ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-208-220

ОБОБЩЕННЫЕ ЯКОБИАНЫ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ [1]

В. С. Жгун (г. Москва)

Аннотация

В работе определяются обобщенные многочлены Мамфорда, описывающие сложение точек на обобщенном якобиане особой гиперэллиптической кривой над полем $\mathbb{K}$ характеристики отличной от 2, гладкой в бесконечно удаленной точке и заданной в аффинной карте уравнением $y^2 = \phi(x)^2 f(x)$, где многочлен f — свободен от квадратов. Нами найдена связь между разложением в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей специального вида для гиперэллиптического поля $\mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)})$ и обобщенными многочленами Мамфорда, определяющими сложение в группе классов дивизоров на особой гиперэллиптической кривой. Это соответствие между разложением в непрерывную дробь и многочленами Мамфорда позволяет доказать теорему об эквивалентности следующих условий: (i) условия квазипериодичности разложения квадратичной иррациональности специального вида в непрерывную дробь, построенного по нормированию, связанному с точкой степени 1 на нормализации кривой и (ii) условия конечности порядка класса, построенного по точке степени 1 на нормализации кривой. С помощью этого соответствия также удается обобщить результаты о симметрии квазипериода и оценки на его длину, обобщающие результаты, полученные нами ранее.

Ключевые слова: Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях, обобщенное представление Мамфорда, обобщенные якобианы, точки кручения в якобианах.

Библиография: 15 названий.

ON GENERALIZED JACOBIANS AND RATIONAL CONTINUED FRACTIONS IN THE HYPERELLIPTIC FIELDS

V. S. Zhgoon (Moscow)

Abstract

In the paper we introduce generalized Mumford polynomials describing additive law on generalized Jacobian of singular hyperelliptic curve over the field $\mathbb{K}$ of characteristics different from 2, and smooth at infinity and defined in the affine chart by the equation $y^2 = \phi(x)^2 f(x)$, where f is a square-free polynomial. We describe the relation between the continued fraction expansion of the quadratic irrationalities in the hyperelliptic function field $\mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)})$ and the generalized Mumford polynomials describing the additive law in the divisor class group of the singular hyperelliptic curve. This correspondence between the continued fraction expansion of the quadratic irrationalities and the generalized Mumford polynomials allow us to prove the theorem on equivalence of two conditions: the condition (i) of quasi-periodicity of continued fraction expansion (related with valuation of a point of degree 1 on the normalization of the curve) of a quadratic irrationality of the special type and the condition (ii) of the finiteness of the order of the class, related to the point of degree 1 on the normalization of the curve. By means of this correspondence we also obtain the results on the symmetry of quasi-period

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N16-11-10111).

and we give estimates for its length, generalizing results obtained before by the author and collaborators.

Keywords: Continued rational fractions in hyperelliptic fields, Mumford representation, generalized Jacobians, torsion points of the Jacobians.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Пусть $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ — многочлен степени $2g+1$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики отличной от 2. Представим его в виде $h(x) = \phi(x)^2 f(x)$, где многочлен f — свободен от квадратов. Пусть $\phi(x) = \prod(x - x(Q))^{g_Q}$ — разложение на простые множители над $\overline{\mathbb{K}}$ — алгебраическим замыканием поля $\mathbb{K}$. Рассмотрим аффинную кривую заданную уравнением $y^2 = h(x)$. Ей соответствует, вообще говоря, особая проективная гиперэллиптическая кривая $\mathcal{C}$ с полем рациональных функций $\mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)})$ и гладкой точкой ∞. Рассмотрим также гладкую проективную кривую $\widetilde{\mathcal{C}}$, компактифицирующую аффинную кривую $\widetilde{y}^2 = f(x)$. Рассмотрим морфизм нормализации $\pi : \widetilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$. Его ограничение на открытое аффинное подмножество кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ определено формулой $(x, \widetilde{y}) \to (x, \phi(x)\widetilde{y})$. Также имеем отображение $J_{\mathcal{C}} \to J_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ из обобщенного якобинана кривой $\mathcal{C}$ в якобиан кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$. В наших рассуждениях нам придется переходить к различным особым моделям $\mathcal{C}$, соответствующим различным полиномам $\phi(x)$. Чтобы подчеркнуть зависимость от $\phi(x)$, эти модели мы будем обозначать через $\mathcal{C}_\phi$, а их род через g_ϕ. Положим $h(x) = \phi(x)^2 d(x) f_0(x)$, где $d(x) = \prod(x - x(Q))^{d_Q}$ — наибольший общий делитель $f(x)$ и $\phi(x)$. Для кривой $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{C}^s$ — множество ее особых точек, определенных нулями $\phi(x)d(x)$, а через $\mathcal{C}^{ram}$ — множество точек ветвления, заданных нулями $f_0(x)$. Для $S \in \widetilde{\mathcal{C}}$, для которой $\pi(S) \in \mathcal{C}^s$, положим $m_S = \phi_Q + d_Q$ — если $\pi(S) \notin \mathcal{C}^{ram}$, и $m_S = 2\phi_Q + d_Q$ иначе. Через $\mathfrak{m} = \sum_{S \in \pi^{-1}(\mathcal{C}^s)} m_S S$ обозначим дивизор на $\widetilde{\mathcal{C}}$, соответствующий прообразам особых точек кривой $\mathcal{C}$.

Пусть D_0 — эффективный дивизор степени g, и пусть P — точка степени 1 на кривой $\mathcal{C}$, определенная над $\mathbb{K}$, не являющаяся ни точкой ветвления, ни особой точкой. Наша цель связать последовательность приближений с помощью непрерывных дробей квадратичной иррациональности, соответствующей дивизору D_0, и последовательность многочленов Мамфорда для дивизоров вида $D_0 + 2k(P - \infty)$. В настоящей работе, продолжающей нашу работу [6], используются особые кривые и их обобщенные якобианы, что существенно расширяет класс рассматриваемых квадратичных иррациональностей.

Обобщая результаты работы [6], мы получаем доказательство теоремы об эквивалентности условия квазипериодичности непрерывной дроби квадратичной иррациональности и условия конечности порядка точки $P - \infty$ на якобиане нормализации кривой $\mathcal{C}$.

2. Представление Мамфорда дивизора набором многочленов

Простой точке $Q \in \widetilde{\mathcal{C}}$ степени 1 соответствует нормирование ν_Q поля $\mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)})$. Определим локальное кольцо $\mathcal{O}_Q := \{F \in \mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)}) | \ \nu_Q(F) \geqslant 0\}$ точки Q. Обозначим через π_Q униформизующую в точке $Q \in \widetilde{\mathcal{C}}$, то есть такой элемент $\pi_Q \in \mathcal{O}_Q$, что $\nu_Q(\pi_Q) = 1$. Ограничения координатных функций x и $\widetilde{y}$ на кривую дают рациональные функции на $\widetilde{\mathcal{C}}$, их значения в точке Q мы обозначим через $x(Q)$ и $\widetilde{y}(Q)$. Если, точка Q не является ни особой точкой, ни точкой ветвления, то можно положить $\pi_Q = x - x(Q)$. Через ν_∞ обозначим бесконечное нормирование, принимающее на многочлене $V(x)$ значение $-2\deg(V(x))$. Тогда $\nu_\infty(y) = \nu_\infty(\sqrt{f(x)}) = -(2g+1)$. Через $\imath$ обозначим инволюцию гиперэллиптической кривой, переводящую точку $(x(Q), \widetilde{y}(Q))$ в $(x(Q), -\widetilde{y}(Q))$. Для дивизора D, определенного над полем

$\mathbb{K}$ (для краткости называемого $\mathbb{K}$-дивизором), рассмотрим разложение $D = \sum n_Q Q$ в сумму точек Q, простых над $\overline{\mathbb{K}}$.

Определение 1. *Дивизор $D = \sum n_Q Q$ степени d на гиперэллиптической кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ мы назовем* минимальным, *если для каждой точки $Q \in \operatorname{Supp} D$ выполнены следующие условия*

- *$\pi(Q)$ не является особой точкой кривой $\mathcal{C}$;*
- *если Q — точка ветвления, то $n_Q = 1$;*
- *если Q не является точкой ветвления, то $\imath Q \notin \operatorname{Supp} D$.*

Образ минимального дивизора на кривой $\mathcal{C}$ лежит в множестве неособых точек и является дивизором Картье на этой кривой.

Нам понадобится конструкция Розенлихта обобщенных якобианов особых кривых, которая подробно изложена в монографии Серра [2]. Напомним, определение линейной эквивалентности по модулю $\mathfrak{m}$.

Определение 2. *Для $S \in \mathcal{C}^s$, обозначим через $S_1, \ldots, S_l \in \widetilde{\mathcal{C}}$ — множество $\overline{\mathbb{K}}$-точек из $\pi^{-1}(S)$. Будем говорить, что рациональная функция $F \in \overline{\mathbb{K}}(x, \sqrt{f(x)})$ обладает модулем $\mathfrak{m}$, если для любой точки $S \in \mathcal{C}^s$ найдется ненулевая константа $c_S \in \overline{\mathbb{K}}$, такая, что для всех i выполнены сравнения*

$$F = c_S \mod \pi_{S_i}^{m_S}.$$

Определение 3. *Дивизоры $D \sim_{\mathfrak{m}} E$ называются линейно эквивалентными по модулю $\mathfrak{m}$, если $D = E + (F)$ для дивизора (F) некоторой рациональной функции $F \in \overline{\mathbb{K}}(x, \sqrt{f(x)})$, обладающей модулем $\mathfrak{m}$.*

Важность понятия минимального дивизора иллюстрирует следующая лемма, обобщающая [1, III §2].

Лемма 1. *Пусть $D = \sum n_Q Q$ — минимальный эффективный дивизор на гиперэллиптической кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ над полем $\overline{\mathbb{K}}$, $\deg D \leqslant g$. Предположим, что $\deg f_0 > g$. Тогда не существует рациональной функции $F \in \overline{\mathbb{K}}(x, \sqrt{f(x)})$, обладающей модулем $\mathfrak{m}$, полюса которой содержатся в носителе дивизора D, и их порядок в каждой точке Q не превосходит n_Q.*

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать лемму в случае когда ∞ не входит в носитель D. В противном случае, можно найти неособую точку ветвления не лежащую в носителе D и применить бирациональный автоморфизм переводящий эту точку в ∞.

Предположим, что существует рациональная функция F, удовлетворяющая условию леммы, тогда $U_D(x)F$ — регулярная функция на $\mathcal{C} \setminus \infty$, поэтому она принадлежит кольцу $K[x, \sqrt{f(x)}]$, то есть $U_D(x)F = V(x) + W(x)\sqrt{f(x)}$, где $V(x), W(x) \in \mathbb{K}[x]$. Пусть $S \in \operatorname{Supp} \mathfrak{m}$, тогда $\imath S$ входит в $\mathfrak{m}$ с той же кратностью. Поскольку функция $U_D(x)$ также $\imath$-инвариантна и не обращается в нуль в точках $\operatorname{Supp} \mathfrak{m}$ имеем

$$F = c_S \mod \pi_S^{m_S} \qquad \imath F = c_S \mod \pi_S^{m_S}.$$

Вычитая сравнения получаем:

$$W(x)y = 0 \mod \pi_S^{m_S},$$

откуда следует, что $W(x) = \phi(x)\widetilde{W}(x)$, для $\widetilde{W}(x) \in \mathbb{K}[x]$.

Поскольку $\nu_\infty(V(x))$ — четно, а $\nu_\infty(\widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)})$ — нечетно, то компоненты старшей степени не могут сократиться, откуда имеем

$$\nu_\infty(V(x) + \widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)}) \leqslant \nu_\infty(\widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)}).$$

Так как $F(x)$ по предположению не имеет полюсов в ∞:

$$0 \leqslant \nu_\infty(F) = \nu_\infty\left(\frac{V(x) + \widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)}}{U_D(x)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \nu_\infty(\widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)}/U_D(x)) \leqslant -(2g+1) + 2g = -1.$$

Значит данная цепочка равенств не может быть выполнена, а значит $\widetilde{W}(x) = 0$. Но функция $F(x) = \frac{V(x)}{U_D(x)}$ (где $\deg V(x) = \deg U_D(x)$, поскольку у F нет полюсов в ∞) очевидно сохраняется при действии инволюции $\imath$, откуда множество полюсов тоже должно быть инвариантно, то есть лежать в множестве точек ветвления. Однако для любой точки ветвления P, функция $(x - x(P))$ имеет дивизор нулей $2P$ на кривой C. Откуда из условия леммы, множество полюсов F не может лежать в D, и функция F постоянна. $\square$

Таким образом, по лемме 1 в классе линейной эквивалентности эффективного минимального дивизора степени не больше g существует единственный эффективный дивизор.

Для определения многочленов Мамфорда нам понадобится следующая аппроксимационная лемма :

Лемма 2. *(см. [1, III §2]) Пусть D — минимальный эффективный дивизор степени d на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$, определенный над $\mathbb{K}$ и не содержащий ∞ в своем носителе. Пусть $D = \sum n_Q Q$ — его разложение над $\overline{\mathbb{K}}$. Тогда существует единственный многочлен $V(x) \in \mathbb{K}[x]$ степени не выше $d-1$, такой что*

$$V(x) = \phi(x)y \mod (x - x(Q))^{n_Q}, \text{ для всех } P \in \operatorname{Supp}(D). \qquad (*)$$

Для произвольного эффективного минимального дивизора $D = \sum n_Q Q$ степени d определим многочлен $U_D(x) = \prod_{Q\neq\infty}(x - x(Q))^{n_Q}$. Если D определен над $\mathbb{K}$, то многочлен также определен над $\mathbb{K}$. Согласно лемме 2 существует единственный аппроксимирующий $\sqrt{h(x)}$ многочлен $V_D(x)$, то есть такой что $\deg V_D(x) \leqslant d-1$ и

$$V_D(x) = \phi(x)\widetilde{y} \mod (x - x(Q))^{n_Q}, \text{ для всех } Q \in \operatorname{Supp}(D).$$

Заметим, что $h(x) - V_D(x)^2 = \phi(x)\widetilde{y}^2 - V_D(x)^2 = 0 \mod (x - x(Q))^{n_Q}$, откуда следует, что многочлен $h(x) - V_D(x)^2$ делится на $U_D(x)$. То есть существует $\overline{U}_D(x)$ удовлетворяющий равенству:

$$h(x) - V_D(x)^2 = U_D(x)\overline{U}_D(x).$$

Определение 4. *Для эффективного минимального дивизора D набор многочленов*

$$(V_D(x), U_D(x), \overline{U}_D(x))$$

мы назовем представлением Мамфорда*, $V_D(x), U_D(x), \overline{U}_D(x)$ —* многочленами Мамфорда*.*

Легко видеть, что тройка многочленов $(V_D(x), U_D(x), \overline{U}_D(x))$ однозначно восстанавливает дивизор D. Действительно, $U_D(x)$ восстанавливает координаты $x(Q)$, где $Q \in \operatorname{Supp} D$, а $V_D(x)$ — координату $y(Q)$. Более того, по этой тройке восстанавливаются также $h(x)$ и $\phi(x)$.

3. Непрерывные дроби, ассоциированные с точкой на гиперэллиптической кривой.

Напомним определение непрерывных дробей в функциональных полях (см. [3],[4]). Пусть $P \in \mathcal{C}$ — $\mathbb{K}$-точка степени 1, не являющаяся точкой ветвления. Рассмотрим $\widehat{\mathbb{K}}_P$ — пополнение поля $\mathbb{K}$ относительно нормирования ν_P. Тогда каждый элемент $\beta \in \widehat{\mathbb{K}}_P$ можно однозначно представить в виде формального степенного ряда $\beta = \sum\limits_{i=s}^{\infty} d_i v^i$, где $d_i \in \mathbb{K}$. Назовем

$[\beta] := \sum_{i=s}^{0} d_i v^i$ *целой частью*, а $\{\beta\} := \beta - [\beta]$ — *дробной частью*. Пусть $a_0 = [\beta]$, $\beta_0 = \beta$. Если $\beta_{i-1} - a_{i-1} \neq 0$, по индукции определяем элементы a_i, β_i:

$$\beta_i = \frac{1}{\beta_{i-1} - a_{i-1}} \in \widehat{\mathbb{K}}_P, \quad a_i = [\beta_i].$$

В результате мы получим непрерывную дробь $[a_0; a_1, \ldots]$.

Определение 5. *Непрерывная дробь называется* квазипериодической, *если найдутся такие $k \neq l$, что $\beta_k = c\beta_l$, где $c \in \mathbb{K}$ — некоторая ненулевая константа. Минимальное число $|k - l|$ называется* длиной квазипериода.

Результаты о характеризации квазипериодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях рациональных функций на кривой без ветвления на бесконечности были получены в [5]. Они опираются только на теорему Римана-Роха для кривых и стандартные преобразования для непрерывных дробей.

Следующая теорема дает связь квазипериодичности непрерывной дроби и конечности кручения дивизора $(P - \infty)$. Доказательство опирается на лемму 1 и интерпретацию каждого шага разложения в непрерывную дробь в терминах представления Мамфорда.

Обозначим через $\tau(G)$ число делителей многочлена $G(x)$ в кольце $\mathbb{K}[x]$.

Теорема 1. *Пусть P — $\mathbb{K}$-точка кривой $\mathcal{C}$ степени 1, не являющаяся точкой ветвления. Пусть D_0 — минимальный эффективный дивизор степени g кривой $\mathcal{C}$, не содержащий точку $\imath P$ в своем носителе. Пусть $(V_0(x), U_0(x)(x - x(P))^2, U_1(x))$ — представление Мамфорда дивизора $D_0 + 2P$. Тогда непрерывная дробь построенная по квадратичной иррациональности*

$$\beta = \frac{\sqrt{h(x)} + V_0(x)}{U_1(x)(x - x(P))} \tag{1}$$

квазипериодична, тогда и только тогда, когда порядок точки $(P - \infty)$ на якобиане кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ конечен. Если этот порядок равен M, то период имеет длину не более чем $M\tau(\phi(x))^2$.

Доказательство будет приведено в следующем параграфе.

4. Связь сложения дивизоров и разложения в непрерывную дробь.

Лемма 3. *Пусть D — минимальный эффективный дивизор степени g, такой что $\infty \notin \operatorname{Supp} D$, а $P \in \widetilde{\mathcal{C}}$ — $\overline{\mathbb{K}}$-точка кривой, которая не является точкой ветвления и не проецируется в особую точку кривой $\mathcal{C}$, и такая, что $\imath P \notin \operatorname{Supp} D$. Тогда существует рациональная функция вида*

$$F = \frac{V(x) + \phi(x)\widetilde{y}}{U(x)},$$

такая что дивизор $E := D + P - \infty + (F) \geqslant 0$ имеет степень g и эффективен. При этом, если $Q \in \operatorname{Supp}(D)$, то $Q \notin \operatorname{Supp}(E)$. В случае, когда $Q \in \operatorname{Supp}(E)$ и $\imath Q \in \operatorname{Supp}(E)$, точка Q является либо точкой ветвления, причем кратность вхождения в дивизор E не более 1, либо $\pi(Q)$ особая точка кривой $\mathcal{C}$, а Q и $\imath Q$ входят в E с одинаковой кратностью равной $\nu_Q(g.c.d.(V(x), \phi(x)))$.

Доказательство. Рассмотрим представление Мамфорда $(V(x), U(x), \overline{U}(x))$ для дивизора $D + P$, который по условию леммы является минимальным, причем $\deg U(x) = g + 1$ и $\deg V(x) \leqslant g$. Имеем:

$$V(x) - \phi(x)\widetilde{y} = 0 \mod (x - x(Q))^{n_Q}, \text{ для } Q \in \operatorname{Supp} D + P,$$

Функция $V(x) + \phi(x)\widetilde{y}$ содержит в своем множестве нулей все точки дивизора $\imath D + \imath P$ с учетом кратности. Поскольку $V(x) + \phi(x)\widetilde{y}$ имеет полюс порядка $2g + 1$ на бесконечности, то разность дивизора нулей $V(x) + \phi(x)\widetilde{y}$ и дивизора $\imath D + \imath P$ — эффективный дивизор степени g. Рассмотрим функцию

$$F = \frac{V(x) + \phi(x)\widetilde{y}}{U(x)}$$

и дивизор E — дивизор нулей F. Порядок нуля F в ∞ равен 1, и F имеет дивизор полюсов, равный $D + P$. Откуда мы получаем, что дивизор $E = D + P - \infty + (F) \geqslant 0$ равен разности дивизора нулей $V(x) + \phi(x)y$ и дивизора $\imath D + \imath P$.

Предположим, что $Q \in \operatorname{Supp}(D)$. Тогда $\phi(x(Q)) \neq 0$ и $V(x(Q)) - \phi(x(Q))\widetilde{y}(Q) = 0$. Если $Q \in \operatorname{Supp}(E)$, то $V(x(Q)) + \phi(x(Q))\widetilde{y}(Q) = 0$. Откуда $V(x(Q)) = y(Q) = 0$, следовательно, Q — точка ветвления, то есть нуль $f(x)$. Аналогичным образом получаем, что если Q и $\imath Q$ принадлежат $\operatorname{Supp}(E)$, то $V(x(Q)) - \phi(x(Q))y(Q) = 0$ и $V(x(Q)) + \phi(x(Q))y(Q) = 0$. Отсюда $V(x(Q)) = \phi(x(Q))y(Q) = 0$ и Q — или точка ветвления, или $\pi(Q)$ — особая точка. В последнем случае кратность вхождения Q и $\imath Q$ в E равна $\nu_Q(g.c.d.(V(x), \phi(x)))$.

Для точки ветвления Q в случае $\pi(Q) \notin \mathcal{C}^s$ многочлен $V(x)$ не может аппроксимировать униформизующую кольца $\mathcal{O}_Q$ (которой является функция вида $\sqrt{(x - x(Q))}$) с точностью более чем первого порядка. Действительно, пусть $f(x) = (x - x(Q))\tilde{f}(x)$, и пусть $V(x)$ аппроксимирует y в точке Q, то есть $V(x) = \tilde{V}(x)(x - x(Q))$. Тогда

$$V(x) - y = \sqrt{x - x(Q)}(\tilde{V}(x)\sqrt{x - x(Q)} - \sqrt{\tilde{f}(x)}).$$

Поскольку выражение в скобках в точке Q равно $-\sqrt{\tilde{f}(x(Q))}$, получаем требуемое. Отсюда следует, что точки ветвления входят в дивизор E с кратностью не более чем 1. В случае, если $\pi(Q) \in \mathcal{C}^s$, то аналогичным образом получаем, что ее кратность в E не более чем $\nu_Q(g.c.d.(V(x), \phi(x))) + 1$.

Также заметим, что если $Q \in \operatorname{Supp} D$ — точка ветвления, то она не может входить в дивизор нулей F. Действительно, пусть $U(x) = \tilde{U}(x)(x - x(Q))$, тогда

$$F = \frac{V(x) + \phi(x)y}{U(x)} = \frac{\tilde{V}(x)\sqrt{x - x(Q)} + \sqrt{\tilde{f}(x)}}{\tilde{U}(x)\sqrt{x - x(Q)}}.$$

Откуда видно, что Q содержится в дивизоре полюсов F с кратностью 1. □

Лемма 4. *Пусть D — минимальный эффективный дивизор степени g, а P — $\overline{\mathbb{K}}$-точка, не являющаяся точкой ветвления, и такая, что $\imath P \notin \operatorname{Supp} D$. Тогда существует рациональная функция вида*

$$F = \frac{V(x) + \phi(x)\widetilde{y}}{U(x)},$$

такая что дивизор $E := D + 2(P - \infty) + (F) \geqslant 0$ имеет степень g и эффективен.

Доказательство. Доказательство повторяет предыдущую лемму, однако стоит сделать следующие замечания. Пусть $\infty \notin \operatorname{Supp} D$. Построим представление Мамфорда $(V(x), U(x), \overline{U}(x))$ дивизора $D + 2P$. Тогда $\deg U(x) = g + 2$ и $\deg V(x) \leqslant g + 1$. Если $\deg V(x) = g + 1$, то $\nu_\infty(V(x)+\phi(x)\widetilde{y}) = \nu_\infty(V(x)) = -(2g+2)$ и $\nu_\infty(F) = 2$. Если $\deg V(x) < g+1$, то $\deg \overline{U}(x) = \deg f - \deg U(x) = g-1$ и $\nu_\infty(V(x)+\phi(x)\widetilde{y}) = \nu_\infty(\phi(x)\widetilde{y}) = -(2g+1)$, откуда $\nu_\infty(F) = 3$. Отсюда E линейно эквивалентен эффективному дивизору вида $\overline{D}+\infty$, где $\overline{D}$ — минимален, $\infty \notin \operatorname{Supp} \overline{D}$. Остается последний случай, когда $D = D' + \infty$. В этом случае, как в лемме 3, мы строим тройку многочленов, входящих в представление Мамфорда дивизора $D' + 2P$. Тогда $\deg U(x) = g+1$ и $\deg V(x) \leqslant g$, $\nu_\infty(V(x)+\phi(x)\widetilde{y}) = \nu_\infty(y) = -(2g+1)$ и $\nu_\infty(F) = 1$. Тем самым, $D'+2P-\infty$ линейно эквивалентен эффективному дивизору степени g, не содержащему ∞ в своем носителе. □

Пусть D_0 — минимальный эффективный дивизор степени g, не содержащий $\imath P$ в носителе и $c_0 = 1$. Определим по индукции последовательность эффективных минимальных дивизоров D_k, чисел c_k, а также многочленов $\phi_k(x)$, $d_k(x)$, $V_k(x)$, $U_k(x)$. При этом $\phi_0(x) = \phi(x)$, $d_0(x) = 1$, а $V_0(x)$, $U_0(x)$ — многочлены Мамфорда, построенные по дивизору D_0. По индуктивному построению D_k — минимальный эффективный дивизор степени g, не содержащий в своем носителе точку $\imath P$. Определим D_{k+1}. Определим $\hat{U}_k(x)$ из равенства $U_k(x) = \hat{U}_k(x)(x-x(P))^{n_k}$.

$$\gamma_{k-1} := \frac{d_{k-2}(x)(\phi_{k-1}\sqrt{f(x)} + V_{k-1}(x))}{c_k d_{k-1}(x) U_k(x)(x-x(P))}. \tag{2}$$

Согласно лемме 2 существует единственный многочлен $\overline{V}_k$ степени не выше

$$\deg d_{k-1}U_k(x) + 1,$$

являющийся решением задачи аппроксимации

$$\overline{V}_k(x) = -d_{k-2}(x)V_{k-1}(x) \mod d_{k-1}(x)\widehat{U}_k(x)$$

$$\overline{V}_k(x) = d_{k-2}(x)\phi_{k-1}(x)\widetilde{y} \mod (x-x(P))^{n_P+2}.$$

Пусть $d_k(x) = g.c.d.(\phi_{k-1}, \overline{V}_k))$. Покажем, что d_k и d_{k-1} взаимно просты. В противном случае, $\overline{V}_k(x)$ и d_{k-1} не взаимно просты, откуда из первого условия аппроксимации d_{k-1} не взаимно прост с $d_{k-2}V_{k-1}$, что противоречит взаимной простоте многочлена d_{k-1} с d_{k-2} (по предположению индукции) и с V_{k-1} соответственно (по построению).

Положим $\phi_k = \phi_{k-1}d_{k-2}/d_k$ и $V_k = \phi_{k-1}/d_k$. Определим многочлен $U_{k+1}(x)$ со старшим коэффициентом 1 и константу $\tilde{c}_k$ из равенства

$$\phi_k(x)^2 f(x) - V_k(x)^2 = \tilde{c}_k U_k(x) U_{k+1}(x)(x-x(P))^2. \tag{3}$$

Положим $c_{k+1} := c_k^{-1}\tilde{c}_k$.

Рассуждая по индукции, получаем $d_{k-1}(x)d_k(x)\phi_k(x) = \phi(x)$. Положим

$$F_k := \frac{\phi_k(x)\widetilde{y} + V_k(x)}{U_k(x)(x-x(P))^2}.$$

Из взаимной простоты V_k с многочленами $d_{k-1}, d_k(x), \phi_k(x)$, получаем, что F_k обладает модулем $\mathfrak{m}$.

Поскольку $\deg \phi(x)^2 f(x) = 2g+1$, а степень $\deg V_k(x)^2$ четна и $\deg V_k(x) \leqslant g+1$, то возможны следующие случаи:

(I) $\deg V_k = g+1-\deg d_{k-1} - \deg d_k$ и $\deg U_k(x) = g - 2\deg d_{k-1}$ $\deg U_{k+1}(x) = g - 2\deg d_k$,

(II) $\deg V_k(x) \leqslant g - \deg d_{k-1} - \deg d_k$, $\deg U_k(x) = g - 2\deg d_{k-1}$, $\deg U_{k+1}(x) = g - 2\deg d_k - 1$,

(III) $\deg V_k(x) \leqslant g - \deg d_{k-1} - \deg d_k$, $\deg U_k(x) = g - 2\deg d_{k-1} - 1$, $\deg U_{k+1}(x) = g - 2\deg d_k$.

Так как D_k не содержит $\imath P$ в носителе, из условий аппроксимации и леммы 4 дивизор

$$E_k := (D_k + 2P - 2\infty) + (F_k)$$

является эффективным и не содержит P в носителе. Предположим, что E_k содержит $\imath P$ с кратностью n_{k+1}. Положим

$$D_{k+1} := E_k + n_{k+1}(P - \imath P).$$

В частности, используя соотношение $P + \imath P \sim_{\mathfrak{m}} 2\infty$ в классе линейной эквивалентности, имеем $D_{k+1} \sim_{\mathfrak{m}} D_k + 2(n_{k+1}+1)(P-\infty)$ и $\deg D_{k+1} = g - 2\deg d_k$. Имеет место равенство $U_{D_{k+1}}(x) = U_{k+1}(x) = U_{E_k}(x)$.

Замечание 1. *По дивизору D_{k+1} однозначно восстанавливается дивизор D_k. Действительно, n_{k+1} — кратность точки P в D_{k+1}. Тогда $E_k = D_{k+1} + n_{k+1}(\imath P - P)$ — минимальный дивизор не содержащий P в носителе, а D_k — единственный эффективный дивизор лежащий в классе $E_k + 2(\imath P - \infty)$ по отношению эквивалентности, определяемым модулем $\mathfrak{m}$.*

Докажем следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть $\beta = \beta_0$ иррациональность* (1) *из Теоремы 1, построенная по дивизору D_0, β_k — последовательность неполных частных разложения β в непрерывную дробь, а γ_k — последовательность* (2) *иррациональностей построенных по дивизору D_0. Предположим, что $d_k = 1$. Тогда имеют место равенства*

$$\beta_k = \gamma_k = \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))}, \tag{4}$$

$$\gamma_{k+1}(\gamma_k - [\gamma_k]) = 1, \tag{5}$$

$$[\gamma_k] = \frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))}, \tag{6}$$

$$\{\gamma_k\} = \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k(x)\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))}. \tag{7}$$

Доказательство. Предположим, что выполнены равенства (6) и (7). Пусть равенство $\beta_k = \gamma_k$ выполнено, покажем что оно выполнено для $k+1$. Для этого запишем (3) в виде

$$\frac{d_k(x)(\phi_{k+1}(x)\sqrt{f(x)} + V_{k+1}(x))}{\tilde{c}_{k+1} d_{k+1}(x) U_{k+2}(x)\pi} \cdot \frac{(d_{k-1}(x)\phi_k(x)\sqrt{f(x)} - d_{k+1}(x)V_{k+1}(x))}{d_k(x) U_{k+1}(x)\pi} = 1,$$

$$\begin{aligned}\frac{d_k(x)(\phi_{k+1}(x)\sqrt{f(x)} + V_{k+1}(x))}{c_{k+1} d_{k+1}(x) U_{k+2}(x)(x - x(P))} \Bigg(&\frac{d_{k-1}(x)(\phi_k(x)\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))} - \\ &- \frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))}\Bigg) = 1.\end{aligned} \tag{8}$$

Подставив в (8) равенства (6) и (7), получаем

$$\gamma_{k+1}(\gamma_k - [\gamma_k]) = 1,$$

откуда следует $\gamma_{k+1} = \beta_{k+1}$.

Покажем теперь равенства (6) и (7). Заметим, что

$$\deg U_{k+1} + \deg d_k + 1 \geqslant \max(\deg d_{k-1}V_k, \deg d_{k+1}V_{k+1}). \tag{9}$$

Действительно, неравенство может нарушиться только в случае (III). Но этому случаю может предшествовать только случай (II), откуда следует, что $\deg V_k(x) \leqslant g - \deg d_{k-1} - \deg d_k$.

Из условий апроксимации на $V_k(x)$ следует

$$\nu_P\left(\frac{\phi_{k+1}\sqrt{f(x)} - V_{k+1}(x)}{c_{k+1}U_{k+1}(x)(x-x(P))}\right) \geqslant 1,$$

тем самым, ряд Лорана по $\pi_P = x - x(P)$ этой квадратичной иррациональности, состоит только из членов положительной степени. Чтобы доказать, что этот ряд является дробной частью от β_k необходимо показать, что ряд по π_P выражения

$$\frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x-x(P))} = \beta_k - \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k(x)\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x-x(P))}$$

содержит только отрицательные члены по π_P в своем разложении.

По построению

$$d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x) = 0 \mod d_k(x)U_{k+1}(x).$$

В точке P имеем

$$d_{k-1}(x(P))V_k(x(P)) = d_{k-1}(x(P))\phi_k(x(P))\widetilde{y}(P) =$$
$$= d_{k+1}(x(P))\phi_{k+1}(x(P))\widetilde{y}(P) = d_{k+1}(x(P))V_{k+1}(x(P)) \neq 0.$$

Это означает, что

$$G(x) := \frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{d_k(x)\widehat{U}_{k+1}(x)}$$

является ненулевым многочленом над $\mathbb{K}$ степени не выше

$$\max(\deg d_{k-1}V_k(x), \deg d_{k+1}V_{k+1}(x)) - \deg \hat{U}_{k+1}(x) \leqslant n_{k+1} + 1.$$

Многочлен $G(x)$ имеет также степень $\deg G(x)$, если его рассматривать как многочлен от $x - x(P)$. Отсюда элемент $G(x)/(x - x(P))^{n_{k+1}+1}$, рассматриваемый как ряд по π_P, не имеет строго положительных степеней π_P в своем разложении. Более того, так как многочлен $G(x)$ не обращается в нуль в точке $x(P)$, то старшая степень ряда Лорана в точности равна $n_{k+1}+1$.

Из вышесказанного получаем

$$[\gamma_k] = \frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x-x(P))},$$

$$\{\gamma_k\} = \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k(x)\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x-x(P))}.$$

□

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство. [Доказательство теоремы 1] Предположим, что разложение в непрерывную дробь квадратичной иррациональности β квазипериодично. Согласно предложению 1, каждому шагу разложения β в непрерывную дробь соответствуют следующие данные: дивизор D_k линейно эквивалентный $D_0 + 2i_k(P - \infty)$ (где $i_1, i_2, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел), последовательность многочленов $V_k(x), U_k(x), U_{k+1}(x)$ и последовательность квадратичных иррациональностей

$$\beta_k = \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x-x(P))}.$$

Квазипериодичность непрерывной дроби влечет равенство $\beta_k = c\beta_l$ для некоторых $k \neq l$ и константы $c \neq 0$. Отсюда следует совпадение $d_{k-1}(x)/d_k(x)$ и $d_{l-1}(x)/d_l(x)$ равенство пар $(V_k(x), U_{k+1}(x)) = (V_l(x), U_{l+1}(x))$, и соответствующее равенство дивизоров $D_k = D_l$. Поскольку D_k линейно эквивалентен $D_0 + 2i_k(P - \infty)$, а D_l линейно эквивалентен $D_0 + 2i_l(P - \infty)$, отсюда следует, что дивизор $2(i_k - i_l)(P - \infty)$ линейно эквивалентен нулю.

Пусть теперь точка $(P - \infty)$ на якобиане кривой $\mathcal{C}$ имеет конечный порядок M. Заметим, что d_k являются делителями $\phi(x)$, в частности, рациональных функций $d_{k-1}(x)/d_k(x)$ — конечное число, и значит найдется бесконечное число квадратичных иррациональностей β_{k_i} с одинаковыми отношениями $d_{k_i-1}(x)/d_{k_i}(x)$. Снова рассмотрим последовательность дивизоров D_{k_i} линейно эквивалентных $D_0 + 2l_i(P - \infty)$, соответствующих по предложению 1 неполным частным β_{k_i}. Для бесконечной последовательности дивизоров $D_0 + 2l_i(P - \infty)$ найдутся два номера $i < j$, для которых $l_i = l_j \mod M$. Это влечет $D_{k_i} - D_{k_j} \sim_{\mathfrak{m}} D_0 + l_i(P - \infty) - D_0 - l_j(P - \infty) \sim_{\mathfrak{m}} 0$

Поскольку размерность линейной системы минимального эффективного дивизора степени не выше g равна 1, то $D_{k_i} = D_{k_j}$. Из равенства дивизоров следует равенство соответствующих многочленов Мамфорда, и соответствующее равенство $\beta_{k_i} = c\beta_{k_j}$, откуда следует квазипериодичность. $\square$

5. Свойства квазипериода непрерывной дроби

Предложение 2. *В предположениях предложения 1 пусть $D_k = \widehat{D}_k + n_k P$ — последовательность дивизоров, соответствующая разложению в непрерывную дробь. Предположим, что для некоторого l выполнено $D_l = \imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$, а также выполнены равенства $d_k = d_{l-1}$ и $d_{k-1} = d_l$. Тогда выполнена симметрия для дивизоров*

$$D_{l+i} = \imath\widehat{D}_{k-i+1} + n_{k-i+1}P$$

и квазисимметрия неполных частных разложения в непрерывную дробь

$$[\beta_{l+i}] = [\beta_{k-i-1}]c^{(-1)^i}.$$

Если $l - k$ — четно то разложение в непрерывную дробь симметрично, тогда и только тогда, когда $\widehat{D}_{(k+l)/2}$ состоит из точек ветвления, не принадлежащих $\pi^{-1}(\mathcal{C}^s)$, и входящих с кратностью не более чем 1, и выпонено равенство $d_{(k+l)/2+1} = d_{(k+l)/2-1}$.

Доказательство. Разложению в непрерывную дробь соответствует последовательность дивизоров $D_k = \widehat{D}_k + n_k P$, $E_k = \widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}\imath P$, а также последовательность многочленов Мамфорда $(V_k(x), \hat{U}_k(x)(x - x(P))^{n_k+2}, \hat{U}_{k+1}(x)(x - x(P))^{n_{k+1}})$ для дивизоров $D_k + 2P$.

Поскольку функция

$$F_k = \frac{V_k(x) + \phi_k(x)\widetilde{y}}{U_k(x)(x - x(P))^2}$$

имеет дивизор нулей E_k и дивизор полюсов $D_k + 2P$, то многочлен $V_k(x)$ является решением следующей задачи аппроксимации:

$$V_k + \phi_k\widetilde{y} = 0 \mod \hat{U}_{k+1}(x),$$

$$V_k - \phi_k\widetilde{y} = 0 \mod (x - x(P))^{n_k+n_{k+1}+2}.$$

Последнее сравнение следует из того, что $U_k(x)(x - x(P))^2$ имеет нуль в точке $\imath P$ порядка $n_k + 2$, а F_k имеет нуль в точке $\imath P$ порядка n_{k+1}. Отсюда следует, что пару многочленов $(V_k(x), \hat{U}_{k+1}(x)(x - x(P))^{n_{k+1}+2})$ можно рассматривать как решение задачи аппроксимации для сложения дивизоров $\imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$ и $2P$, результатом которого является дивизор $\imath\widehat{D}_k + n_k\imath P$.

Предположим, что для некоторого l выполнено $D_l = \imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$ (если $l = k+1$, это условие совпадает с условием на $\widehat{D}_l$ из второй части предложения). Из равенств $d_k = d_{l-1}$ и $d_{k-1} = d_l$ следует, что $\phi_k = \phi/(d_k d_{k-1}) = \phi/(d_{l-1}d_l) = \phi_l$. Тогда шагу l разложения в непрерывную дробь соответствуют дивизоры $D_l = \imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$, $E_l = \imath\widehat{D}_k + n_k\imath P$, $D_{l+1} = \imath\widehat{D}_k + n_kP$, Многочлены Мамфорда дивизоров D_l и D_{l+1} равны соответственно $(V_k(x), \hat{U}_{k+1}(x)(x-x(P))^{n_k})$ и $(V_{k-1}(x), \hat{U}_k(x)(x-x(P))^{n_{k+1}})$. Отсюда, получаем следующие равенства

$$D_{l+1} = \imath\widehat{D}_k + n_kP,$$

$$\beta_l = \frac{d_k(\phi_k\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{cd_{k-1}U_k(x)(x-x(P))},$$

$$[\beta_l] = \frac{d_kV_k(x) + d_{k-2}V_{k-1}(x)}{cd_{k-1}U_k(x)(x-x(P))} = \frac{[\beta_{k-1}]}{c}.$$

Отсюда следует, равенство $D_{l+i} = \imath\widehat{D}_{k-i+1} + n_{k-i+1}P$ и квазисимметрия неполных частных разложения в непрерывную дробь, то есть $[\beta_{l+i}] = [\beta_{k-i-1}]c^{(-1)^i}$. Таким образом, совпадение $D_l = \imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$ приводит к симметрии разложения в непрерывную дробь.

Наличие симметрии для разложения в непрерывную дробь в случае четного $l-k$ влечет равенство

$$\widehat{D}_k + n_kP = D_k = \imath\widehat{D}_k + n_kP,$$

которое выполняется, если и только если дивизор $\widehat{D}_k$ состоит из точек ветвления, входящих с кратностью не более чем 1 и не проецирующие в особые точки $\mathcal{C}$. Что доказывает вторую часть предложения. □

6. Заключение

Используя законы сложения дивизоров Картье на особой гиперэллиптической кривой, нам удалось обобщить результаты работы [6] на более общий класс квадратичных иррациональностей, чем тот, что рассматривался в указанной работе. А именно, мы получаем доказательство теоремы об эквивалентности условия квазипериодичности непрерывной дроби квадратичной иррациональности и условия конечности порядка точки $P - \infty$ на якобиане нормализации кривой $\mathcal{C}$. Что касается оценки на квазипериод, то можно получить аналогичные результаты, однако они будут несколько хуже, из-за наличия дополнительных множителей в разложении в непрерывную дробь, которые являются делителями многочлена $h(x)$. Что касается необходимых и достаточных условий для квазисимметричности разложения в непрерывную дробь, то здесь мы получили критерии, которые аналогичны критериям, полученным в работе [6] (см. Предложение 3 [6]), тем не менее, непостредственного аналога наиболее простого критерия, указанного в Теореме 3 работы [6], по-видимому, не существует.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях, Мир, Москва, 1988.

2. Серр Ж. П. Алгебраические группы и поля классов, Мир, Москва, 1968.

3. Artin E. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I // Math. Z. 1924. T. 171. №19:1. С. 153-246.

4. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Математический сборник. 2009. Т. 200. №11. С. 15-44.

5. Berry T. G. On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields // Arch Math. 1990. T. 55. C. 259-266.

6. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и представление Мамфорда // Доклады РАН. 2016. Т.471. №6 С. 640–644.

7. В. П. Платонов, Г. В. Федоров, S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Доклады РАН. 2015. Т.465. №5 С. 537–541.

8. Rosenlicht M. Generalized Jacobian varieties // Ann. of Math. 1954. T. 59. №3. C. 505–530.

9. Rosenlicht M. Equivalence relations on algebraic curves // Ann. of Math. 1952. T. 56. №2. C. 169–191.

10. Хартсхорн, Р. Алгебраическая геометрия, Мир, Москва, 1981.

11. Платонов В. П., Жгун В. С., Петрунин М. М. К вопросу о простоте якобианов кривых рода 2 над полем рациональных чисел с точками кручения больших порядков // Доклады РАН. 2013. Т. 450. №4. С. 385–388.

12. Платонов В. П. Арифметика квадратичных полей и кручение в якобианах // Доклады РАН. 2010. Т. 430. №3. С. 318–320.

13. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69:1. №415. С. 3–38.

14. Платонов В. П., Петрунин М.М. Новые порядки точек кручения в якобиа- нах кривых рода 2 над полем рациональных чисел // Доклады РАН. 2012. Т. 443. №6. С. 664–667.

15. Платонов В. П., Петрунин М. М. О проблеме кручения в якобианах кривых рода 2 над полем рациональных чисел // Доклады РАН. 2012. Т. 446. №3. С. 263-264.

REFERENCES

1. Benyash–Krivets, V. V., Platonov, V. P. 2009, “Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions”, Sb. Math, vol. 200, no. 11, pp. 1587-1615.

2. Mumford, D 1983, Tata Lectures on Theta I. Birkhauser, Boston.

3. Serre, Jean-Pierre 1988, Algebraic groups and class fields, Springer-Verlag, New York.

4. Artin, E., 1924, “Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I”, Math. Z., vol. 19, no. 1, pp. 153-246.

5. Berry, T. G., 1990, “On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields”, Arch Math. vol.55, pp. 259-266.

6. Platonov, V. S., Fedorov, G.V., 2016, “Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation”, Doklady Mathematics, vol. 94, no. 3, pp. 692–696.

7. Platonov, V. P., Zhgoon, V. S., Fedorov, G. V., 2015, “S-units and periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, Doklady Mathematics, vol. 92, no. 3, pp. 752–756.

8. Rosenlicht M., 1954, “Generalized Jacobian varieties”, Ann. of Math., 59, 3, pp. 505–530.

9. Rosenlicht M., 1952, “Equivalence relations on algebraic curves” , Ann. of Math. 56, 2, pp. 169–191.

10. Hartshorne R., 1977, “Algebraic geometry” , Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

11. Platonov, V. P., Zhgun V. S., Petrunin M. M., 2013 “On the simplicity of Jacobians for hyperelliptic curves of genus 2 over the field of rational numbers with torsion points of high order”, Dokl. Math, 450, 4, pp. 385–388

12. Platonov, V. P. 2010, “Arithmetic of quadratic fields and torsion in Jacobians” , Dokl. Math, 81, 1, pp. 55–57

13. Platonov, V. P. 2014, “Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field” , Russian Math. Surveys 69, 1, pp. 1–34.

14. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2012, “New orders of torsion points in Jacobians of curves of genus 2 over the rational number field” , Dokl. Math, 85, 2, pp. 286–288.

15. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2012, “On the torsion problem in jacobians of curves of genus 2 over the rational number field” , Dokl. Math, 86, 2, pp. 642–643.

ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований
Российской академии наук (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»