространстве $L_2(R)$ и для всех функций $u(x) \in L_2(R) \cap W_{2,loc}^6(R)$ уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_2(R)$ справедливо выключения

$$u^{VI}(x), \quad V(x, u(x))u(x), \quad V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))u'''(x) \in L_2(R).$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \|u^{VI}(x); L_2(R)\| + \|V(x, u)u(x); L_2(R)\| + \\ & + \|V^{\frac{1}{2}}(x, u)u'''(x); L_2(R)\| \leq M\|f(x); L_2(R)\|, \end{aligned} \quad (9)$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$ и $f(x)$.

3. Вспомогательные леммы.

Далее мы часто воспользуемся следующей леммой, которая доказывается интегрированием по частям.

ЛЕММА 1. Пусть $\psi(x) \in C_0^\infty(R)$, тогда для любых двух функций $u(x)$, $\vartheta(x) \in W_{2,loc}^1(R)$ выполняется равенство

$$\langle \omega_1', \psi \omega_2 \rangle = -\langle \omega_1, \psi' \omega_2 \rangle - \langle \omega_1, \psi \omega_2' \rangle, \quad (\omega_1, \omega_2 \in W_{2,loc}^1(R), \quad \psi \in C_0^\infty(R)). \quad (10)$$

ЛЕММА 2. Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(R)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_2(R) \cap W_{2,loc}^6(R)$. Тогда функции $V^{1/2}(x, u(x))u(x)$, $u'''(x)$ принадлежат пространству $L_2(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle f(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x) \rangle &= \langle u^V(x), (\varphi_\varepsilon(x))' u(x) \rangle + \\ &+ \langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x)u'(x) \rangle + \langle V(x, u(x))u(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x) \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\langle, \rangle$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(R)$.

Далее несколько раз применяя лемму 1 из равенства (11) получим

$$\begin{aligned} \langle f(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x) \rangle &= \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))''' u(x) \rangle + 3\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'' u'(x) \rangle + \\ &+ 3\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))' u''(x) \rangle + \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x)u'''(x) \rangle + \\ &+ \langle V(x, u(x))u(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x) \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как функция $\varphi_\varepsilon(x)$ вещественнозначная, и

$$\left| (\varphi_\varepsilon(x))' \right| \leq M_0 \varepsilon, \quad \left| (\varphi_\varepsilon(x))'' \right| \leq M_1 \varepsilon^2, \quad \left| (\varphi_\varepsilon(x))''' \right| \leq M_2 \varepsilon^3, \quad \forall x \in R,$$

где

$$M_0 = \sup |\varphi'(x)|, \quad M_1 = \sup |\varphi''(x)|, \quad M_2 = \sup |\varphi'''(x)|,$$

то из равенство (12) переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, используя неравенство Коши-Буняковского находим

$$\|f(x)\| \|u(x)\| \geq \operatorname{Re} \langle f(x), u(x) \rangle \geq \langle u'''(x), u'''(x) \rangle + \langle V(x, u(x))u(x), u(x) \rangle,$$

что и доказывает лемму 2.

4. Доказательство теоремы 1

Для любого $\nu > 0$ выполняется равенство

$$\langle f(x), \varphi_\varepsilon f(x) \rangle = \langle Fu(x), \varphi_\varepsilon Fu(x) \rangle + \nu \langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon u^{VI}(x) \rangle + A_1^\varepsilon(u) - A_2^\varepsilon(u), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A_1^\varepsilon(u) &= -(1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon Fu(x) \rangle \\ A_2^\varepsilon(u) &= (1 - \nu) \operatorname{Re} \langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon f(x) \rangle \end{aligned}$$

Для любого $\alpha_1 > 0$ справедливо неравенство

$$|A_2^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha_1 |1 - \nu|}{2} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) u^{VI}(x)\|^2 + \frac{|1 - \nu|}{2\alpha_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) f(x)\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ - норма в пространстве $L_2(R)$.

Далее, имеем

$$\begin{aligned} A_1^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u^V(x), (\varphi_\varepsilon(x))' Fu(x) \rangle + \\ &+ (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} [F(x, u)] u(x) \rangle + (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x) Fu'(x) \rangle. \end{aligned}$$

Используя лемму 1, после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} A_1^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x) F(x, u) u'''(x) \rangle + B_1^\varepsilon(u) + \\ &+ B_2^\varepsilon(u) + 3B_3^\varepsilon(u) + 3B_4^\varepsilon(u) + 3B_5^\varepsilon(u) + \\ &+ 6B_6^\varepsilon(u) + 3B_7^\varepsilon(u) + 3B_8^\varepsilon(u) + 3B_9^\varepsilon(u), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} B_1^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))''' F(x, u) u(x) \rangle, \\ B_2^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} [F(x, u)] \right] \right] u(x) \rangle, \\ B_3^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'' \frac{\partial}{\partial x} [F(x, u)] u(x) \rangle, \\ B_4^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'' F(x, u) u'(x) \rangle, \\ B_5^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))' \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} [F(x, u)] \right] \right] u(x) \rangle, \\ B_6^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))' \frac{\partial}{\partial x} [F(x, u)] u'(x) \rangle, \\ B_7^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))' F(x, u) u''(x) \rangle, \\ B_8^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} [F(x, u)] \right] \right] u'(x) \rangle, \\ B_9^\varepsilon(u) &= (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} [F(x, u)] u''(x) \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} [F(x, \xi, \eta)] = \frac{\partial}{\partial x} [F(x, \operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x))] = F'_x + F'_\xi \cdot \operatorname{Re} u'_x + F'_\eta \cdot \operatorname{Im} u'_x$$

преобразуем функционалы $B_i(u)$, $i = \overline{1, 9}$ к следующему виду:

$$B_1^\varepsilon(u) = (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))''' F(x, u) u(x) \rangle,$$

$$\begin{aligned} B_2^\varepsilon(u) = & (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x) \left(F_{xxx}''' + F_{\xi\xi\xi}''' (Reu'(x))^3 + F_\xi' Reu'''(x) + 3F_{xx\xi}''' Reu'(x) + \right. \\ & + 3F_{x\xi\eta}''' Imu'(x) + 3F_{x\xi\xi}''' (Reu'(x))^2 + 3F_{\xi\xi\eta}''' (Reu'(x))^2 Imu'(x) + \\ & + 3F_{\xi\xi\xi}''' Reu'(x) Reu''(x) + 3F_{x\xi\xi}''' Reu''(x) + 6F_{x\xi\eta}''' Reu'(x) Imu'(x) + \\ & + 3F_{x\eta\eta}''' (Imu'(x))^2 + 3F_{\xi\eta\eta}''' Imu'(x) Reu''(x) + 3F_{\xi\eta\eta}''' Reu'(x) Imu''(x) + \\ & + 3F_{x\eta\eta}''' Imu''(x) + 3F_{\eta\eta\eta}''' Imu'(x) Imu''(x) + 3F_{\xi\eta\eta}''' Reu'(x) (Imu'(x))^2 + \\ & \left. + F_\eta' Imu'''(x) + 3F_{\eta\eta\eta}''' (Imu'(x))^3 \right) u(x) \rangle, \end{aligned}$$

$$B_3^\varepsilon(u) = (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'' (F_x' + F_\xi' Reu'(x) + F_\eta' Imu'(x)) u(x) \rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u) = (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'' F(x, u) u'(x) \rangle,$$

$$\begin{aligned} B_5^\varepsilon(u) = & (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon'(x) \left(F_{xx}'' + F_{\xi\xi}'' (Reu'(x))^2 + F_\xi' Reu''(x) + 2F_{x\xi}'' Reu'(x) + \right. \\ & \left. + 2F_{\xi\eta}'' Reu'(x) Imu'(x) + 2F_{x\eta}'' Imu'(x) + F_\eta' Imu''(x) + F_{\eta\eta}'' (Imu'(x))^2 \right) u(x) \rangle, \end{aligned}$$

$$B_6^\varepsilon(u) = (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon'(x) (F_x' + F_\xi' Reu'(x) + F_\eta' Imu'(x)) u'(x) \rangle,$$

$$B_7^\varepsilon(u) = (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))' F(x, u) u''(x) \rangle,$$

$$\begin{aligned} B_8^\varepsilon(u) = & (1 + \nu) \operatorname{Re} \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x) \left(F_{xx}'' + F_{\xi\xi}'' (Reu'(x))^2 + F_\xi' Reu''(x) + 2F_{x\xi}'' Reu'(x) + \right. \\ & \left. + 2F_{\xi\eta}'' Reu'(x) Imu'(x) + 2F_{x\eta}'' Imu'(x) + F_\eta' Imu''(x) + F_{\eta\eta}'' (Imu'(x))^2 \right) u'(x) \rangle, \end{aligned}$$

$$B_9^\varepsilon(u) = \langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x) (F_x' + F_\xi' Reu'(x) + F_\eta' Imu'(x)) u''(x) \rangle.$$

Здесь и далее значения F , F_x' , F_ξ' , F_η' , $F_{x\xi}''$, $F_{x\eta}''$, F_{xx}'' , $F_{\xi\eta}''$, $F_{xx\xi}'''$, $F_{x\xi\xi}'''$, $F_{x\eta\eta}'''$, $F_{xx\eta}'''$, $F_{x\xi\eta}'''$, $F_{\eta\eta\xi}'''$, $F_{\eta\xi\xi}'''$, F_{xxx}''' взяты в точке $(x, \operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x))$.

Оцениваем каждый член равенства (14), используя неравенство Коши - Буняковского

$$\operatorname{Re} \langle u, f \rangle \leq |\langle u, f \rangle| \leq \|u\| \|f\|.$$

Функционалы $B_1^\varepsilon(u)$, $B_3^\varepsilon(u)$, $B_4^\varepsilon(u)$, $B_5^\varepsilon(u)$, $B_6^\varepsilon(u)$ и $B_7^\varepsilon(u)$ в силу леммы 2 стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При оценки функционалов $B_2^\varepsilon(u)$, $B_8^\varepsilon(u)$ и $B_9^\varepsilon(u)$ для любого $x \in R$, $\omega = \xi + i\eta$, $\Omega = \mu + i\nu$ и $u \in W_2^3(R)$, учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1 y_2 \leq \frac{\alpha}{2} |y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha} |y_2|^2 \quad (15)$$

получим следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha}{2} \langle F^{\frac{1}{2}} u'''(x), \varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}} u'''(x) \rangle + \frac{\sigma_1}{2\alpha} (Fu, \varphi_\varepsilon Fu) + \delta_1 \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} u'''(x)\|^2, \quad (16)$$

$$|B_8^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha}{2} \langle F^{\frac{1}{2}} u'''(x), \varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}} u'''(x) \rangle + \frac{\sigma_2}{2\alpha} \langle Fu, \varphi_\varepsilon Fu \rangle + \delta_2 \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} u'''(x)\|^2, \quad (17)$$

$$|B_9^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha}{2} \langle F^{\frac{1}{2}} u'''(x), \varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}} u'''(x) \rangle + \frac{\sigma_3}{2\alpha} \langle Vu, \varphi_\varepsilon Fu \rangle + \delta_3 \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} u'''(x)\|^2. \quad (18)$$

Здесь α - произвольное положительное число, а $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \delta_1, \delta_2$ и δ_3 - константы из условий (2) - (7).

На основе полученных оценок из равенства (13), учитывая неравенство

$$-|Z| \leq \operatorname{Re} Z \leq |Z|$$

переходим к неравенству при любых $\nu, \beta > 0$:

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x) \right\|^2 &\geq \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} Fu(x)\|^2 + \nu \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{VI}(x)\|^2 + \\ &- \frac{\alpha_1 |1 - \nu|}{2} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{VI}(x)\|^2 - \frac{|1 - \nu|}{2\alpha_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x)\|^2 + \\ &+ (1 + \nu) \left\{ \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} u'''(x)\|^2 - |B_2(\varepsilon)| - |B_8(\varepsilon)| - |B_9(\varepsilon)| \right\} \end{aligned}$$

Далее имея ввиду неравенств (16) - (18) при любых $\nu, \alpha_1, \alpha > 0$ получим неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x) \right\|^2 &\geq \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} Fu(x)\|^2 + \nu \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{VI}(x)\|^2 - \\ &- \frac{\alpha_1 |1 - \nu|}{2} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{VI}(x)\|^2 - \frac{|1 - \nu|}{2\alpha_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x)\|^2 + \\ &+ (1 + \nu) \left\{ \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} u'''(x)\|^2 - \right. \\ &\left. - \left(\frac{3\alpha}{2} + \delta_1 + 3\delta_2 + 3\delta_3 \right) \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} u'''(x)\|^2 - \frac{\sigma_1 + 3\sigma_2 + 3\sigma_3}{2\alpha} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} Fu(x)\|^2 \right\} \end{aligned}$$

Окончательно переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{|1 - \nu|}{2\alpha_1} \right) \|f(x)\|^2 &\geq \left(1 - \frac{(1 + \nu)(\sigma_1 + 3\sigma_2 + 3\sigma_3)}{2\alpha} \right) \|Fu(x)\|^2 + \\ &+ \left(\nu - \frac{\alpha_1 |1 - \nu|}{2} \right) \|u^{VI}(x)\|^2 + (1 + \nu) \left(1 - \frac{3\alpha + 2\delta_1 + 6\delta_2 + 6\delta_3}{2} \right) \|F^{\frac{1}{2}} u'''(x)\|^2 \end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что если $|1 - \nu| < 2\alpha_1$, $\alpha_1 |1 - \nu| < 2\nu$, $(1 + \nu)(\sigma_1 + 3\sigma_2 + 3\sigma_3) < 2\alpha$ и $3\alpha + 2\delta_1 + 6\delta_2 + 6\delta_3 < 2$, то коэрцитивная оценка (9) имеет место. Существование чисел $\alpha_1, \alpha, \nu > 0$ выводится из неравенства (8).

Разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_2(R)$ следует из коэрцитивного неравенства (9).

Теорема 1 доказана.

5. Заключение.

В работе установлены коэрцитивные оценки для нелинейного дифференциального оператора вида (1). Найдены достаточные условия разделимости строго нелинейного оператора в гильбертовом пространстве.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math. Soc. 1971. Vol. 23. P. 301-324.
2. Everitt W.N., Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc. London Math. Soc. 1972. Vol.24. P. 149-170.
3. Everitt W.N., Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators // Math.Z., 1972, Vol. 26. P. 308-326.
4. Everitt W.N., Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger - type operators in $L_2(R^n)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect A. 1977. Vol.79, P. 149-170.
5. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости// ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 5. С. 1009-1011.
6. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения// Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1984. Т.170. С. 37-76.
7. Бойматов К.Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады Академии наук России. 1992. Т.326. № 3. С. 393-398.
8. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки. 1989. Т.46. № 6. С. 110-112.
9. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1983. Т.161. С. 195-217.
10. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Изв.вузов. Матем. 1989. № 3. С. 44-48.
11. Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России. 2010. Т.435. № 3. С. 310-313.
12. Salem Omram and Khaled A.Gepreel Separation of the Helmholtz Partial Differential Equation in Hilbert Space // Adv.Studies Theor. Phys. 2012. Vol. 6. № 9. P. 399-410.
13. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math.Anal.Appl. 2008. Vol. 337. P. 659-666. DOI.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.012
14. Zayed E.M.E., Salem Omram Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math.Combin. 2010. Vol. 4. P. 13-23.
15. Zayed E.M.E., A.S.Mohamed, H.A.Atia *Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces* // J. Math.Anal.Appl. 2007, Vol. 336. P. 81-92. DOI.org/10.1016/j.jmaa.2006.07.031.
16. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость бигармонического оператора с матричным потенциалом // Материалы Международной конференции по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященной 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского, 2015. МИАН. Москва. С. 153-154.

17. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. Т.153. № 3. С. 42-50.
18. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т.58. № 8. С.665-673.
19. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. 2017. Т.9. № 1. С. 55-62. DOI:10.13108/2017-9-1-54

REFERENCES

1. Everitt W.N., Gierz M. *Some properties of the domains of certain differential operators* // *Proc. London Math. Soc.*, 1971, vol. 23, pp. 301-324.
2. Everitt W.N., Gierz M. *On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions* // *Proc. London Math. Soc.*, 1972, vol. 24, pp. 149-170.
3. Everitt W.N., Gierz M. *Some inequalities associated with certain differential operators* // *Math. Z.*, 1972, vol. 126, pp. 308-326.
4. Everitt W.N., Gierz M. *Inequalities and separation for Schrodinger -type operators in $L_2(R^n)$* // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A*, 1977, vol. 79 pp. 149-170.
5. Boimatov K.Kh. *Theorems of separability* // *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1973, vol. 213, no 5, pp. 1009-1011.
6. Boimatov K.Kh. *Separability theorems, weighted spaces and their applications* // *Proc. of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im. Steklova*, 1984, vol. 170, pp. 37-76.
7. Boimatov K.Kh., Saripov A. *Coercive properties of nonlinear Schrodinger and Dirac operators* // *Reports of the Russian Academy of Sciences*, 1992, vol. 326, no 3, pp. 393-398.
8. Boimatov K.Kh. *Coercive estimates and separability theorems for differential operators of the second order* // *Mathematical notes*, 1989, vol. 46, no 6, pp. 110-112.
9. Otelbaev M. *Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n* // *Proc. of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im. Steklova*, 1983, vol. 161, pp. 195-217.
10. Muratbekov M.B., Otelbaev M. *Smoothness and approximation properties of solutions of a class of nonlinear equations of Schrodinger* // *Proc. of the univer. of math.*, 1989, no 3, pp. 44-48.
11. Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N. *Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications* // *Dokl. Mathematics.*, 2010, vol. 435, no 3, pp. 310-313.
12. Salem Omram and Khaled A. Gepreel *Separation of the Helmholtz Partial Differential Equation in Hilbert Space* // *Adv. Studies Theor. Phys.*, 2012, vol. 6, no 9, pp. 399-410.
13. Zayed E.M.E. *Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem* // *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 337, pp. 659-666, DOI.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.012

14. Zayed E.M.E., Salem Omram *Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert* // *International J. Math. Combin.*, 2010, vol. 4, pp. 13-23.
15. Zayed E.M.E., A.S.Mohamed, H.A.Atia *Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces* // *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol.336, pp. 81-92, DOI.org/10.1016/j.jmaa.2006.07.031.
16. Karimov O.Kh. *Coercive properties and separability biharmonic operator with matrix potential* // *Proceedings of the International Conference on function spaces and approximation theory dedicated to the 110th birth anniversary of the of Academician C.M.Nikol'skii*, 2015, Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences, pp. 153-154.
17. Karimov O.Kh. *On separation of second order nonlinear differential operators with matrix coefficients* // *News of the Academy of Sciences of the Republic of Talikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences*. 2014. vol.157, no 3, pp. 42-50.
18. Karimov O.Kh. *On separation of nonlinear second order nonlinear differential operators with matrix coefficients in a weighted space* // *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Talikistan*, 2015, vol. 58, no 8, pp. 665-673.
19. Karimov O.Kh. *Coercive properties and separability biharmonic operator with matrix potential* // *Ufa mathematical journal*, 2017. vol. 9, no 1, pp. 54-61, DOI:10.13108/2017-9-1-54

Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан.
Получено 23.06.2017