ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.43 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-221-244

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

А. А. Жукова (г. Владимир), А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе получена теорема геометризации для систем счисления, где основанных на жадных разложениях знаменатели подходящих дробей произвольного иррационального числа, большего нуля, но меньшего единицы.

Знаменатели $\{Q_i(\alpha)\}$ подходящих дробей произвольного иррационального $\alpha \in (0;1)$ дают способ представления любого натурального числа в виде разложения Островского-Цеккендорфа $n = \sum\limits_{i=0}^{k} z_i(\alpha,n)Q_i(\alpha)$ с естественными условиями на $z_i(\alpha,n)$, описываемыми при помощи неполных частных $q_i(\alpha)$. В случае $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ получается хорошо известная ситстема счисления Фибоначчи. Если же $\alpha = \frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$, где $g \geqslant 2$, то соответсвующее разложение порождает представление натуральных чисел в обобщенных системах счисления Фибоначчи.

Настоящая работа посвящена изучению множеств $\mathbb{Z}(z_0,\ldots,z_l)$, состоящих из натуральных чисел, имеющих заданное окончание представления в виде разложения Островского-Цеккендорфа. Основным результатом работы является теорема геометризации, описывающая множества $\mathbb{Z}(z_0,\ldots,z_l)$ в терминах дробных долей вида $\{n\alpha\}$. В частности, для любого допустимого окончания $(z_0,\ldots,z_l)$ существуют эффективно вычислимые a, $b \in \mathbb{Z}$ такие, что $n \in \mathbb{Z}(z_0,\ldots,z_l)$, тогда и только тогда, когда дробная доля $\{(n+1)i_0(\alpha)\}$, где $i_0(\alpha) = \max\{\alpha, 1-\alpha\}$, принадлежит отрезку $[\{a\alpha\};\{b\alpha\}]$. Данная теорема обобщает теоремы о геометризации классической и обобщенных системы счисления Фибоначчи, доказанные авторами ранее.

Ключевые слова: системы счисления, представление Островского-Цеккендорфа, теорема геометризации.

Библиография: 33 названия.

GEOMETRIZATION OF NUMERATION SYSTEMS

A. A. Zhukova (Vladimir), A. V. Shutov (Vladimir)

Abstract

We obtain geometrization theorem for numeration systems based on greedy expansions oa natural numbers on denomirators of partial convergents of an arbitrary irrational α from the interval $(0;1)$.

More precisely, denomirators $\{Q_i(\alpha)\}$ of partial convergents of an arbitrary irrational $\alpha \in (0;1)$ generate Ostrowski-Zeckendorf representations of natural numbers. These representations have the form $n = \sum\limits_{i=0}^{k} z_i(\alpha,n)Q_i(\alpha)$ with natural conditions on $z_i(\alpha,n)$ described in the terms of partial quotients $q_i(\alpha)$. In the case $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ we obtain well-known Fibonacci numeration system. For $\alpha = \frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$ with $g \geqslant 2$ corresponding expansion is called representation of natural numbers in generalized Fibonacci numeration system.

In the paper we study the sets $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$, of natural numbers with given ending of Ostrowski-Zeckendorf representation. Our main result is the geometrization theorem, describing the sets $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$ in the terms of fractional parts of the form $\{n\alpha\}$. Particularly,for any admissible ending $(z_0,\dots,z_l)$ there exist efffectively computable $a,\ b\in\mathbb{Z}$ such that $n\in\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$, if and only if the fractional part$\{(n+1)i_0(\alpha)\}$, $i_0(\alpha)=\max\{\alpha;1-\alpha\}$, lies in the segment $[\{a\alpha\};\{b\alpha\}]$. This result generalizes geometrization theorems for classical and generalized Fibonacci numeration systems, proved by authors earlier.

Keywords: numeration systems, Ostrowski-Zeckendorf representation, geometrization theorem.

Bibliography: 33 titles.

1. Введение

Пусть $\alpha\in(0;1)$ — иррационально и имеет разложение в цепную дробь вида

$$\alpha=\cfrac{1}{q_1(\alpha)+\frac{1}{q_2(\alpha)+\frac{1}{q_3(\alpha)+\dots}}},$$

или, более коротко,

$$\alpha=[0;q_1(\alpha),q_2(\alpha),q_3(\alpha),\dots).$$

Пусть $\{Q_i(\alpha)\}$ – последовательность знаменателей подходящих дробей к α. Хорошо известно [3], что любое натуральное число n может быть представлено в виде

$$n=\sum_{i=0}^{k}z_i(\alpha,n)Q_i(\alpha),$$

где $z_0(\alpha,n)\leqslant q_1(\alpha)-1$, а $z_i(\alpha,n)\leqslant q_{i+1}(\alpha)$ при $i\geqslant 1$, причем из того, что $z_i(\alpha,n)=q_{i+1}(\alpha)$ следует, что $z_{i-1}(\alpha,n)=0$. Данное разложение, часто называемое разложением Островского-Цеккендорфа, может быть построено по так называемому жадному алгоритму.

Набор $(z_0,\dots,z_l)$ будем называть α-допустимым, если $z_0\leqslant q_1(\alpha)-1$, $z_i\leqslant q_{i+1}(\alpha)$ при $i\geqslant 1$, причем из $z_i=q_{i+1}(\alpha)$ следует, что $z_{i-1}=0$. Пусть $(z_0,\dots,z_l)$ – α-допустимый набор. Определим множество $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)=\{n\in\mathbb{Z},n\geqslant 0,z_0(\alpha,n)=z_0,\dots,z_l(\alpha,n)=z_l\}$.

Множество $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$ является примером так называемой квазирешетки. В последние годы появилось много работ, посвященных решению различных теоретико-числовых задач над квазирешетками [14], [16], [17], [19], [20], [25].

В частности, В. Г. Журавлев в работе [18] рассмотрел множество $\mathbb{Z}(0)$ в случае $\alpha=\tau=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и решил на этом множестве бинарную аддитивную задачу, а также получил оценки тригонометрических сумм по этому множеству. Метод В.Г. Журавлева основывался на использовании так называемого $\circ$-умножения Фибоначчи–Кнута–Матиясевича [1], [22], [23] и на существовании специального отображения δ из $\circ$-кольца Фибоначчи в кольцо $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Позднее И.К. Швагирева [24], используя этот метод, решила бинарную аддитивную задачу на множестве $\mathbb{Z}(0,\dots,0)$ в случае $\alpha=\tau_g=\frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$, где $g\geqslant 2$, для любого числа нулей.

Множества $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$ в важных частных случаях $\alpha=\tau$ и $\alpha=\tau_g$ изучались в работах [12] и [13] соответственно. В данных работах было показано, что множество $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$ допускает достаточно простое геометрическое описание: замыкание образа данного множества под действием отображения $\chi(n)=\{(n+1)\tau\}$ ($\chi(n)=\{(n+1)\tau_g\}$) представляет собой некоторый эффективно вычислимый отрезок. Данный факт был использован для решения ряда аналогов классических теоретико-числовых задач, рассматриваемых в числах из данных множеств.

Целью настоящей работы является обобщение описанного результата на случай произвольного иррационального $\alpha \in (0;1)$. Пусть $\chi(\alpha, n) = \{(n+1)i_0(\alpha)\}$, где $i_0(\alpha) = \max\{\alpha; 1-\alpha\}$. Для произвольного α-допустимого набора $(z_0, \dots, z_l)$ определим множество

$$\mathbb{X}(z_0, \dots, z_l) = \overline{\{\chi(\alpha, n) : n \in \mathbb{Z}(z_0, \dots, z_l)\}}.$$

Нами получен следующий результат.

Теорема. *Для произвольного α-допустимого набора $(z_0, \dots, z_l)$ множество $\mathbb{X}(z_0, \dots, z_l)$ представляет собой отрезок вида $[\{a\alpha\}; \{b\alpha\}]$ с эффективно вычислимыми a, $b \in \mathbb{Z}$.*

Отметим, что множество отрезков $\mathbb{X}(z_0, \dots, z_l)$, где z_0, ..., z_l, пробегая все допустимые наборы значений, порождает разбиение $\mathrm{Til}(l)$ отрезка $[0;1]$. Соответствующие разбиения и их приложения к задачам равномерного распределения дробных долей линейной функции рассматривались в работах [5], [15], [26]–[28], [30]–[32]. Эти разбиения также тесно связаны с так называемой гипотезой Штейнгауза, утверждающей, что для любого целого N и иррационального α точки $\{i\alpha\}$, где $1 \le i \le N$, разбивают интервал $(0;1)$ на интервалы не более, чем трех различных длин [4].

Пусть $I \subset [0;1]$ – некоторый отрезок, $\mathbb{N}(\alpha, I) = \{n \in \mathbb{N} : \{n\alpha\} \in I\}$. Полученная нами теорема показывает, что множества вида $\mathbb{Z}(z_0, \dots, z_l)$ фактически являются частными случаями множеств $\mathbb{N}(\alpha, I)$. Отметим, что в работе [29] была решена линейная аддитивная задача для чисел из множеств $\mathbb{N}(\alpha, I)$. Далее в работах [6]–[11] в случае квадратичной иррациональности α для чисел из $\mathbb{N}(\alpha, I)$ были решены аналоги проблем Гольдбаха, Варинга и Хуа-Локена, а также получен аналог теоремы Лагранжа о четырех квадратах. Таким образом, полученная нами характеризация может быть использована для решения ряда задач теории чисел в числах, принадлежащих множествам $\mathbb{Z}(z_0, \dots, z_l)$.

2. Доказательство некоторых соотношений для числителей и знаменателей подходящих дробей

Для любого иррационального $\alpha \in (0;1)$ определим $d^1\alpha$ выражением

$$d^1\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha}, & \text{если} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ \frac{2\alpha-1}{\alpha}, & \text{если} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Предложение 1. *Справедливо равенство*

$$d^1\alpha = \begin{cases} [0; q_1(\alpha)-1, q_2(\alpha), q_3(\alpha), \dots], & \text{если} \quad q_1(\alpha) \geqslant 2, \\ [0; 1, q_2(\alpha)-1, q_3(\alpha), \dots], & \text{если} \quad q_1(\alpha) = 1, \quad q_2(\alpha) \geqslant 2, \\ [0; q_3(\alpha)+1, q_4(\alpha), q_5(\alpha), \dots], & \text{если} \quad q_1(\alpha) = 1, \quad q_2(\alpha) = 1, \end{cases}$$

где $q_1(\alpha), q_2(\alpha), \dots$ — неполные частные разложения α в цепную дробь.

Доказательство. Данное предложение доказано в работах [2], [32].

Обозначим через $P_i(\alpha)$ и $Q_i(\alpha)$ — числители и знаменатели подходящих дробей числа α. Для них при всех $i \geqslant 1$ справедливы рекуррентные соотношения

$$P_i(\alpha) = q_i(\alpha)P_{i-1}(\alpha) + P_{i-2}(\alpha), \tag{1}$$

где $P_{-1}(\alpha) = 1$, $P_0(\alpha) = q_1(\alpha)$;

$$Q_i(\alpha) = q_i(\alpha)Q_{i-1}(\alpha) + Q_{i-2}(\alpha), \tag{2}$$

где $Q_{-1}(\alpha) = 0$, $Q_0(\alpha) = 1$.

Обозначим через $i_0(\alpha)$ — максимальное из двух значений α и $1-\alpha$, через $\|x\|$ — расстояние до ближайшего целого, т.е.

$$i_0(\alpha)=\max\{\alpha,1-\alpha\}; \qquad \|x\|=\begin{cases} \{x\}, & \text{если} \quad \{x\}<\frac{1}{2}, \\ 1-\{x\}, & \text{если} \quad \{x\}>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Сформулируем и докажем предложение, отражающее связь знаменателей подходящих дробей чисел α и $d^1\alpha$.

Предложение 2. *Для любого иррационального* $\alpha=[0;q_1(\alpha),q_2(\alpha),q_3(\alpha),...)$ *справедливы равенства*

$$Q_i(\alpha)i_0(\alpha)-Q_i\left(d^1\alpha\right)=(-1)^{i-1}\|\alpha Q_i(\alpha)\|$$

при $q_1(\alpha)\geqslant 2$ *и* $i\geqslant 1$*;*

$$Q_i(\alpha)i_0(\alpha)-Q_i\left(d^1\alpha\right)=(-1)^{i}\|\alpha Q_i(\alpha)\| \tag{3}$$

при $q_1(\alpha)=1$, $q_2(\alpha)\geqslant 2$ *и* $i\geqslant 1$*;*

$$Q_i(\alpha)i_0(\alpha)-Q_{i-2}\left(d^1\alpha\right)=(-1)^{i}\|\alpha Q_i(\alpha)\|$$

при $q_1(\alpha)=1$, $q_2(\alpha)=1$ *и* $i\geqslant 2$*;*

$$Q_1(\alpha)i_0(\alpha)-Q_{-1}\left(d^1\alpha\right)=1-\|\alpha Q_1(\alpha)\|$$

при $q_1(\alpha)=1$, $q_2(\alpha)=1$.

Доказательство. Методом математической индукции докажем равенство (3). Все остальные тождества доказываются аналогично.

При $i=1$ должно выполняться равенство

$$Q_1(\alpha)i_0(\alpha)-Q_1\left(d^1\alpha\right)=-\|\alpha Q_1(\alpha)\|.$$

Используя рекуррентное соотношение (2), находим $Q_1(\alpha)=Q_1\left(d^1\alpha\right)=1$,

$$Q_1(\alpha)i_0(\alpha)-Q_1\left(d^1\alpha\right)=-(1-\alpha), \qquad -\|\alpha Q_1(\alpha)\|=-\|\alpha\|=-(1-\alpha),$$

так как если $q_1(\alpha)=1$, то $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

Таким образом, равенство (3) верно при $i=1$.

Убедимся в справедливости этого равенства при $i=2$, т.е. что

$$Q_2(\alpha)i_0(\alpha)-Q_2\left(d^1\alpha\right)=\|\alpha Q_2(\alpha)\|. \tag{4}$$

Вначале найдем $Q_2(\alpha)=q_2(\alpha)+1$ и $Q_2\left(d^1\alpha\right)=q_2(\alpha)$, используя формулу (2), и зная, что $q_2\left(d^1\alpha\right)=q_2(\alpha)-1$. Подставим полученные выражения для $Q_2(\alpha)$ и $Q_2\left(d^1\alpha\right)$ в левую часть равенства (4), тогда

$$Q_2(\alpha)i_0(\alpha)-Q_2\left(d^1\alpha\right)=\left(q_2(\alpha)+1\right)\alpha-q_2(\alpha)=\frac{r_2(\alpha)}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)+1},$$

так как число α можно записать в виде $\frac{1}{1+\frac{1}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)}}$, где $0<r_2(\alpha)<1$, $q_2(\alpha)\geqslant 2$, а, следовательно, $\alpha=\frac{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)+1}$.

Правая часть равенства (4) при заданных условиях принимает вид

$$\|\alpha Q_2(\alpha)\|=\left\|\left(q_2(\alpha)+1\right)\cdot\frac{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)+1}\right\|=\frac{r_2(\alpha)}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)+1}.$$

Итак, соотношение (4) верно при $i = 2$.

Предположим, что равенство (3) выполняется при $i = k-2$ и $i = k-1$, и докажем его справедливость при $i = k$, т.е.

$$Q_k(\alpha)i_0(\alpha) - Q_k\left(d^1\alpha\right) = (-1)^k\|\alpha Q_k(\alpha)\|. \tag{5}$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (2), распишем $Q_k(\alpha)$ и $Q_k\left(d^1\alpha\right)$, учитывая, что $q_k\left(d^1\alpha\right) = q_k(\alpha)$ при всех $k \geqslant 2$:

$$Q_k(\alpha) = q_k(\alpha)Q_{k-1}(\alpha) + Q_{k-2}(\alpha)$$

и

$$Q_k\left(d^1\alpha\right) = q_k(\alpha)Q_{k-1}\left(d^1\alpha\right) + Q_{k-2}\left(d^1\alpha\right).$$

Подставим данные выражения в левую часть соотношения (5) и получим

$$\begin{gathered}Q_k(\alpha)i_0(\alpha) - Q_k\left(d^1\alpha\right) = \\ = q_k(\alpha)\left(Q_{k-1}(\alpha)i_0(\alpha) - Q_{k-1}(d^1\alpha)\right) + \left(Q_{k-2}(\alpha)i_0(\alpha) - Q_{k-2}(d^1\alpha)\right) = \\ = q_k(\alpha)\cdot(-1)^{k-1}\|\alpha Q_{k-1}(\alpha)\| + (-1)^{k-2}\|\alpha Q_{k-2}(\alpha)\|,\end{gathered} \tag{6}$$

т.к. по предположению индукции равенство (3) справедливо при $i = k-2$ и $i = k-1$. Правая же часть равенства (5), с использованием тождества

$$\|\alpha Q_i(\alpha)\| = (-1)^i\left(\alpha Q_i(\alpha) - P_i(\alpha)\right), \tag{7}$$

и равенств (1) и (2), приводится к виду

$$\begin{gathered}(-1)^k\|\alpha Q_k(\alpha)\| = (-1)^k\cdot(-1)^k\left(\alpha Q_k(\alpha) - P_k(\alpha)\right) = \\ = q_k(\alpha)\left(\alpha Q_{k-1}(\alpha) - P_{k-1}(\alpha)\right) + \left(\alpha Q_{k-2}(\alpha) - P_{k-2}(\alpha)\right) = \\ = q_k(\alpha)\cdot(-1)^{k-1}\|\alpha Q_{k-1}(\alpha)\| + (-1)^{k-2}\|\alpha Q_{k-2}(\alpha)\|.\end{gathered} \tag{8}$$

Из равенств (6) и (8) следует справедливость тождества (5), а, следовательно, и справедливость соотношения (3) при любых $i \geqslant 1$.

Далее нам также потребуется следующее утверждение.

Предложение 3. *При всех натуральных i и m справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}q_{i+1}(\alpha)\|\alpha Q_i(\alpha)\| + q_{i+3}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2}(\alpha)\| + \ldots + \\ + q_{i+2m+1}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2m}(\alpha)\| < \|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\|.\end{gathered}$$

Доказательство. Заметим, что при всех $i \geqslant 2$ справедливо равенство

$$\|\alpha Q_i(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i-2}(\alpha)\| - q_i(\alpha)\|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\|. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что при всех $i \geqslant 2$

$$q_i(\alpha)\|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i-2}(\alpha)\| - \|\alpha Q_i(\alpha)\|,$$

поэтому при $i \geqslant 1$

$$\begin{gathered}q_{i+1}(\alpha)\|\alpha Q_i(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\| - \|\alpha Q_{i+1}(\alpha)\|, \\ q_{i+3}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2}(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i+1}(\alpha)\| - \|\alpha Q_{i+3}(\alpha)\|, \\ \ldots \\ q_{i+2m+1}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2m}(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i+2m-1}(\alpha)\| - \|\alpha Q_{i+2m+1}(\alpha)\|.\end{gathered}$$

Сложив левые и правые части записанных выше равенств, получим, что

$$\begin{gathered}q_{i+1}(\alpha)\|\alpha Q_i(\alpha)\| + q_{i+3}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2}(\alpha)\| + \ldots + q_{i+2m+1}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2m}(\alpha)\| = \\ = \|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\| - \|\alpha Q_{i+2m+1}(\alpha)\| < \|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\|.\end{gathered}$$

3. Оценка разности чисел, имеющих заданное разложение

Разложим натуральное число n в системе счисления $Q_i(\alpha)$, где $q_1(\alpha) \geqslant 2$, и получим

$$n = \sum_{i=0}^{k} z_i(\alpha, n) Q_i(\alpha), \tag{10}$$

где $z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 1$, а $z_i(\alpha, n) \leqslant q_{i+1}(\alpha)$ при $i \geqslant 1$, причём из того, что $z_i(\alpha, n) = q_{i+1}(\alpha)$ следует, что $z_{i-1}(\alpha, n) = 0$. Пусть

$$\overleftarrow{n} = \sum_{i=0}^{k} z_i\left(d^1\alpha, n\right) Q_i\left(d^1\alpha\right), \tag{11}$$

где $z_i\left(d^1\alpha, n\right) = z_i(\alpha, n)$ при $i \geqslant 0$, если $z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 2$;
$z_0\left(d^1\alpha, n\right) = z_0(\alpha, n) - 1$, а $z_i\left(d^1\alpha, n\right) = z_i(\alpha, n)$ при $i \geqslant 1$, если $z_0(\alpha, n) = q_1(\alpha) - 1$.

Предложение 4. *Пусть n и $\overleftarrow{n}$ при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ имеют разложения (10) и (11), соответственно. Тогда*

$$\alpha < (n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} < 1, \qquad \text{если} \qquad z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 2, \tag{12}$$

и

$$1 < (n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} < 1 + \alpha, \qquad \text{если} \qquad z_0(\alpha, n) = q_1(\alpha) - 1. \tag{13}$$

Доказательство. Пользуясь равенствами (10) и (11), преобразуем разность

$$(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n}$$

к виду

$$i_0(\alpha) + \sum_{i=0}^{k} \left(z_i(\alpha, n)Q_i(\alpha)i_0(\alpha) - z_i\left(d^1\alpha, n\right) Q_i\left(d^1\alpha\right)\right). \tag{14}$$

Докажем неравенство (12). Если $z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 2$, где $q_1(\alpha) \geqslant 2$, то по условию $z_i\left(d^1\alpha, n\right) = z_i(\alpha, n)$ при $i \geqslant 0$ и, пользуясь утвержением предложения 2, выражение (14) можно переписать в виде

$$1 - \alpha - \alpha z_0(\alpha, n) + z_1(\alpha, n)\|\alpha Q_1(\alpha)\| - z_2(\alpha, n)\|\alpha Q_2(\alpha)\| +$$
$$+ z_3(\alpha, n)\|\alpha Q_3(\alpha)\| - \ldots + (-1)^{k-1} z_k(\alpha, n)\|\alpha Q_k(\alpha)\|. \tag{15}$$

Для того, чтобы получить оценку сверху выражения (15), отбросим все отрицательные слагаемые, начиная с $\alpha z_0(\alpha, n)$. Пользуясь ограничением на $z_i(\alpha, n)$ и предложением 3, получим, что

$$(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} \leqslant 1 - \alpha + z_1(\alpha, n)\|\alpha Q_1(\alpha)\| + z_3(\alpha, n)\|\alpha Q_3(\alpha)\| +$$
$$+ \ldots + z_{2m+1}(\alpha, n)\|\alpha Q_{2m+1}(\alpha)\| \leqslant 1 - \alpha + q_2(\alpha)\|\alpha Q_1(\alpha)\| +$$
$$+ q_4(\alpha)\|\alpha Q_3(\alpha)\| + \ldots + q_{2m+2}(\alpha)\|\alpha Q_{2m+1}(\alpha)\| < 1 - \alpha + \|\alpha Q_0(\alpha)\| = 1,$$

где $k - 1 \leqslant 2m + 1 \leqslant k$.

Сделаем оценку снизу выражения $(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n}$, отбросив все положительные слагаемые, начиная с $z_1(\alpha, n)\|\alpha Q_1(\alpha)\|$, в выражении (15). Имеем

$$(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} \geqslant 1 - \alpha - \alpha z_0(\alpha, n) - z_2(\alpha, n)\|\alpha Q_2(\alpha)\| -$$

$$- \ldots - z_{2m}(\alpha, n)\|\alpha Q_{2m}(\alpha)\|,$$

где $k-1 \leqslant 2m \leqslant k$. Применим предложение 3 к

$$\alpha z_0(\alpha,n) + z_2(\alpha,n)\|\alpha Q_2(\alpha)\| + z_4(\alpha,n)\|\alpha Q_4(\alpha)\| + \ldots + z_{2m}(\alpha,n)\|\alpha Q_{2m}(\alpha)\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\left(q_1(\alpha)-2\right) + q_3(\alpha,n)\|\alpha Q_2(\alpha)\| + q_5(\alpha,n)\|\alpha Q_4(\alpha)\| +$$
$$+ \ldots + q_{2m+1}(\alpha,n)\|\alpha Q_{2m}(\alpha)\| < \alpha q_1(\alpha) - 2\alpha + \|\alpha q_1(\alpha)\|,$$

и найдем, что

$$(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} > 1 - \alpha - \alpha q_1(\alpha) + 2\alpha - \|\alpha q_1(\alpha)\| = 1 + \alpha(1-q_1(\alpha)) - \|\alpha q_1(\alpha)\| >$$

$$> 1 + \frac{1-q_1(\alpha)}{q_1(\alpha)+r_1(\alpha)} - \left\|\frac{q_1(\alpha)}{q_1(\alpha)+r_1(\alpha)}\right\| = \frac{1}{q_1(\alpha)+r_1(\alpha)} = \alpha,$$

т.к. $\alpha = \frac{1}{q_1(\alpha)+r_1(\alpha)}$, где $0 < r_1(\alpha) < 1$ и $q_1(\alpha) \geqslant 2$. Таким образом, неравенство (12) доказано. Неравенство (13) доказыватся аналогично.

4. Определение и свойства разбиения единичного отрезка

Пусть имеется некоторое разбиение Til отрезка $[0;1]$ на части, длины которых s и l, причем $s < l$. Введем два преобразования B_1 и B_2 данного разбиения.

Преобразование $B_1\,(Til))$ состоит в откладывании отрезка длины s от левых концов всех отрезков разбиения Til. В результате получим новое разбиение, начинающееся с наименьшего из отрезков разбиения Til, и имеющее число частей большее, чем Til.

При выполнении преобразования $B_2\,(Til)$ от правых концов всех отрезков разбиения Til откладывается отрезок длины s. Новое разбиение вновь будет иметь больше отрезков, чем разбиение Til, причем крайним правым отрезком нового разбиения является наименьший из отрезков разбиения Til.

Введем обозначение $\sigma(n,\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(\alpha)$, где $q_i(\alpha)$ — неполные частные разложения числа α в цепную дробь.

Пусть $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Рассмотрим разбиение $Til_0(\alpha)$ отрезка $[0;1]$, состоящее из двух отрезков $[0;\alpha]$ и $[\alpha;1]$. Индуктивно определим разбиение $Til_{m+1}(\alpha)$, получаемое из разбиения $Til_m(\alpha)$ с помощью преобразования B, задаваемого следующим образом:

$$B\left(Til_m(\alpha)\right) = B_1\left(Til_m(\alpha)\right), \tag{16}$$

если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha)-2$ или $\sigma(2n,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1,\alpha)-2$;

$$B\left(Til_m(\alpha)\right) = B_2\left(Til_m(\alpha)\right), \tag{17}$$

если $\sigma(2n-1,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha)-2$.

Длины коротких отрезков $s_m(\alpha)$ и длинных отрезков $l_m(\alpha)$ разбиения $Til_m(\alpha)$ находятся по следующим формулам.

Предложение 5. *Если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha)-2$, то*

$$s_m(\alpha) = \alpha, \qquad l_m(\alpha) = 1-(m+1)\alpha; \tag{18}$$

если $\sigma(n,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(n+1,\alpha)-2$, то

$$s_m(\alpha) = \|\alpha Q_n(\alpha)\|, \qquad l_m(\alpha) = \|\alpha Q_{n-1}(\alpha)\| - \left(m+1-\sigma(n,\alpha)\right)\|\alpha Q_n(\alpha)\|. \tag{19}$$

Доказательство. Согласно определению, разбиение $Til_0(\alpha)$ состоит из двух отрезков, длины которых $s_0(\alpha) = \alpha$ и $l_0(\alpha) = 1 - \alpha$, значит при $m = 0$ формулы (18) верны.

Предположим, что равенства (18) верны при $m = k$, где $k \leqslant q_1(\alpha) - 2$, т.е. $s_k(\alpha) = \alpha$, и $l_k(\alpha) = 1 - (k+1)\alpha$. Докажем справедливость формул (18) при $m = k + 1$.

Разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ получается из разбиения $Til_k(\alpha)$ с помощью преобразования B. По условию $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, т.е. $\alpha = \frac{1}{q_1(\alpha)+r_1(\alpha)}$, где $0 < r_1(\alpha) < 1$, $q_1(\alpha) \geqslant 2$. Из равенства $\alpha q_1(\alpha) + \alpha r_1(\alpha) = 1$ следует, что в отрезке единичной длины помещается $q_1(\alpha)$ отрезков длины α и еще один отрезок, длина которого меньше, чем α.

Рассмотрим случай, когда $k \leqslant q_1(\alpha) - 3$, тогда $1-(k+2)\alpha \geqslant 1-\alpha q_1(\alpha)+\alpha = \alpha+\alpha r_1(\alpha) > \alpha$. Таким образом, отрезок $[0;1]$ будет состоять из $k+2$ отрезков длины α и одного отрезка длины $1-(k+2)\alpha > \alpha$, поэтому $s_{k+1}(\alpha) = \alpha$, а $l_{k+1}(\alpha) = 1-(k+2)\alpha$, т.е. при $k \leqslant q_1(\alpha) - 3$ формулы (18) верны.

Теперь предположим, что равенства (18) выполняются при $m = k$, где $k = q_1(\alpha) - 2$, т.е. если $s_k(\alpha) = \alpha$, $l_k(\alpha) = \alpha r_1(\alpha) + \alpha$. После выполнения преобразования B отрезок $l_k(\alpha)$ распадется на два отрезка, длины которых α и $\alpha r_1(\alpha)$. Очевидно, что $\alpha > \alpha r_1(\alpha)$, поэтому короткие отезки разбиения $Til_k(\alpha)$ станут длинными отрезками разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, т.е. $l_{k+1}(\alpha) = s_k(\alpha)$, а короткие отрезки $s_{k+1}(\alpha) = l_k(\alpha) - s_k(\alpha)$.

Аналитические выражения для $l_{k+1}(\alpha)$ и $s_{k+1}(\alpha)$ будут следующими:

$$l_{k+1}(\alpha) = \alpha = \|\alpha Q_0(\alpha)\| - (k+2-q_1(\alpha))\,\|\alpha Q_1(\alpha)\|;$$

$$s_{k+1}(\alpha) = 1 - \alpha q_1(\alpha) = \|\alpha Q_{-1}(\alpha)\| - q_1(\alpha)\|\alpha Q_0(\alpha)\| = \|\alpha Q_1(\alpha)\|,$$

т.к. при любых $i \geqslant 1$ справедливо равенство

$$\|\alpha Q_i(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i-2}(\alpha)\| - q_i(\alpha)\|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\|. \tag{20}$$

Итак, при всех $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 1$ утверждение предложения 5 справедливо.

Предположим, что соотношения (19) верны при $m = k$, где $\sigma(n,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(n+1,\alpha)-2$, т.е.

$$s_k(\alpha) = \|\alpha Q_n(\alpha)\|, \qquad l_k(\alpha) = \|\alpha Q_{n-1}(\alpha)\| - (k+1-\sigma(n,\alpha))\,\|\alpha Q_n(\alpha)\|$$

и докажем их справедливость при $m = k + 1$.

Рассмотрим случай, когда $\sigma(n,\alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(n+1,\alpha) - 3$, где $q_{n+1}(\alpha) \geqslant 3$. Так как при любом $i \geqslant 1$ справедливо равенство (20), то внутри отрезка $l_k(\alpha)$ точно уместится еще не менее двух отрезков $s_k(\alpha)$, поэтому $s_{k+1}(\alpha) = \|\alpha Q_n(\alpha)\|$, а

$$l_{k+1}(\alpha) = l_k(\alpha) - s_k(\alpha) = \|\alpha Q_{n-1}(\alpha)\| - (k+2-\sigma(n,\alpha))\,\|\alpha Q_n(\alpha)\|.$$

В случае, когда $k = \sigma(n+1,\alpha) - 2$, после выполнения преобразования B над над разбиением $Til_k(\alpha)$, все короткие отрезки разбиения $Til_k(\alpha)$ станут длинными отрезками разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, а короткие будут равны разности длин $l_k(\alpha)$ и $s_k(\alpha)$, т. е.

$$l_{k+1}(\alpha) = \|\alpha Q_n(\alpha)\| = \|\alpha Q_n(\alpha)\| - (k+2-\sigma(n+1,\alpha))\,\|\alpha Q_{n+1}(\alpha)\|,$$

а

$$s_{k+1}(\alpha) = \|\alpha Q_{n-1}(\alpha)\| - q_{n+1}(\alpha)\|\alpha Q_n(\alpha)\| = \|\alpha Q_{n+1}(\alpha)\|,$$

в силу равенства (20).

Таким образом, утверждение предложения 5 справедливо при любых m.

Подсчитать количество $S_m(\alpha)$ коротких $s_m(\alpha)$ и $L_m(\alpha)$ длинных $l_m(\alpha)$ отрезков разбиения $Til_m(\alpha)$ можно, воспользовавшись следующим предложением.

Предложение 6. *Если* $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$, *то*

$$S_m(\alpha) = m + 1, \qquad L_m(\alpha) = 1; \tag{21}$$

если $\sigma(n, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(n+1, \alpha) - 2$,

$$S_m(\alpha) = Q_{n-1}(\alpha) + (m + 1 - \sigma(n, \alpha))\, Q_n(\alpha), \qquad L_m(\alpha) = Q_n(\alpha). \tag{22}$$

Доказательство. Разбиение $Til_0(\alpha)$ состоит из одного короткого и одного длинного отрезков, поэтому равенства (21) верны при $m = 0$.

Предположим, что формулы (21) верны при $m = k$, где $0 \leqslant k \leqslant q_1(\alpha) - 3$ и $q_1(\alpha) \geqslant 3$, т.е. $S_k(\alpha) = k + 1$, $L_k(\alpha) = 1$. Докажем справедливость равенств (21) при $m = k + 1$.

По условию единичный отрезок состоит из $q_1(\alpha)$ отрезков длины α и еще одного, длина которого меньше α. Согласно предположению индукции разбиение $Til_k(\alpha)$ содержит $k+1$ отрезков длины α и одного отрезка длины $1-(k+1)\alpha$. При выполнении преобразования B число коротких увеличится на один, а длинных останется тем же, т.е. $S_{k+1}(\alpha) = S_k(\alpha) + 1 = k + 2$, $L_{k+1}(\alpha) = L_k(\alpha) = 1$.

Если же $m = k$, где $k = q_1(\alpha) - 2$, то $k + 1 = q_1(\alpha) - 1$. При выполении преобразования B над разбиением $Til_k(\alpha)$, имеющем $S_k(\alpha) = q_1(\alpha) - 1$ коротких и $L_k(\alpha) = 1$ длинных отрезков, все короткие отрезки разбиения $Til_k(\alpha)$ и еще один станут длинными отрезками разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, т.е. $L_{k+1}(\alpha) = S_k(\alpha) + 1 = q_1(\alpha) = Q_1(\alpha)$, а оставшийся отрезок будет коротким, т.е.

$$S_{k+1}(\alpha) = 1 = Q_0(\alpha) + (q_1(\alpha) - q_1(\alpha))\, Q_1(\alpha) = Q_0(\alpha) + (k + 2 - q_1(\alpha))\, Q_1(\alpha).$$

Это означает, что утверждение предложения 6 верно при всех $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 1$.

Предположим, что равенства (22) справедливы при $m = k$, где $\sigma(n, \alpha) - 1 \leqslant k \leqslant \sigma(n+1, \alpha) - 3$ и $q_{n+1}(\alpha) \geqslant 3$. При данных условиях $l_k(\alpha) > 2s_k(\alpha)$, поэтому при выполнении преобразования B число коротких отрезков $S_k(\alpha)$ увеличится на количество длинных $L_k(\alpha)$, т.е.

$$S_{k+1}(\alpha) = S_k(\alpha) + L_k(\alpha) = Q_{n-1}(\alpha) + (k + 2 - \sigma(n, \alpha))\, Q_n(\alpha),$$

а число длинных отрезков остается прежним, т.е. $L_{k+1}(\alpha) = L_k(\alpha) = Q_n(\alpha)$.

В случае $m = k = \sigma(n, \alpha) - 2$, после выполнения преобразования B все короткие отрезки разбиения $Til_k(\alpha)$ и еще $L_k(\alpha)$ отрезков станут длинными отрезками разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, а оставшиеся отрезки — короткими, т.е. $L_{k+1}(\alpha) = S_k(\alpha) + L_k(\alpha) = Q_{n-1}(\alpha) + q_{n+1}(\alpha) Q_n(\alpha)$, а $S_{k+1}(\alpha) = L_k(\alpha) = Q_n(\alpha) = Q_n(\alpha) + (k + 2 - \sigma(n, \alpha))\, Q_{n+1}(\alpha)$.

Это означает, что утверждение предложения 6 справедливо при любых m.

Найдем координаты концов отрезков разбиения $Til_m(\alpha)$.

Предложение 7. *Отрезки разбиения* $Til_m(\alpha)$ *имеют координаты* $[\{a\alpha\}\,; \{b\alpha\}]$, *где*

$$a = i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant L_m(\alpha) + S_m(\alpha) - 1; \tag{23}$$

при $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$:

$$\begin{aligned} &b = i + 1, && 0 \leqslant i \leqslant m, \\ &b = 0, && i = m + 1; \end{aligned} \tag{24}$$

при $\sigma(2n - 1, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n, \alpha) - 2$

$$\begin{aligned} &b = i + S_m(\alpha), && 0 \leqslant i \leqslant L_m(\alpha) - 1, \\ &b = i - L_m(\alpha), && L_m(\alpha) \leqslant i \leqslant L_m(\alpha) + S_m(\alpha) - 1; \end{aligned} \tag{25}$$

при $\sigma(2n, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n + 1, \alpha) - 2$

$$\begin{aligned} &b = i + L_m(\alpha), && 0 \leqslant i \leqslant S_m(\alpha) - 1, \\ &b = i - S_m(\alpha), && S_m(\alpha) \leqslant i \leqslant L_m(\alpha) + S_m(\alpha) - 1; \end{aligned} \tag{26}$$

Если $b = 0$, *то считаем, что* $\{0 \cdot \alpha\} = 1$.

Доказательство. Вначале покажем, что координаты концов отрезков разбиения $Til_0(\alpha)$ удовлетворяют формулам (23) и (24). Разбиение $Til_0(\alpha)$ состоит из одного короткого $s_0(\alpha)$ и одного длинного $l_0(\alpha)$ отрезков, идущих слева направо. Следовательно, их координаты будут $[0; 0+s_0(\alpha)] = [\{0\alpha\}\,; \{1\alpha\}]$ и $[0+s_0(\alpha); 0+s_0(\alpha)+l_0(\alpha)] = [\{1\alpha\}\,; \{0\alpha\}]$. Это означает, что при $m=0$ формулы (23) и (24) верны.

Предположим, что данные формулы справедливы при $m = k$, где $0 \leqslant k \leqslant q_1(\alpha) - 3$, т.е. разбиение $Til_k(\alpha)$ состоит из отрезков $[\{0\alpha\}\,; \{1\alpha\}]$, $[\{1\alpha\}\,; \{2\alpha\}]\,, \ldots, [\{k\alpha\}\,; \{(k+1)\alpha\}]$ и $[\{(k+1)\alpha\}\,; \{0\alpha\}]$.

Найдем координаты отрезков разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, полученного из разбиения $Til_k(\alpha)$, выполнением преобразования B_1. При этом все отезки, кроме последнего, останутся прежними. Действительно, если при всех $0 \leqslant i \leqslant k$ от точки $\{i\alpha\}$ вправо отложить отрезок длиной α, то получим точку $\{i\alpha\} + \alpha = \{(i+1)\alpha\}$, т.к. при данных условиях $\alpha \leqslant (i+1)\alpha \leqslant (k+1)\alpha \leqslant (q_1(\alpha)-2)\,\alpha < 1$.

Последний из отрезков $[\{(k+1)\alpha\}\,; \{0\alpha\}]$ при выпонении этого преобразования разобьется на два $[\{(k+1)\alpha\}\,; \{(k+2)\alpha\}]$ и $[\{(k+2)\alpha\}\,; \{0\alpha\}]$, т.к. $2\alpha \leqslant (k+2)\alpha \leqslant (q_1(\alpha)-1)\,\alpha < 1$.

Итак, при $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 3$ утверждение предложения 7 справедливо.

В случае $m = k = q_1(\alpha) - 2$ отрезки разбиения $Til_k(\alpha)$ имеют координаты

$$[\{0\alpha\}\,; \{1\alpha\}]\,, [\{1\alpha\}\,; \{2\alpha\}]\,, \ldots, [\{(q_1(\alpha)-2)\,\alpha\}\,; \{(q_1(\alpha)-1)\,\alpha\}]\,, [\{(q_1(\alpha)-1)\,\alpha\}\,; \{0\alpha\}]\,,$$

длины которых $s_k(\alpha) = \alpha$, $l_k(\alpha) = 1 - (q_1(\alpha)-1)\,\alpha$.

После выполнения преобразования B_1 все отрезки, кроме последнего, останутся такими же. Действительно, по условию $\alpha \leqslant (i+1)\alpha \leqslant (k+1)\alpha \leqslant (q_1(\alpha)-1)\,\alpha < 1$, поэтому $[\{i\alpha\}\,; \{i\alpha\}+\alpha] = [\{i\alpha\}\,; \{(i+\ \ +1)\alpha\}]$, а последний из отрезков $[\{(q_1(\alpha)-1)\,\alpha\}\,; \{0\alpha\}]$ распадется на два $[\{(q_1(\alpha)-1)\,\alpha\}\,; \{q_1(\alpha)\alpha\}]$ и $[\{q_1(\alpha)\alpha\}\,; \{0\alpha\}]$.

Таким образом, координаты отрезков $[\{a\alpha\}\,; \{b\alpha\}]$ разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$ удовлетворяют соотношениям (23) и (25).

Итак, предложение 7 справедливо при всех $1 \leqslant k \leqslant q_1(\alpha) - 1$.

Допустим, что равенства (23) и (25) справедливы при $m = k$, где

$$\sigma(2n-1,\alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha) - 3,$$

т. е. разбиение $Til_k(\alpha)$ состоит из отрезков, координаты которых

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\}\,; \{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant L_k(\alpha) - 1, \\ [\{i\alpha\}\,; \{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & L_k(\alpha) \leqslant i \leqslant L_k(\alpha) + S_k(\alpha) - 1. \end{array}$$

Отложив от правых концов отрезков $[\{i\alpha\}\,; \{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ отрезок длиной

$$s_k(\alpha) = \|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|\,,$$

получим точки с координатами

$$\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\} - s_k(\alpha) =$$

$$= \{(i + Q_{2n-2}(\alpha) + (k+1-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\} + \{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\} - 1 =$$

$$= \{(i + Q_{2n-2}(\alpha) + (k+2-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\} = \{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,,$$

т.к.

$$\|\alpha Q_n(\alpha)\| = \left\{ \begin{array}{rl} \{\alpha Q_n(\alpha)\}\,, & \text{если} \quad n - \text{четное}, \\ 1 - \{\alpha Q_n(\alpha)\}\,, & \text{если} \quad n - \text{нечетное}. \end{array} \right.$$

Это означает, что каждый из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ разделился на отрезки $[\{i\alpha\}\,;$ $\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$ и $[\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\ \{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$. Обозначим $i+S_{k+1}(\alpha)=j$, тогда

$$S_{k+1}(\alpha)-S_k(\alpha)=Q_{2n-2}(\alpha)+(k+2-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha)-(Q_{2n-2}(\alpha)+$$

$$+\,(k+1-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))=Q_{2n-1}(\alpha)=L_k(\alpha)=L_{k+1}(\alpha).$$

Значит $[\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]=[\{j\alpha\}\,;\{(j-L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где

$$S_{k+1}(\alpha)\leqslant j\leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1.$$

Отложим отрезок длиной $s_k(\alpha)=\|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|$ от точки $\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}$ и получим новую точку

$$\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}-\|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|=\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}-(1-\{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\})=$$
$$=\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}+\{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\}-1=\{(i-L_k(\alpha)+Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\}=\{i\alpha\}\,.$$

Это означает, что разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ состоит из отрезков:

$$\begin{array}{ll}[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)-1,\\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & L_{k+1}(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1.\end{array}$$

Теперь предположим, что соотношения (23) и (25) справедливы при $m=k$, где $k=$ $=\sigma(2n,\alpha)-2$, т. е. разбиение $Til_k(\alpha)$ — это объединение отрезков

$$\begin{array}{ll}[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0\leqslant i\leqslant L_k(\alpha)-1,\\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & L_k(\alpha)\leqslant i\leqslant L_k(\alpha)+S_k(\alpha)-1.\end{array}$$

После выполнения перобразования B_2 получится новое разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$, при котором каждый из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ разделится на два отрезка точкой

$$\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}-s_k(\alpha)=\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}-\|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|=$$

$$=\{(i+Q_{2n-2}(\alpha)+(\sigma(2n,\alpha)-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\}=$$
$$=\{(i+Q_{2n}(\alpha))\,\alpha\}=\{(i+L_{k+1}(\alpha)(\alpha))\,\alpha\}\,.$$

Это означает, что отрезок $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ распадается на два отрезка $[\{i\alpha\}\,;$ $\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$ и $[\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$, где $0\leqslant i\leqslant S_{k+1}(\alpha)-1$. Обозначим $i+L_{k+1}(\alpha)=j$, тогда

$$L_{k+1}(\alpha)-S_k(\alpha)=Q_{2n}(\alpha)-(Q_{2n-2}(\alpha)+(\sigma(2n,\alpha)-1-$$

$$-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))=Q_{2n}(\alpha)-(Q_{2n-2}(\alpha)+(q_{2n}(\alpha)-1)\,Q_{2n-1}(\alpha))=$$
$$=Q_{2n-1}(\alpha)=S_{2n}(\alpha)=S_{k+1}(\alpha).$$

Итак, отрезок $[\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ может быть записан как $[\{j\alpha\}\,;\{(j-$ $S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $L_{k+1}(\alpha)\leqslant j\leqslant S_{k+1}(\alpha)+L_{k+1}(\alpha)-1$.

Все остальные отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}]$ при выполнении преобразования B_2 перейдут сами в себя и их координаты можно записать как $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $S_{k+1}(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)-1$. Действительно,

$$\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}-s_k(\alpha)=\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}-\|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|=$$

$$=\{(i-Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\}-(1-\{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\})=\{(i-Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\}+$$
$$+\{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\}-1=\{i\alpha\}\,,$$

т.к. $L_k(\alpha) = Q_{2n-1}(\alpha) = S_{2n}(\alpha) = S_{k+1}(\alpha)$ и

$$S_k(\alpha) + L_k(\alpha) = Q_{2n-2}(\alpha) + (k+1-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha) + Q_{2n-1}(\alpha) =$$

$$= Q_{2n-2}(\alpha) + (k+2-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha) = S_{2n}(\alpha) = S_{k+1}(\alpha).$$

Итак, разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\}\,;\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant S_{k+1}(\alpha)-1, \\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & S_{k+1}(\alpha) \leqslant i \leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1. \end{array}$$

Следовательно, предложение 7 справедиво при $m = \sigma(2n,\alpha)-1$.

Теперь предположим, что соотношения (23) и (26) верны при $m = k$, где

$$\sigma(2n,\alpha)-1 \leqslant k \leqslant \sigma(2n+1,\alpha)-3,$$

т. е. разбиение $Til_k(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\}\,;\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant S_k(\alpha)-1, \\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & S_k(\alpha) \leqslant i \leqslant L_k(\alpha)+S_k(\alpha)-1. \end{array}$$

Отложив от левых концов отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]$, где $0 \leqslant i \leqslant S_k(\alpha)-1$, отрезок длиной $s_k(\alpha)$, получим точку с координатой

$$\{i\alpha\} + s_k(\alpha) = \{i\alpha\} + \|\alpha Q_{2n}(\alpha)\| = \{(i+Q_{2n}(\alpha))\,\alpha\} = \{(i+L_{k+1}(\alpha)(\alpha))\,\alpha\}\,.$$

Выполним такое же преобразование с отрезком $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ и получим два отрезка, разделенных точкой $\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}$, т.е. отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$ и $[\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$, где $S_k(\alpha) \leqslant i \leqslant L_k(\alpha)+S_k(\alpha)-1$.

Обозначив $i + L_{k+1}(\alpha) = j$, получим

$$L_{k+1}(\alpha) + S_k(\alpha) = Q_{2n}(\alpha) + Q_{2n-1}(\alpha) + (k+1-\sigma(2n,\alpha))\,Q_{2n}(\alpha) =$$

$$= Q_{2n-1}(\alpha) + (k+2-\sigma(2n,\alpha))\,Q_{2n}(\alpha) = S_{k+1}(\alpha),$$

кроме того $L_k(\alpha) + S_k(\alpha) = L_{k+1}(\alpha) + S_k(\alpha) = S_{k+1}(\alpha)$. Следовательно, разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\}\,;\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant S_{k+1}(\alpha)-1, \\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & S_{k+1}(\alpha) \leqslant i \leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1. \end{array}$$

Предположим, что формулы (23) и (26) справедливы при $m = k$, где $k = \sigma(2n-1,\alpha)-2$, т.е. разбиение $Til_k(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\}\,;\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant S_k(\alpha)-1, \\ [\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & S_k(\alpha) \leqslant i \leqslant L_k(\alpha)+S_k(\alpha)-1. \end{array}$$

Отложим от левого конца отрезка $[\{i\alpha\}\,;\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]$ отрезок длиной $s_k(\alpha) = \|\alpha Q_{2n}(\alpha)\|$ и получим точку

$$\{i\alpha\} + s_k(\alpha) = \{i\alpha\} + \|\alpha Q_{2n}(\alpha)\| = \{(i+Q_{2n}(\alpha))\,\alpha\} = \{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,,$$

т.к.

$$S_{k+1}(\alpha) = Q_{2n}(\alpha) + (\sigma(2n+1,\alpha)-\sigma(2n+1,\alpha))\,Q_{2n+1}(\alpha) = L_k(\alpha).$$

Следовательно, каждый из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]$ совпадает с одним из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $0\leqslant i\leqslant S_k(\alpha)-1$.

Выполнив с отрезком $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ такое же преобразование, получим два отрезка $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$ и $[\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\ \{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$. Обозначив $j=i+S_{k+1}(\alpha)$, и зная, что

$$S_k(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)=S_k(\alpha)+L_k(\alpha)=$$
$$=Q_{2n-1}(\alpha)+(\sigma(2n,\alpha)-1-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n}(\alpha)+Q_{2n}(\alpha)=$$
$$=Q_{2n-1}(\alpha)+q_{2n+1}(\alpha)Q_{2n}(\alpha)=Q_{2n+1}(\alpha)=L_{k+1}(\alpha),$$

приходим к выводу, что каждый из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ распадется на отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $S_k(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)-1$, и $[\{i\alpha\}\,;\{(i-L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $L_{k+1}(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1$.

В итоге получаем, что разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll}[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)-1,\\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & L_{k+1}(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1.\end{array}$$

Таким образом, формулы (23) и (26) справедливы при $m=\sigma(2n-1,\alpha)-1$.

Предложение 7 полностью доказано.

Отметим, что рассмотренные нами разбиения $Til_m(\alpha)$ впервые были определены другим способом в работе [33] при изучении проблемы Гекке–Кестена, заключающейся в получении явных оценок остаточного члена проблемы равномерного распределения дробных долей линейной функции для множеств, на которых данный остаточный член имеет порядок $O(1)$ (множествах ограниченного остатка). Данные разбиения известны как модифицированные разбиения Фибоначчи. Дополнительную информацию об их приложениях к изучению распределения дробных долей линейной функции можно найти в работах [26], [5]. В работе [31] данные разбиения использовались для изучения так называемой последовательности Штурма.

Построенные нами разбиения также тесно связаны с так называемой гипотезой Штейнгауза, утверждающей, что для любого целого N и иррационального α точки $\{i\alpha\}$, $1\le i\le N$ разбивают интервал $(0;1)$ на отрезки либо двух, либо трех различных длин [4]. Можно показать, что разбиния $Til_m(\alpha)$ в точности соответствуют случаю, когда различных длин ровно две.

В частных случаях $\alpha=\tau$ и $\alpha=\tau_g$ разбиения, получаемые сдвигом разбиений $Til_m(\alpha)$ впервые были введены в работах [15] и [21] соответственно.

5. Отображения первого возвращения

Выясним, в какие отрезки переходят отрезки разбиения $Til_m(\alpha)$ при сдвиге на α вдоль окружности единичной длины.

Разбиение $Til_m(\alpha)$ состоит из $L_m(\alpha)$ длинных и $S_m(\alpha)$ коротких отрезков, координаты которых определяются предложением 7. Используя это предложение, зададим на множествах длинных и коротких отрезков разбиения $Til_m(\alpha)$ некоторые нумерации и обозначим L_j^m и S_j^m, соответственно, j-й длинный и j-й короткий отрезки разбиения $Til_m(\alpha)$ относительно вводимых нумераций.

При $0\leqslant m\leqslant q_1(\alpha)-2$ короткие отрезки разбиения $Til_m(\alpha)$ имеют координаты $[\{i\alpha\}\,;\{(i+1)\,\alpha\}]$, где $0\leqslant i\leqslant m$, а длинный $[\{(m+1)\,\alpha\}\,;\{0\alpha\}]=[\{(m+1)\,\alpha\}\,;1]$. Пусть $j=i+1$, тогда $i=j-1$, где $1\leqslant j\leqslant m+1$, $S_j^m=[\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{j\alpha\}]$ при $1\leqslant j\leqslant m+1$; $L_1^m=[\{(m+1)\,\alpha\}\,;1]$.

При $\sigma(2n-1,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha)-2$ длинные отрезки — это

$$[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_m(\alpha))\,\alpha\}]\,,$$

где $0 \leqslant i \leqslant L_m(\alpha)-1$, а короткие отрезки — это

$$[\{i\alpha\}\,;\{(i-L_m(\alpha))\,\alpha\}]\,,$$

где $L_m(\alpha) \leqslant i \leqslant L_m(\alpha)+S_m(\alpha)-1$.

Для того, чтобы перенумеровать длинные отрезки, положим $j=i+1$, тогда

$$L_j^m = [\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{(j+S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]\,,$$

где $1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha)$. Если же отрезки короткие, то положив $j=i-L_m(\alpha)+1$, получим

$$S_j^m = [\{(j+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(j-1)\,\alpha\}]\,,$$

где $1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha)$.

Итак, при $\sigma(2n-1,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha)-2$

$$L_j^m = [\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{(j+S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]\,,\quad \text{где}\quad 1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha);$$

$$S_j^m = [\{(j+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(j-1)\,\alpha\}]\,,\quad \text{где}\quad 1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha).$$

При $\sigma(2n,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1,\alpha)-2$ отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i+L_m(\alpha))\,\alpha\}]$, где $0 \leqslant i \leqslant S_m(\alpha)-1$, являются короткими, а отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_m(\alpha))\,\alpha\}]$, где $S_m(\alpha) \leqslant i \leqslant L_m(\alpha)+S_m(\alpha)-1$, — длинными.

Положим $j=i+1$, чтобы перенумеровать короткие отрезки, тогда $S_j^m = [\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{(j+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$, где $1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha)$. В случае длинных отрезков обозначим $j=i-S_m(\alpha)+1$, тогда $L_j^m = [\{(j+S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(j-1)\,\alpha\}]$, где $1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha)$.

Таким образом, при $\sigma(2n,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1,\alpha)-2$

$$S_j^m = [\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{(j+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]\,,\quad \text{где}\quad 1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha);$$

$$L_j^m = [\{(j+S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(j-1)\,\alpha\}]\,,\quad \text{где}\quad 1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha).$$

Сдвинем все отрезки разбиения $Til_m(\alpha)$ на α.

Предложение 8. *При сдвиге α отрезок L_j^m, где $1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha)-1$, перейдет в отрезок L_{j+1}^m, отрезок S_j^m, где $1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha)-1$, — в отрезок S_{j+1}^m, а объединение отрезков $S_{S_m(\alpha)}^m$ и $L_{L_m(\alpha)}^m$ в объединение отрезков S_1^m и L_1^m, причем порядок следования отрезков поменяется.*

Доказательство. Очевидно, что отрезки L_j^m, где $1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha)-1$, и S_j^m, где $1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha)-1$, при сдвиге на α перейдут в отрезки L_{j+1}^m и S_{j+1}^m, соответственно.

Теперь убедимся, что $L_{L_m(\alpha)}^m \cup S_{S_m(\alpha)}^m$ перейдет в $S_1^m \cup L_1^m$. Рассмотрим различные случаи.

Если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha)-2$, то $S_{S_m(\alpha)}^m = [\{m\alpha\}\,;\{(m+1)\alpha\}]$ и $L_{L_m(\alpha)}^m = [\{(m+1)\alpha\}\,;1]$, а следовательно, $S_{S_m(\alpha)}^m \cup L_{L_m(\alpha)}^m = [\{m\alpha\}\,;1]$.

При сдвиге на α вдоль единичной окружности отрезок $[\{m\alpha\}\,;1]$ перейдет в отрезок $[\{(m+1)\alpha\}\,;\alpha]$, состоящий из двух отрезков $[\{(m+1)\alpha\}\,;1]$ и $[0;\alpha]$, которые совпадают с отрезками $S_1^m=[0;\alpha]$ и $L_1^m=[\{(m+1)\alpha\}\,;1]$.

Если $\sigma(2n-1,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha)-2$, то отрезки $S_{S_m(\alpha)}^m$ и $L_{L_m(\alpha)}^m$ имеют координаты $[\{(S_m(\alpha)+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$ и $[\{(L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(S_m(\alpha)+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$, соответственно, а их объединение — это отрезок $[\{(L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$. Выполнив сдвиг на α, получим отрезок $[\{L_m(\alpha)\alpha\}\,;\{S_m(\alpha)\alpha\}]$, состоящий из отрезков $S_1^m = [\{L_m(\alpha)\alpha\}\,;1]$ и $L_1^m = [0;\{S_m(\alpha)\alpha\}]$.

Если $\sigma(2n,\alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1,\alpha) - 2$, то отрезки $S^m_{S_m(\alpha)}$ и $L^m_{L_m(\alpha)}$ — это отрезки $[\{(S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(S_m(\alpha)+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$ и $[\{(S_m(\alpha)+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$, соответственно. При сдвиге на α объединение этих отрезков $[\{(S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$ переходит в отрезок $[\{S_m(\alpha)\alpha\}\,;\{L_m(\alpha)\alpha\}]$, являющийся объединением отрезков

$$L_1^m = [\{S_m(\alpha)\alpha\}\,;1]$$

и

$$S_1^m = [0;\{L_m(\alpha)\alpha\}]\,.$$

Итак, объединение отрезков $S^m_{S_m(\alpha)} \cup L^m_{L_m(\alpha)}$ при сдвиге на α переходит в $L_1^m \cup S_1^m$, причем порядок следования отрезков меняется.

Пусть точка x принадлежит полуинтервалу $[0;1)$. Рассмотрим преобразование R_α, переводящее точку x в точку $\{x+\alpha\}$, т.е.

$$R_\alpha:\, x \to \{x+\alpha\}.$$

Выберем отрезок $I \subset [0;1)$. Предположим, что $x \in I$ и точка $\{x+k\alpha\}$, где $k \in \mathbb{N}$, первый раз попадает в I. Преобразование $x \to \{x+k\alpha\}$ назовем отображением первого возвращения и обозначим $d_I R_\alpha$.

Пусть имеется разбиение $Til_m(\alpha)$ отрезка $[0;1]$. В предложении 8 нами доказано, что после выполнения отображения первого возвращения $d_{I^m} R_\alpha$ над отрезком $I^m = L_1^m \cup S_1^m$, составляющие его отрезки S_1^m и L_1^m поменяются местами. Это означает, что данное отображение первого возвращения изоморфно сдвигу

$$R_{d^m\alpha} : x \to \{x + d^m\alpha\}$$

для некоторого $d^m\alpha$. Отображения первого возвращения для сдвига R_α были изучены в работе [32]. Там же было проведено вычисление всех $d^m\alpha$. В частности, в данной работе было показано, что при $m = 1$ данное определение $d^1\alpha$ эквивалентно определению, использованному нами ранее. Также были доказаны следующие формулы

$$d^m\alpha = \begin{cases} \frac{s_m(\alpha)}{s_m(\alpha)+l_m(\alpha)}, & \text{если справа от нуля короткий отрезок,} \\ \frac{l_m(\alpha)}{s_m(\alpha)+l_m(\alpha)}, & \text{если справа от нуля длинный отрезок} \end{cases} \tag{27}$$

и

$$d^{m+1}\alpha = d^m\left(d^1\alpha\right) = d^1\left(d^m\alpha\right).$$

6. Основной результат

Рассмотрим иррациональное $\alpha \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$, разложение которого в цепную дробь имеет вид

$$\alpha = [0; q_1(\alpha), q_2(\alpha), q_3(\alpha), \ldots),$$

где $q_1(\alpha) \geqslant 2$. Тогда $1-\alpha$ раскладывается в следующую цепную дробь

$$1-\alpha = [0; 1, q_1(\alpha), q_2(\alpha), q_3(\alpha), \ldots)$$

и при всех $i \geqslant 1$ справедливо равенство

$$Q_i(1-\alpha) = Q_{i-1}(\alpha). \tag{28}$$

Разложение натурального числа n в системе счисления $Q_i(\alpha)$, где $\alpha < \frac{1}{2}$, имеет вид (10), а в системе счисления $Q_i(1-\alpha)$

$$n = \sum_{i=1}^{k+1} z'_i(n) Q_i(1-\alpha), \tag{29}$$

где $z'_1(n) \leqslant q_1(\alpha) - 1$, а $z'_i(n) \leqslant q_i(\alpha)$ при $i \geqslant 2$.

В силу равенства (10) при всех $i \geqslant 1$ справедливо тождество $z'_i(n) = z_{i-1}(n)$.

Заменим $z_0(n)$ набором из $q_1(\alpha) - 1$ нулей и единиц, причем сначала идут $q_1(\alpha) - z_0(n) - 1$ нулей, а затем $z_0(n)$ единиц. Каждое $z_i(n)$, где $i \geqslant 1$, также заменим набором из $q_{i+1}(\alpha)$ нулей и единиц, где вначале идут $q_{i+1}(\alpha) - z_i(n)$ нулей, а затем $z_i(n)$ единиц. Выстроим все наборы нулей и единиц, соответствующих $z_i(n)$ в порядке возрастания номера i и перенумеруем полученные числа $\varepsilon_0(n)$, $\varepsilon_1(n)$, …, $\varepsilon_s(n)$, где $s = \sigma(k+1, \alpha) - 2$. В таком случае разложение (10) числа n в системе счисления $Q_i(\alpha)$, где $\alpha < \frac{1}{2}$, примет вид

$$n = \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_i(n) Q'_i(\alpha), \tag{30}$$

где $Q'_i(\alpha) = Q_0(\alpha)$ при $0 \leqslant i \leqslant q_i(\alpha) - 1$, $Q'_i(\alpha) = Q_j(\alpha)$ при $\sigma(j, \alpha) \leqslant i \leqslant \sigma(j+1, \alpha) - 1$.

Проведем аналогичные операции со всеми наборами $z'_i(n)$ в разложении (29) и получим

$$n = \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_i(n) Q'_i(1-\alpha), \tag{31}$$

где $s = \sigma(k+1, \alpha) - 2$, $Q'_i(1-\alpha) = Q_1(1-\alpha)$, если $0 \leqslant i \leqslant q_i(\alpha) - 1$, $Q'_i(1-\alpha) = Q_j(1-\alpha)$, если $\sigma(j-1, \alpha) \leqslant i \leqslant \sigma(j, \alpha) - 1$.

В силу равенства (28) разложения (30) и (31) полностью совпадают.

Обозначим через $\varepsilon_i(\alpha, n)$ коэффициенты разложения (30) числа n в системе счисления α.

Если стереть $\varepsilon_0(\alpha, n)$, а все остальные $\varepsilon_i(\alpha, n)$, где $i \geqslant 1$, оставить без изменения, то получим корректную запись разложения некоторого натурального числа $\overleftarrow{n}$ в системе счисления $d^1\alpha$. При стирании еще одной цифры $\varepsilon_1(\alpha, n)$ в разложении (30) получим разложение числа $\overleftarrow{n}^2$ в системе счисления $d^1\left(d^1\alpha\right) = d^2\alpha$. Продолжая стирать цифры в разложении (30), всего $l+1$ цифр, получим разложение числа $\overleftarrow{n}^{l+1}$ в системе счисления $d^{l+1}\alpha$, причем при всех $j \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\varepsilon_j\left(d^{m+1}\alpha, \overleftarrow{n}^{m+1}\right) = \varepsilon_{j+m+1}(\alpha, n). \tag{32}$$

Пусть все $\varepsilon_0(\alpha, n)$, $\varepsilon_1(\alpha, n)$, …, $\varepsilon_l(\alpha, n)$ в разложении (30) будут фиксированными: $\varepsilon_0(\alpha, n) = \varepsilon_0, \varepsilon_1(\alpha, n) = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l(\alpha, n) = \varepsilon_l$. Обозначим через $\mathbb{F}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right)$ множество таких чисел, т.е. $\mathbb{F}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right) = \{n : \varepsilon_i(\alpha, n) = \varepsilon_i, \ \forall\ 0 \leqslant i \leqslant l\}$.

Определим множество

$$X\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right) = \overline{\{\chi(\alpha, n) : n \in \mathbb{F}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right)\}},$$

где $\chi(\alpha, n) = \{(n+1) i_0(\alpha)\}$, а $i_0(\alpha) = \max\{\alpha; 1-\alpha\}$.

Теорема 1. *Множеству $X\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right)$ для допустимого при заданном α набора $\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right)$ соответствует в точности один отрезок разбиения $Til_l\left(1 - i_0(\alpha)\right)$, причем этот отрезок длинный, если $\varepsilon_l = 0$, и короткий, если $\varepsilon_l = 1$.*

Доказательство. Доказательство проведем используя метод математической индукции.

На первом шаге индукции покажем, что $X(\varepsilon_0)$ — это ровно один отрезок разбиения $Til_0\left(1 - i_0(\alpha)\right)$, причем при $\varepsilon_0 = 0$ — длинный, а при $\varepsilon_0 = 1$ — короткий.

Вначале будем полагать, что $\alpha < \frac{1}{2}$. Возможны два случая:

1) в разложении (10) коэффициент $z_0(n) \leqslant q_1(\alpha) - 2$, тогда в разложении (30) $\varepsilon_0 = 0$. Согласно предложению 4, справедливо неравенство (12), а значит

$$\overleftarrow{n} + \alpha < (n+1)i_0(\alpha) < \overleftarrow{n} + 1, \qquad \alpha < \{(n+1)i_0(\alpha)\} < 1,$$

и, следовательно, $\chi(\alpha, n) \in (\alpha; 1)$.

В силу равномерности распределения значений $\{(n+1)i_0(\alpha)\}$ получаем, что

$$X(\varepsilon_0 = 0) = [\alpha; 1];$$

2) если же в разложении (10) коэффициент $z_0(n) = q_1(\alpha) - 1$, то в разложении (30) $\varepsilon_0 = 1$. В таком случае воспользуемся неравенством (13) из предложения 4 и получим

$$\overleftarrow{n} + 1 < (n+1)i_0(\alpha) < \overleftarrow{n} + \alpha + 1, \qquad 0 < \{(n+1)i_0(\alpha)\} < \alpha$$

и $\chi(\alpha, n) \in (0; \alpha)$. Зная, что значения $\chi(\alpha, n)$ равномерно распределены, имеем

$$X(\varepsilon_0 = 1) = [0; \alpha].$$

Итак, доказано, что если $\alpha < \frac{1}{2}$, то $X(\varepsilon_0 = 0) = [\alpha; 1]$, а $X(\varepsilon_0 = 1) = [0; \alpha]$, причем $X(\varepsilon_0 = 0)$ — длинный, а $X(\varepsilon_0 = 1)$ — короткий отрезки разбиений $Til_0\,(\alpha)$.

Рассмотрим случай $\alpha > \frac{1}{2}$. Как было показано все $\varepsilon_i(n)$ в разложениях (30) и (31) одинаковые при $\alpha < \frac{1}{2}$ и $\alpha > \frac{1}{2}$. Значения $\chi(\alpha, n)$ при $\alpha < \frac{1}{2}$ равномерно распределены по длинному отрезку, если $\varepsilon_0 = 0$, и по короткому отрезку, если $\varepsilon_0 = 1$. Очевидно, что при $\alpha > \frac{1}{2}$ значения $\chi(\alpha, n)$, точно такие же как и при $\alpha < \frac{1}{2}$, поэтому $X(\varepsilon_0 = 0) = [1-\alpha; 1]$ и $X(\varepsilon_0 = 1) = [0; 1-\alpha]$, где $\alpha > \frac{1}{2}$. Таким образом, первый шаг индукции, при $l = 0$, доказан.

Предположим, что при $l = m$ утверждение теоремы 1 верно, т.е. $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ — это в точности один отрезок разбиения $Til_m\,(1 - i_0(\alpha))$, причем длинный при $\varepsilon_m = 0$ и короткий при $\varepsilon_m = 1$.

Опираясь на это предположение докажем, что $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{m+1})$ — это ровно один отрезок разбиения $Til_{m+1}\,(1 - i_0(\alpha))$, причем длинный, если $\varepsilon_{m+1} = 0$, и короткий, если $\varepsilon_{m+1} = 1$. Коэффициент ε_m может принимать только два значения либо 0, либо 1. Рассмотрим оба эти случая.

В первом случае, когда $\varepsilon_m = 1$ значение ε_{m+1} однозначно определяется номером m:

1) если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$ или $\sigma(j, \alpha) \leqslant m \leqslant \sigma(j+1, \alpha) - 2$, то $\varepsilon_{m+1} = 1$;

2) если $m = \sigma(j, \alpha) - 1$, то $\varepsilon_{m+1} = 0$.

Значит $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{m+1}) = X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, если $\varepsilon_m = 1$.

По предположению индукции $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ — это короткий отрезок разбиения $Til_m\,(1 - i_0(\alpha))$, с которым при переходе к разбиению $Til_{m+1}\,(1 - i_0(\alpha))$ никаких преобразований не производится и этот отрезок останется коротким отрезком разбиения $Til_{m+1}\,(1 - i_0(\alpha))$, если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$ или $\sigma(j, \alpha) \leqslant m \leqslant \sigma(j+1, \alpha) - 2$, и становится длинным, если $m = \sigma(j, \alpha) - 1$.

Во втором случае, когда $\varepsilon_m = 0$, значение ε_{m+1} однозначно не определяется и может быть как 0, так и 1. Пусть $n \in \mathbb{F}\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, где $\varepsilon_m = 0$, тогда $\chi(\alpha, n) \in X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, где $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ — длинный отрезок разбиения $Til_m\,(1 - i_0(\alpha))$.

Как было показано выше, в результате стирания $m{+}1$ цифры в разложении (30) получается корректная запись разложения числа $\overleftarrow{n}^{m+1}$ в системе счисления $d^{m+1}\alpha$.

Очевидно, что если $n \in \mathbb{F}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, то $\varepsilon_{m+1}(\alpha, n), \varepsilon_{m+2}(\alpha, n), \ldots$ пробегают все α-допустимые комбинации, следовательно, $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha, \overleftarrow{n}^{m+1}\right)$, $\varepsilon_1\left(d^{m+1}\alpha, \overleftarrow{n}^{m+1}\right), \ldots$ также могут быть любыми из $d^{m+1}\alpha$-допустимых комбинаций.

Определим множество значений $\chi(\alpha,n)$ для чисел, удовлетворяющих условию $\varepsilon_{m+1}(\alpha,n)=0$ или $\varepsilon_{m+1}(\alpha,n)=1$. В силу равенства (32) можно воспользоваться случаем $l=0$ для чисел $\overleftarrow{n}^{m+1}$ в системе счисления $d^{m+1}\alpha$. Если $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=0$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)$ — это больший, а если $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=1$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)$ — меньший из отрезков, составляющих $X\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m\right)$.

Если $d^{m+1}\alpha<\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=1$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\in d_1$, где

$$|d_1|=d^{m+1}\alpha\cdot l_m(\alpha)=\frac{s_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha)+l_{m+1}(\alpha)}\cdot l_m(\alpha)=s_{m+1}(\alpha).$$

Если $d^{m+1}\alpha<\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=0$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\in d_2$, где

$$|d_2|=\left(1-d^{m+1}\alpha\right)l_m(\alpha)=\left(1-\frac{s_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha)+l_{m+1}(\alpha)}\right)l_m(\alpha)=l_{m+1}(\alpha).$$

Если $d^{m+1}\alpha>\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=1$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\in d_3$, где

$$|d_3|=\left(1-d^{m+1}\alpha\right)l_m(\alpha)=s_{m+1}(\alpha).$$

Если же $d^{m+1}\alpha>\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=0$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\in d_4$, где

$$|d_4|=d^{m+1}\alpha\cdot l_m(\alpha)=l_{m+1}(\alpha).$$

Итак, если $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=1$, а значит и $\varepsilon_{m+1}(\alpha,n)=1$, то значения $\chi\left(\alpha,n\right)\in d_I$, где $|d_I|=s_{m+1}(\alpha)$; если же $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=0$, т.е. $\varepsilon_{m+1}(\alpha,n)=0$, то $\chi\left(\alpha,n\right)\in d_{II}$, где $|d_{II}|=l_{m+1}(\alpha)$.

Теперь убедимся, что отрезки d_I и d_{II} расположены внутри отрезка $X\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m\right)$ также как и короткий и длинный отрезки разбиения $Til_m\left(1-i_0(\alpha)\right)$.

Рассмотрим последовательность натуральных чисел $n_k\in\mathbb{F}\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m\right)$, где $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m$ — коэффициенты разложения числа n_k в системе счисления α, чтобы подчеркнуть это будем писать $\varepsilon_0(\alpha),\ldots,\varepsilon_m(\alpha),\ldots$ Каждому числу n_k поставим в соответствие число $\overleftarrow{n}_k^{m+1}$, такое что $\overleftarrow{n}_k^{m+1}\left(\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha\right),\ldots,\varepsilon_m\left(d^{m+1}\alpha\right)\right)$, где $\varepsilon_j\left(d^{m+1}\alpha\right)=\varepsilon_{j+m+1}\left(\alpha\right)$.

Известно, что $\chi\left(\alpha,n_k\right)\in X\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m\right)$. Растянем этот отрезок до длины единица и обозначим $[0;1]$. Назовем эту операцию h_X растяжением. Имеем

$$h_X\left(\chi\left(\alpha,n\right)\right)=h_X\left(\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\right).$$

Очевидно, что

$$\left\{\left(n_k+1\right)i_0(\alpha)\right\}=\left\{\left(n_k+1\right)\alpha\right\}\quad\text{при}\quad\alpha>1/2,\tag{33}$$

$$\left\{\left(n_k+1\right)i_0(\alpha)\right\}=1-\left\{\left(n_k+1\right)\alpha\right\}\quad\text{при}\quad\alpha<1/2,\tag{34}$$

$$\left\{\left(\overleftarrow{n}_k^{m+1}+1\right)i_0\left(d^{m+1}\alpha\right)\right\}=\left\{\left(\overleftarrow{n}_k^{m+1}+1\right)d^{m+1}\alpha\right\}\quad\text{при}\quad d^{m+1}\alpha>1/2,\tag{35}$$

$$\left\{\left(\overleftarrow{n}_k^{m+1}+1\right)i_0\left(d^{m+1}\alpha\right)\right\}=1-\left\{\left(\overleftarrow{n}_k^{m+1}+1\right)d^{m+1}\alpha\right\}\quad\text{при}\quad d^{m+1}\alpha<\frac{1}{2}.\tag{36}$$

Рассмотрим различные варианты значений α и $d^{m+1}\alpha$:

1. если $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha < \frac{1}{2}$, то исходя из (34) и (36) получаем, что точки последовательностей $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ откладываются от одноименных концов соответствующих отрезков;

2. если $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha > \frac{1}{2}$, то используя (34) и (35) приходим к выводу, что точки последовательности $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ идут в обратном порядке по сравнению с токами последовательности $\{n_k\}$;

3. если $\alpha > \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha < \frac{1}{2}$, то применяя (33) и (36) получаем, что точки последовательностей $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ откладываются от разноименных концов соответствующих отрезков;

4. если $\alpha > \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha > \frac{1}{2}$, то воспользовавшись (33) и (35) заключаем, что порядок следования точек последовательностей $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ одинаковый.

Итак, порядок следования точек в последовательностях $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$, а значит и отрезков d_I и d_{II} внутри отрезка $X(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, одинаковый, если $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(d^{m+1}\alpha - \frac{1}{2}\right) > 0$, и противоположный, если $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(d^{m+1}\alpha - \frac{1}{2}\right) < 0$.

Убедимся, что отрезки $s_{m+1}(\alpha)$ и $l_{m+1}(\alpha)$ разбиения $Til_{m+1}(\alpha)$ внутри отрезка $l_m(\alpha)$ разбиения $Til_m(\alpha)$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, располагаются также как и отрезки d_I и d_{II} внутри отрезка $X(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$.

При $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 3$ или $\sigma(2n, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1, \alpha) - 3$ согласно (16) все короткие отрезки $s_m(\alpha)$ своей длины не изменят, а каждый длинный отрезок $l_m(\alpha)$ разобьется на два отрезка: $s_{m+1}(\alpha) = s_m(\alpha)$ и $l_{m+1}(\alpha) = l_m(\alpha) - s_m(\alpha) > s_m(\alpha)$, причем слева от нуля будет находиться отрезок $s_{m+1}(\alpha)$, а справа $l_{m+1}(\alpha)$. В таком случае, согласно (27),

$$d^{m+1}\alpha = \frac{s_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha) + l_{m+1}(\alpha)} < \frac{1}{2}.$$

С другой стороны при $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha < \frac{1}{2}$ порядок точек в последовательностях $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ одинаковые, т.е. внутри отрезка $X(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ слева d_I, а справа d_{II}.

Итак, при $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 3$ или $\sigma(2n, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1, \alpha) - 3$ порядок следования отрезков одинаковый.

При $m = \sigma(2n-1, \alpha) - 2$ в силу (16) отрезки $s_m(\alpha)$ станут длинными $l_{m+1}(\alpha)$, а каждый длинный $l_m(\alpha)$ распадется на два $l_{m+1}(\alpha) = s_m(\alpha)$ и $s_{m+1}(\alpha) = l_m(\alpha) - s_m(\alpha) < s_m(\alpha)$, причем слева от нуля будет длинный отрезок $l_{m+1}(\alpha)$, а справа — короткий $s_{m+1}(\alpha)$. В данном случае, опираясь на (27), получим

$$d^{m+1}\alpha = \frac{l_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha) + l_{m+1}(\alpha)} > \frac{1}{2}.$$

Ранее было показано, что если $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha > \frac{1}{2}$, то порядок следования отрезков d_I и d_{II} противоположный, т.е. внутри отрезка $X(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ слева d_{II}, а справа d_I.

Таким образом, при $m = \sigma(2n-1, \alpha) - 2$ порядок следования отрезков сохраняется.

При $\sigma(2n-1, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n, \alpha) - 3$ согласно (17) имеем $s_{m+1}(\alpha) = s_m(\alpha)$ и $l_{m+1}(\alpha) = l_m(\alpha) - s_m(\alpha) > s_m(\alpha)$ и слева от нуля будет отрезок $l_{m+1}(\alpha)$, а справа $s_{m+1}(\alpha)$. В соответствии с (27),

$$d^{m+1}\alpha = \frac{l_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha) + l_{m+1}(\alpha)} > \frac{1}{2}.$$

При $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha > \frac{1}{2}$ получаем, что слева d_{II}, а справа d_I.

Следовательно, при $\sigma(2n-1,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha)-3$ порядок расположения отрезков одинаковый.

При $m=\sigma(2n,\alpha)-2$, в силу (17), отрезки $l_{m+1}(\alpha)=s_m(\alpha)$ и $s_{m+1}(\alpha)=l_m(\alpha)-s_m(\alpha)<s_m(\alpha)$ расположены так, что слева находится короткий отрезок $s_{m+1}(\alpha)$, а справа длинный $l_{m+1}(\alpha)$. Согласно (27),

$$d^{m+1}\alpha = \frac{s_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha)+l_{m+1}(\alpha)} < \frac{1}{2}.$$

При $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha < \frac{1}{2}$ слева будет отрезок d_I, а справа d_{II}.

Итак, при всех $m \geqslant 0$ порядок расположения отрезков $s_{m+1}(\alpha)$ и $l_{m+1}(\alpha)$ разбиения $Til_{m+1}(\alpha)$ внутри отрезка $l_m(\alpha)$ разбиения $Til_m(\alpha)$ такой же как и порядок расположения отрезков d_I и d_{II} внутри отрезка $X(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m)$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что множество $X(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$ можно вычислить в явном виде, рассматривая, согласно теореме 1, вложенную последовательность длинных и коротких интервалов разбиений $Til_0(1-i_0(\alpha)), Til_1(1-i_0(\alpha)), \ldots, Til_l(1-i_0(\alpha))$, соответствующих наборам (ε_0), $(\varepsilon_0,\varepsilon_1)$, …, $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l)$.

Теорема 2. *Для произвольного α-допустимого набора $(z_0,\ldots,z_l)$ множество $\mathbb{X}(z_0,\ldots,z_l)$ представляет собой отрезок вида $[\{a\alpha\};\{b\alpha\}]$ с эффективно вычислимыми $a,b\in\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $(z_0,\ldots,z_l)$ – α-допустимый набор. Поставим ему в соответствие набор $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)$ по следующему правилу. Заменим z_0 набором из $q_1(\alpha)-1$ нулей и единиц, причем сначала идут $q_1(\alpha)-z_0-1$ нулей, а затем z_0 единиц. Каждое z_i, где $1\leqslant i\leqslant l$, также заменим набором из $q_{i+1}(\alpha)$ нулей и единиц, где вначале идут $q_{i+1}(\alpha)-z_i$ нулей, а затем z_i единиц. Выстроим все наборы нулей и единиц, соответствующих z_i в порядке возрастания номера i и перенумеруем полученные числа ε_0, ε_1, …, ε_s. Тогда выполняется равенство

$$\mathbb{Z}(z_0,\ldots,z_l)=\mathbb{F}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)$$

и, следовательно,

$$\mathbb{X}(z_0,\ldots,z_l)=X(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s).$$

Используя теорему 1, получаем, что $\mathbb{X}(z_0,\ldots,z_l)$ представляет собой отрезок разбиения $Til_s(1-i_0(\alpha))$ с эффективно вычислимым s. Далее остается воспользоваться предложением 7 и равенством $i_0(\alpha)=\max\{\alpha,1-\alpha\}$. Отметим, что значения a,b оказываются неотрицательными для $\alpha<\frac{1}{2}$ и неположительными для $\alpha>\frac{1}{2}$.

7. Заключение

В настоящей работе получена геометрическая интерпретация принадлежности натурального числа множеству $\mathbb{Z}(z_0,\ldots,z_l)$ натуральных чисел, имеющих заданное окончание разложения в систему счисления Островского–Цеккендорфа. Данный результат может быть использован для получения асимптотических формул для числа решений ряда аналогов класcическиих теоретико-числовых задач над данными множествами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Knuth D. E. Fibonacci multiplication // Appl. Math. Lett. 1988. V. 1. P. 57-60.

2. Mintchev S. Continued fraction expansions and self-similarity of rotation on the circle // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. V. 36. P. 1-14.

3. Ostrowski A. Bemerkugen zur Theorie der Diophantischen Approximationen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1922. V. 1. P. 77-98.
4. Van Ravenstein T. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. V. 45. P. 360-370.
5. Shutov A. V. New estimates in the Hecke-Kesten problem // Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, A. Laurincikas and E. Manstavicius (Eds). 2007. P. 190-203. Vilnius:TEV
6. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. Задача Хуа-Локена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 7. С. 497-500.
7. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. О вычислении некоторых особых рядов // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 85-92.
8. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 2010. Т. 5(76), № 18. С. 83-87.
9. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. О теореме Чудакова в простых числах специального вида // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 75-84.
10. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 6. С. 413-417.
11. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. Проблема Варинга с натуральными числами специального вида // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 3. С. 31-47.
12. Давлетярова Е. П. , Жукова А. А. , Шутов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 6. С. 1-23.
13. Давлетярова Е. П. , Жукова А. А. , Шутов А. В. Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 2. С. 88-112.
14. Журавлев В. Г. Одномерные квазирешетки Фибоначчи и их приложения к диофантовым уравнениям и алгоритму Евклида // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 3. С. 177-208.
15. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 2. С. 89-122. DOI: http://dx. doi. org/10. 4213/im620
16. Журавлев В. Г. Суммы квадратов над ∘-кольцом Фибоначчи // Записки научного семинара ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 165-190.
17. Журавлев В. Г. Уравнение Пелля над ∘-кольцом Фибоначчи // Записки научного семинара ПОМИ. 2008. Т. 350. С. 139-159.
18. Журавлев В. Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распрделение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 3. С. 18-46.
19. Красильщиков В. В. , Шутов А. В. Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 7(57). С. 84-91.
20. Красильщиков В. В. , Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий // Известия вузов. Математика. 2009. № 7. С. 3-9.

21. Мануйлов Н. Н. Рекуррентные самоподобные разбиения // Чебышевский сборник. 2001. Т. 4, вып. 2. С. 87-91.

22. Матиясевич Ю. В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гилберта // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 8. С. 132-144.

23. Матиясевич Ю. В. Две редукции 10-й проблемы Гилберта // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 8. С. 145-158.

24. Швагирева И. К. Бинарные аддитивные задачи над ∘-прогессиями Фибоначчи // Материалы VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тула, 11-16 мая 2010 года ТГПУ, Тула. 2010. С. 198-200.

25. Шутов А. В. Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. С. 255-262.

26. Шутов А. В. Неоднородные диофантовы приближения и распределение дробных долей // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 6. С. 189-202.

27. Шутов А. В. О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 3. С. 112-121.

28. Шутов А. В. О распределении дробных долей II // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2005. № 3. С. 146-158.

29. Шутов А. В. Об одной аддитивной задаче с дробными долями // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 2013. Т. 5(148), № 30. С. 111-120.

30. Шутов А. В. Перенормировки вращений окружности // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 4. С. 125-143.

31. Шутов А. В. Последовательности Штурма: графы Рози и форсинг // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 2. С. 128-139.

32. Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Записки научных семинаров ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 272-284.

33. Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, вып. 3. С. 110-128.

REFERENCES

1. Knuth D. E. 1988. "Fibonacci multiplication", *Appl. Math. Lett.* , Vol. 1, pp. 57-60. doi:10. 1016/0893-9659(89)90131-6.

2. Mintchev S. 2002. "Continued fraction expansions and self-similarity of rotation on the circle", *J. Phys. A. Math. Gen.* , Vol. 36, pp. 1-14.

3. Ostrowski A. 1922. "Bemerkugen zur Theorie der Diophantischen Approximationen", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* , Vol. 1, pp. 77-98.

4. Van Ravenstein T. 1988. "The three gap theorem (Steinhaus conjecture)", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, Vol. 45, pp. 360-370. doi:10. 1017/S1446788700031062.

5. Shutov A. V. 2007. "New estimates in the Hecke-Kesten problem" , *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, A. Laurincikas and E. Manstavicius (Eds)*, pp. 190-203. Vilnius: TEV

6. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2009. "Zadacha Hua-Lokena s prostymi chislami special'nogo vida", *DAN respubliki Tadzhikistan*, Vol. 52, no. 7, pp. 497-500. (Russian)

7. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2011. "On the computation of some singular series", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 12, no. 4, pp. 85-92. (Russian)

8. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2010. "O nekotoryh additivnyh zadachah teorii chisel", *Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Matematika. Fizika*, Vol. 5(76), no. 18, pp. 83-87. (Russian)

9. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2011. "On Chudakov's theorem involving primers of a special type", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 12, no. 4, pp. 75-84. (Russian)

10. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2009. "Ob odnom variante ternarnoj problemy Gol'dbaha", *DAN respubliki Tadzhikistan*, Vol. 52, no. 6, pp. 413-417. (Russian)

11. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2014. "Waring's promblem involving natural numbers of a special type", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 15, no. 3, pp. 31-47. (Russian)

12. Davletjarova E. P. , Zhukova A. A. & Shutov A. V. 2013. "Geometrizacija sistemy schislenija Fibonacci i ee prilozhenija k teorii chisel", *Algebra i analiz*, Vol. 25, no. 6, pp. 1-23. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2014, 25:6, 893-907. doi:10. 1090/S1061-0022-2014-01321-0.

13. Davletjarova E. P. , Zhukova A. A. & Shutov A. V. 2016. "Geometrizacija obobshhennyh sistem schislenija Fibonacci i ee prilozhenija k teorii chisel", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 17, no. 2, pp. 88-112. (Russian)

14. Zhuravlev V. G. 2007. "Odnomernye kvazireshetki Fibonachchi i ih prilozhenija k diofantovym uravnenijam i algoritmu Evklida", *Algebra i analiz*, Vol. 19, no. 3, pp. 177-208. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2008, 19:3, 431-454. doi:10. 1090/S1061-0022-08-01005-4.

15. Zhuravlev V. G. 2007. "Odnomernye razbienija Fibonacci", *Izv. RAN. Ser. matem.* , Vol. 71, no. 2, pp. 89-122. (Russian) translation in Izvestiya: Mathematics, 2007, 71:2, 307-340. doi: 10. 1070/IM2007v071n02ABEH002358.

16. Zhuravlev V. G. 2006. "Summy kvadratov nad ∘-kol'com Fibonachchi", *Zapiski nauchnogo seminara POMI*, Vol. 337, pp. 165-190. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences, 2007, 143:3, 3108-3123. doi: 10. 1007/s10958-007-0195-1.

17. Zhuravlev V. G. 2008. "Uravnenie Pellja nad ∘-kol'com Fibonachchi", *Zapiski nauchnogo seminara POMI*, Vol. 350, pp. 139-159. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences, 2008, 150:3, 2084-2095. doi: 10. 1007/s10958-008-0123-z.

18. Zhuravlev V. G. 2008. "Chetno-fibonachchevy chisla: binarnaja additivnaja zadacha, rasprdelenie po progressijam i spectr", *Algebra i analiz*, Vol. 20, no. 3, pp. 18-46. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2009, 20:3, 339-360. doi: 10. 1090/S1061-0022-09-01051-6.

19. Krasil'shhikov V. V. & Shutov A. V. 2007. "Nekotorye voprosy vlozhenija reshetok v odnomernye kvaziperiodicheskie razbienija", *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaja serija*, no. 7(57), pp. 84-91. (Russian)

20. Krasil'shhikov V. V. & Shutov A. V. 2009. "Odnomernye kvaziperiodicheskie razbienija, dopuskajushhie vlozhenie progressij", *Izvestija vuzov. Matematika*, no. 7, pp. 3-9. (Russian). translation in Russian Mathematics, 2009, 53:7, 1-6. doi: 10. 3103/S1066369X09070019.

21. Manujlov N. N. 2001. "Rekurrentnye samopodobnye razbienija", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 4, no. 2, pp. 87-91. (Russian)

22. Matijasevich Ju. V. 1968. "Svjaz' sistem uravnenij v slovah i dlinah s 10-j problemoj Gilberta", *Zapiski nauchnyh seminarov LOMI*, Vol. 8, pp. 132-144. (Russian)

23. Matijasevich Ju. V. 1968. "Dve redukcii 10-j problemy Gilberta", *Zapiski nauchnyh seminarov LOMI*, Vol. 8, pp. 145-158. (Russian)

24. Shvagireva I. K. 2010. "Binarnye additivnye zadachi nad ∘-progessijami Fibonachchi", *Materialy VII mezhdunarodnoj konferencii "Algebra i teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija posvjashhennoj pamjati professora Anatolija Alekseevicha Karatsuby, Tula, 11-16 maja 2010 goda TGPU, Tula*, pp. 198-200. (Russian)

25. Shutov A. V. 2010. "Arifmetika i geometrija odnomernyh kvazireshetok", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 11, pp. 255-262. (Russian)

26. Shutov A. V. 2010. "Neodnorodnye diofantovy priblizhenija i raspredelenie drobnyh dolej", *Fundamental'naja i prikladnaja matematika*, Vol. 16, no. 6, pp. 189-202. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences (New York), 2012, 182:4, 576-585. doi: 10. 1007/s10958-012-0762-y.

27. Shutov A. V. 2004. "O raspredelenii drobnyh dolej", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 5, no. 3, pp. 112-121. (Russian)

28. Shutov A. V. 2005. "O raspredelenii drobnyh dolej II", *Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkcional'nomu analizu i smezhnym voprosam*, no. 3, pp. 146-158. (Russian)

29. Shutov A. V. 2013. "Ob odnoj additivnoj zadache s drobnymi doljami", *Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Matematika. Fizika*, Vol. 5(148), no. 30, pp. 111-120. (Russian)

30. Shutov A. V. 2004. "Perenormirovki vrashhenij okruzhnosti", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 5, no. 4, pp. 125-143. (Russian)

31. Shutov A. V. 2007. "Posledovatel'nosti Shturma: grafy Rozi i forsing", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 8, no. 2, pp. 128-139. (Russian)

32. Shutov A. V. 2004. "Proizvodnye povorotov okruzhnosti i podobie orbit", *Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, Vol. 314, pp. 272-284. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences, 2006, 133:6, 1765-1771. doi: 10. 1007/s10958-006-0088-8.

33. Shutov A. V. 2006. "Sistemy schislenija i mnozhestva ogranichennogo ostatka", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 7, no. 3, pp. 110-128. (Russian)