

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.331

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-167-186

О ДРОБНЫХ МОМЕНТАХ УСПОКОЕННЫХ
 L -ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

С. А. Гриценко (г. Москва)

Аннотация

Пусть $\chi_1(n)$ — характер Дирихле по модулю 5 такой, что $\chi_1(2) = i$,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}.$$

Функцией Дэвенпорта–Хейльбронна называется функция

$$f(s) = \frac{1 - i\varkappa}{2} L(s, \chi_1) + \frac{1 + i\varkappa}{2} L(s, \bar{\chi}_1).$$

Функция $f(s)$ была введена и исследована Дэвенпортом и Хейльбронном в 1936 году. Она удовлетворяет функциональному уравнению риманого типа

$$g(s) = g(1 - s),$$

где $g(s) = (\frac{\pi}{5})^{-s/2} \Gamma(\frac{1+s}{2}) f(s)$.

Известно однако, что не все нетривиальные нули $f(s)$ лежат на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$.

В области $\Re s > 1$, $0 < \Im s \leq T$ число нулей $f(s)$ превосходит cT , где $c > 0$ — абсолютная постоянная (Дэвенпорт и Хейльбронн, 1936 г.).

Кроме того, число нулей $f(s)$ в области $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \Re s < \sigma_2$, $0 < \Im s \leq T$ превосходит $c_1 T$, где $c_1 > 0$ — абсолютная постоянная (С. М. Воронин, 1976).

В 1980 г. С. М. Воронин доказал, что на критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$ лежит «аномально много» нулей $f(s)$. Пусть $N_{0,f}(T)$ — число нулей $f(s)$ на промежутке $\Re s = \frac{1}{2}$, $0 < \Im s \leq T$. С. М. Воронин получил оценку

$$N_{0,f}(T) > c_2 T \exp\left\{\frac{1}{20} \sqrt{\log \log \log \log T}\right\},$$

где $c_2 > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1990 году А. А. Карацуба коренным образом усилил оценку С. М. Воронина и получил неравенство

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая постоянная, $T > T_0(\varepsilon) > 0$.

В 1994 году А. А. Карацуба получил несколько более точную оценку

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2} \exp\{-c_3 \sqrt{\log \log T}\},$$

где $c_3 > 0$ — абсолютная постоянная.

В 2017 году автор получил следующую оценку

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/16-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

В настоящей статье получены новые верхние и нижние оценки дробных моментов успокоенных рядов Дирихле, из которых следует, что

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/12-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

Ключевые слова: функция Дэвенпорта–Хейльбронна, нули на критической прямой, дробные моменты успокоенных рядов Дирихле.

Библиография: 14 названий.

ON FRACTIONAL MOMENTS OF THE MOLLIFIED DIRICHLET L -FUNCTIONS

S. A. Gritsenko (Moscow)

Abstract

Let $\chi_1(n)$ be the character of Dirichlet mod 5 such that $\chi_1(2) = i$,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}.$$

Davenport–Heilbronn function is defined below

$$f(s) = \frac{1 - i\varkappa}{2}L(s, \chi_1) + \frac{1 + i\varkappa}{2}L(s, \bar{\chi}_1).$$

The function $f(s)$ was introduced and investigated by Davenport and Heilbronn, in 1936. It satisfies the functional equation of Riemann's type

$$g(s) = g(1 - s),$$

where $g(s) = (\frac{\pi}{5})^{-s/2}\Gamma(\frac{1+s}{2})f(s)$.

It is well-known however, that not all non-trivial zeros of $f(s)$ lie on the line $\Re s = \frac{1}{2}$.

In the region $\Re s > 1$, $0 < \Im s \leq T$ the number of zeros of $f(s)$ exceeds cT , where $c > 0$ is an absolute constant (Davenport and Heilbronn, 1936).

Moreover, the number of zeros of $f(s)$ in the region $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \Re s < \sigma_2$, $0 < \Im s \leq T$ exceeds c_1T , where $c > 0$ is an absolute constant (S. M. Voronin, 1976).

In 1980, S. M. Voronin proved that «abnormally many» zeros of $f(s)$ lied on the critical line $\Re s = \frac{1}{2}$. Let $N_{0,f}(T)$ be the number of zeros of $f(s)$ on the segment $\Re s = \frac{1}{2}$, $0 < \Im s \leq T$. S. M. Voronin got the estimate

$$N_{0,f}(T) > c_2T \exp\left\{\frac{1}{20}\sqrt{\log \log \log \log T}\right\},$$

where $c_2 > 0$ is an absolute constant.

In 1990, A. A. Karatsuba significantly improved Voronin's estimate and got the inequality

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2-\varepsilon},$$

where $\varepsilon > 0$ is an arbitrary small constant, $T > T_0(\varepsilon) > 0$.

In 1994, A. A. Karatsuba got somewhat more accurate estimate

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2} \exp\{-c_3\sqrt{\log \log T}\},$$

where $c_3 > 0$ is an absolute constant.

In 2017, the author got the following estimate

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/16-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

In this paper we obtain new upper and lower estimates of the fractional moments of mollified Dirichlet series, from which it follows that

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/12-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

Keywords: Davenport–Heilbronn function, zeroes on the critical line, fractional moments of mollified moments of Dirichlet series.

Bibliography: 14 titles.

1. Введение

Пусть $\chi(n)$ — характер Дирихле, $L(s, \chi)$ — соответствующая L -функция Дирихле. Знаменитая расширенная гипотеза Римана утверждает, что все нетривиальные нули $L(s, \chi)$ лежат на критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$.

Если модуль характера $\chi(n)$ ограничен константой, то современные результаты о распределении нулей $L(s, \chi)$ на критической прямой по своей силе совпадают с соответствующими результатами о нулях $\zeta(s)$.

Пусть $N_0(T)$ — число нулей $\zeta(s)$ на отрезке $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + iT]$.

В 1921 году [1] Г. Харди и Дж. Литтлвуд доказали неравенство

$$N_0(T) \gg T. \quad (1)$$

В 1942 году [2] А. Сельберг получил правильную по порядку оценку для $N_0(T)$:

$$N_0(T) \gg T \log T. \quad (2)$$

Сельбергу принадлежит идея введения так называемого "успокаивающего множителя" ("mollifying factor"). Под успокоением здесь понимается понижение порядка роста моментов рядов Дирихле после умножения этих рядов на соответствующие успокаивающие множители.

В 2002 году А. А. Карацуба [3] нашел приложение оценок дробных моментов дзета-функции на критической прямой к задаче об оценке $N_0(T)$ и получил оценку, более точную, чем (1), хотя и менее точную, чем (2). В статье [3] использовались оценки моментов неуспокоенной дзета-функции.

В 2017 году автор [4], правильно по порядку оценив сверху и снизу момент успокоенной функции Дэвенпорта–Хейльбронна порядка $1/2$, а также сверху момент той же функции порядка 1, доказал, что число нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на отрезке $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + iT]$, можно оценить снизу величиной

$$T(\log T)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \varepsilon}, \quad (3)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Оценка (3) получена на основе метода А. А. Карацубы (см. [5]–[10]) с добавлением некоторых дополнительных соображений.

В настоящей статье содержатся оценки моментов успокоенных L -функций Дирихле порядков $\frac{2}{v}$ для любых натуральных $v \geq 3$, а также порядка 1.

Введем некоторые определения.

Пусть χ_1 — характер по модулю 5 такой, что $\chi_1(2) = i$.

Пусть ε — сколь угодно малое положительное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $X = T^{0.001\varepsilon}$. Пусть $\alpha(\nu)$ — последовательность, задаваемая равенством

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p \equiv \pm 1 \pmod{5}} \left(1 - \frac{1}{2vp^s}\right) \prod_{p \equiv \pm 2 \pmod{5}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{p^s}\right), \quad \Re s > 1.$$

Пусть

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\chi_1(\nu)\left(1 - \frac{\log \nu}{\log X}\right), & \text{если } 1 \leq \nu < X, \\ 0, & \text{если } \nu \geq X. \end{cases}$$

Тогда наш успокаивающий множитель имеет вид $|\varphi(\frac{1}{2} + it)|^{2v}$, где

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{\nu} \frac{\beta(\nu)}{\nu^{\frac{1}{2} + it}}.$$

Сформулируем основную теорему статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть v — натуральное число, $v \geq 3$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} T(\log T)^{(1+2v\varepsilon)^2/(2v^2)} &\ll \int_T^{2T} |L(\tfrac{1}{2} + it, \bar{\chi}_1) \varphi^{2v}(\tfrac{1}{2} + it)|^{2/v} dt \ll T(\log T)^{(1+2v\varepsilon)^2/(2v^2)}, \\ \int_T^{2T} |L(\tfrac{1}{2} + it, \chi_1) \varphi^{2v}(\tfrac{1}{2} + it)|^{2/v} dt &\ll T(\log T)^{(1-2v\varepsilon)^2/(2v^2)}, \\ \int_T^{2T} |L(\tfrac{1}{2} + it, \bar{\chi}_1) \varphi^{2v}(\tfrac{1}{2} + it)| dt &\ll T(\log T)^{(1+2v\varepsilon)^2/8}, \\ \int_T^{2T} |L(\tfrac{1}{2} + it, \chi_1) \varphi^{2v}(\tfrac{1}{2} + it)| dt &\ll T(\log T)^{(1-2v\varepsilon)^2/8}. \end{aligned}$$

Отметим, что если воспользоваться теоремой 1, то рассуждения по схеме [4] приводят к оценке числа нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на отрезке $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + iT]$, величиной

$$T(\log T)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \varepsilon},$$

что уточняет оценку (3).

В статье будут использованы следующие обозначения: $Y = T^{3/4}$; $\chi(n)$ — один из характеров $\chi_1(n)$, $\bar{\chi}_1(n)$; M_d — множество натуральных чисел, состоящее из 1 и тех чисел, простые делители которых делят d ; при $k > 0$ последовательность $d_k(\nu)$ задается равенством

$$\zeta^k(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_k(\nu)}{\nu^s}, \quad \Re s > 1.$$

2. Основные леммы

ЛЕММА 1. Пусть $2\sigma = 1 + \frac{C}{\log T} = 1 + b$,

$$\begin{aligned} a_{1,1/v}(\lambda, \chi) &= \sum_{n\nu_1\nu_2=\lambda} d_{1/v}(n) \chi(n) \beta(\nu_1) \beta(\nu_2), \\ a_{2,1/v}(\lambda, \chi) &= \sum_{n\nu_1\nu_2=\lambda} d_{1/v}(n) \chi(n) \beta(\nu_1) \beta(\nu_2) (\nu_1\nu_2)^{(2\sigma-1)}, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{l,1/v}(2\sigma, \chi, Y) = \sum_{\lambda \leq Y} \frac{|a_{l,1/v}(\lambda, \chi)|^2}{\lambda^{2\sigma}}, \quad l = 1, 2.$$

Существует $C_0 = C_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых $C > C_0$ справедливы неравенства

$$\Sigma_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1, Y) \gg (2\sigma - 1)^{-\frac{(1+2\varepsilon)^2}{2v^2}} \quad (l = 1, 2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\Sigma_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1, Y)$ снизу. Имеем

$$\Sigma_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1, Y) \geq \sum'_{\lambda \leq Y} \frac{|a_{l,1/v}(\lambda, \bar{\chi}_1)|^2}{\lambda^{2\sigma}},$$

где штрих означает, что суммирование ведется по таким $\lambda = n\nu_1\nu_2$, у которых n — бесквадратные. Далее,

$$\Sigma_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1, Y) \geq \sum'_{\lambda \leq Y} \frac{|a_{l,1/v}(\lambda, \bar{\chi}_1)|^2}{\lambda^{2\sigma}} (1 - (\frac{\lambda}{Y})^{b/2}) \geq \Sigma'_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1) - Y^{-b/2} \Sigma'_{l,1/v}(2\sigma_1, \bar{\chi}_1),$$

где $2\sigma_1 = 1 + \frac{b}{2}$,

$$\Sigma'_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1) = \sum'_{\lambda=1}^{\infty} \frac{|a_{l,1/v}(\lambda, \bar{\chi}_1)|^2}{\lambda^{2\sigma}}.$$

Пусть сначала $l = 1$. Оценим $\Sigma'_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1)$ снизу. Начнем с тождественных преобразований:

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\overline{\beta(\nu_3)}\overline{\beta(\nu_4)}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^\sigma} \sum'_{n_1\nu_1\nu_2=n_2\nu_3\nu_4} \frac{d_{1/v}(n_1)\bar{\chi}_1(n_1)d_{1/v}(n_2)\chi_1(n_2)}{(n_1n_2)^\sigma}.$$

Поскольку числа $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, n_1, n_2$ — бесквадратные, то из равенства $n_1\nu_1\nu_2 = n_2\nu_3\nu_4$ следует, что $(\nu_1, \nu_2) = (\nu_3, \nu_4)$, поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma'_{1,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1) &= \sum_u \frac{1}{u^{4\sigma}} \sum_{(\mu_1, \mu_2)=1} \frac{\beta(u\mu_1)\beta(u\mu_2)}{(\mu_1\mu_2)^\sigma} \sum_{(\mu_3, \mu_4)=1} \frac{\overline{\beta(u\mu_3)}\overline{\beta(u\mu_4)}}{(\mu_1\mu_2)^\sigma} \\ &\quad \sum'_{n_1\mu_1\mu_2=n_2\mu_3\mu_4} \frac{d_{1/v}(n_1)\bar{\chi}_1(n_1)d_{1/v}(n_2)\chi_1(n_2)}{(n_1n_2)^\sigma}. \end{aligned}$$

Пусть $q = (\mu_1\mu_2, \mu_3\mu_4)$, $\mu_1\mu_2 = aq$, $\mu_3\mu_4 = bq$, $(a, b) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum'_{n_1\mu_1\mu_2=n_2\mu_3\mu_4} \frac{d_{1/v}(n_1)\bar{\chi}_1(n_1)d_{1/v}(n_2)\chi_1(n_2)}{(n_1n_2)^\sigma} &= \frac{\chi_1(a)\bar{\chi}_1(b)}{(ab)^\sigma} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, 5ab)=1}}^{\infty} \frac{d_{1/v}^2(m)\mu^2(m)}{m^{2\sigma}} = \\ &= c_5 \prod_p (1 + \frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}}) \frac{d_{1/v}(\mu_1)\chi_1(\mu_1)g(\mu_1)d_{1/v}(\mu_2)\chi_1(\mu_2)g(\mu_2)}{(\mu_1\mu_2)^\sigma} \times \\ &\quad \times \frac{d_{1/v}(\mu_3)\bar{\chi}_1(\mu_3)g(\mu_3)d_{1/v}(\mu_4)\bar{\chi}_1(\mu_4)g(\mu_4)}{(\mu_3\mu_4)^\sigma} \frac{q^{2\sigma}}{d_{1/v}^2(q)g^2(q)}, \end{aligned}$$

где $c_5 = (1 + \frac{d_{1/v}^2(5)}{5^{2\sigma}})^{-1}$, $g(\nu) = \prod_{p|\nu} (1 + \frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}})^{-1}$.

Согласно формуле обращения Мебиуса имеем

$$\frac{q^{2\sigma}}{d_{1/v}^2(q)g^2(q)} = \sum_{d|q} \gamma(d), \quad \gamma(d) = \frac{d^{2\sigma}}{d_{1/v}^2(d)g^2(d)} \prod_{p|d} (1 - \frac{d_{1/v}^2(p)g^2(p)}{p^{2\sigma}}).$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1) \geq c_5 \prod_p (1 + \frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}}) \sum_{d \leq X^{0.1}} \frac{d^{2\sigma}}{d_{1/v}^2(d)g^2(d)} \frac{\varphi(d)}{d} |V_{1,1/v,d}(2\sigma, \chi_1)|^2,$$

где

$$V_{1,1/v,d}(2\sigma, \chi_1) = \sum_{\substack{(\mu_1, \mu_2)=1 \\ \mu_1\mu_2 \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{\beta(\mu_1)d_{1/v}(\mu_1)\chi_1(\mu_1)g(\mu_1)}{\mu_1^{2\sigma}} \frac{\beta(\mu_2)d_{1/v}(\mu_2)\chi_1(\mu_2)g(\mu_2)}{\mu_2^{2\sigma}}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 V_{1,1/v,d}(2\sigma, \chi_1) &= \frac{\chi_1(d)d_{1/v}(d)g(d)}{d^{2\sigma}} \sum_{d_1 d_2 = d} \sum_{\substack{(\nu_1, \nu_2)=1 \\ (v_1, d)=1 \\ (\nu_2, d)=1}} \frac{\beta(d_1 \nu_1) d_{1/v}(\nu_1) \chi_1(\nu_1) g(\nu_1)}{\nu_1^{2\sigma}} \times \\
 &\times \frac{\beta(d_2 \nu_2) d_{1/v}(\nu_2) \chi_1(\nu_2) g(\nu_2)}{\nu_2^{2\sigma}} = \frac{\chi_1(d)d_{1/v}(d)g(d)}{d^{2\sigma}} \sum_{d_1 d_2 = d} \sum_{(\nu_1, d)=1} \frac{\beta(d_1 \nu_1) d_{1/v}(\nu_1) \chi_1(\nu_1) g(\nu_1)}{\nu_1^{2\sigma}} \times \\
 &\times \sum_{(\nu_2, d)=1} \frac{\beta(d_2 \nu_2) d_{1/v}(\nu_2) \chi_1(\nu_2) g(\nu_2)}{\nu_2^{2\sigma}} \sum_{r | (\nu_1, \nu_2)} \mu(r) = \\
 &= \frac{\chi_1(d)d_{1/v}(d)g(d)}{d^{2\sigma}} \sum_{d_1 d_2 = d} \sum_{(r, d)=1} \mu(r) \frac{\chi_1^2(r) d_{1/v}^2(r) g^2(r)}{r^{4\sigma}} \sum_{(\mu_1, d)=1} \frac{\beta(r d_1 \mu_1) d_{1/v}(\mu_1) \chi_1(\mu_1) g(\mu_1)}{\mu_1^{2\sigma}} \times \\
 &\times \sum_{(\mu_2, d)=1} \frac{\beta(r d_2 \mu_2) d_{1/v}(\mu_2) \chi_1(\mu_2) g(\mu_2)}{\mu_2^{2\sigma}}.
 \end{aligned}$$

Оценивая сумму по $r > X^{0.1}$ тривиально, получаем

$$\begin{aligned}
 V_{1,1/v,d}(2\sigma, \chi_1) &\geq \frac{\chi_1(d)d_{1/v}(d)g(d)\alpha(d)}{d^{2\sigma} \log^2 X} \sum_{d_1 d_2 = d} \sum_{\substack{r \leq X^{0.1} \\ (r, d)=1}} \mu(r) \frac{\chi_1^2(r) d_{1/v}^2(r) g^2(r) \alpha^2(r)}{r^{4\sigma}} \times \\
 &\times K_{1/v, x_1}(2\sigma, \chi_2) K_{1/v, x_2}(2\sigma, \chi_2) + O\left(\frac{d_{1/v}(d)g(d)|\alpha(d)|}{d^{2\sigma}} X^{-0.05}\right),
 \end{aligned}$$

где $x_j = \frac{X}{rd_j}$, ($j = 1, 2$),

$$K_{1/v, x_j}(2\sigma, \chi_2) = \sum_{\substack{\mu < x_j \\ (\mu, rd_j)=1}} \frac{\alpha(\mu) \chi_2(\mu) d_{1/v}(\mu) g(\mu)}{\mu^{2\sigma}} \log \frac{x_j}{\mu},$$

$\chi_2(\nu) = \left(\frac{\nu}{5}\right)$ — символ Лежандра по модулю 5.

Отметим, что поскольку $r \leq X^{0.1}$, $d_j \leq d \leq X^{0.1}$, то $x_j \geq X^{0.8}$. Наша ближайшая задача — показать, что $K_{1/v, x_j}(2\sigma, \chi_2)$ ($j = 1, 2$) — положительные числа и оценить их снизу равномерно по r и d_j . Пусть x — любое из чисел x_1, x_2 , $D = X/(xr)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 K_{1/v, x}(2\sigma, \chi_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_{\bar{\chi}_1}(2\sigma + s) m_{rD}(2\sigma + s) \frac{x^s}{s^2} ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_{\bar{\chi}_1}(1+w) m_{rD}(1+w) \frac{x^{-b} x^w}{(w-b)^2} dw,
 \end{aligned}$$

где

$$F_{\bar{\chi}_1}(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\mu) \chi_2(\mu) d_{1/v}(\mu) g(\mu)}{\mu^z}, \quad m_c(z) = \prod_{p|c} \left(1 + \frac{\alpha(p) \chi_2(p) d_{1/v}(p) g(p)}{p^z}\right)^{-1} \quad (\Re z > 1).$$

Для функции $F_{\bar{\chi}_1}(1+w)$ получим аналитическое представление, позволяющее продолжить ее в некоторую часть полуплоскости $\Re w < 0$. Имеем

$$\ln F_{\bar{\chi}_1}(1+w) = -\frac{1}{2v^2} \sum_{p \equiv \pm 1 \pmod{5}} \frac{1}{p^{1+w}} + \frac{\varepsilon}{v} \sum_{p \equiv \pm 2 \pmod{5}} \frac{1}{p^{1+w}} + H_1(1+w)$$

(здесь и далее через $H_1(1+w)$, $H_2(1+w)$, ... будем обозначать функции, регулярные и ограниченные в полуплоскости $\Re w \geq -1/4$).

Поскольку

$$\sum_{p \equiv \pm 1 \pmod{5}} \frac{1}{p^{1+w}} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^{1+w}} + \frac{1}{2} \sum_p \frac{\chi_2(p)}{p^{1+w}} - \frac{1}{2} 5^{-1-w},$$

$$\sum_{p \equiv \pm 2 \pmod{5}} \frac{1}{p^{1+w}} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^{1+w}} - \frac{1}{2} \sum_p \frac{\chi_2(p)}{p^{1+w}} - \frac{1}{2} 5^{-1-w},$$

получаем

$$\ln F_{\bar{\chi}_1}(1+w) = -k_1 \ln \zeta(1+w) - k_2 \ln L(1+w, \chi_2) + H_2(1+w),$$

где

$$k_1 = \frac{1}{4v^2} - \frac{\varepsilon}{2v}, \quad k_2 = \frac{1}{4v^2} + \frac{\varepsilon}{2v}.$$

Таким образом, при $\Re w > 0$

$$F_{\bar{\chi}_1}(1+w) = \zeta(1+w)^{-k_1} L(1+w, \chi_2)^{-k_2} e^{H_2(1+w)}. \quad (4)$$

Отметим, что аналогично выводится формула

$$F_{\chi_1}(1+w) = \zeta(1+w)^{-k_2} L(1+w, \chi_2)^{-k_1} e^{H_3(1+w)}. \quad (5)$$

Пусть $c = rD$. Рассмотрим функцию $m_c(1+w)$. Имеем

$$\begin{aligned} \ln m_c(1+w) &= - \sum_{p|c} \frac{\alpha(p)\chi_2(p)g(p)}{p} e^{-w \ln p} + H_4(1+w) = \\ &= - \sum_{p|c} \frac{\alpha(p)\chi_2(p)g(p)}{p} + O\left(|w| \sum_{p|c} \frac{1}{p} \ln p\right) + H_4(1+w) = \\ &= \ln m_c(1) + O\left(|w| \sum_{p|d} \frac{\ln p}{p}\right) + H_4(1+w) - H_4(1). \end{aligned}$$

Пусть $c = p_1 \dots p_t$, $q_1, q_2, \dots$ — первые простые числа, занумерованные по возрастанию. Тогда

$$\sum_{p|c} \frac{\ln p}{p} \leq \sum_{p \leq q_t} \frac{\ln p}{p} = \ln q_t + O(1) \ll \ln t + 1 \ll \ln \ln X.$$

Поэтому

$$m_c(1+w) = m_c(1) + O\left(|w| \ln \ln X \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right). \quad (6)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$m_c(1+w) = O\left(\prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right). \quad (7)$$

Заменяем в интеграле

$$K_{1/v,x}(2\sigma, \chi_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2b-i\infty}^{2b+i\infty} F_{\bar{\chi}_1}(1+w) m_c(1+w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw.$$

$m_c(1+w)$ на $m_c(1)$ и оценим возникающую при этом погрешность, пользуясь оценками (6) и (7), а также формулой (4):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{\bar{\chi}_1}(2b+1+it)| |m_c(2b+1+it) - m_c(1)| \frac{|x^{-b+2b+it}|}{b^2+t^2} dt \ll \\ & \ll x^b \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(\int_0^{1/4} \frac{(b+t)^{k_1}}{b^2+t^2} (t+b) \ln \ln X dt + \int_{1/4}^{\infty} \frac{|F_{\bar{\chi}_1}(2b+1+it)|}{t^2} dt \right) \ll \\ & \ll x^b \ln \ln X \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(\int_0^b \frac{b^{k_1+1}}{b^2} dt + \int_b^{1/4} t^{k_1-1} dt + \int_{1/4}^{\infty} \frac{|F_{\bar{\chi}_1}(2b+1+it)|}{t^2} dt \right) \ll \\ & \ll x^b \ln \ln X \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right) b^{k_1} + \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \int_{1/4}^{\infty} |F_{\bar{\chi}_1}(2b+1+it)| \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

Для оценки последнего интеграла рассмотрим $|F_{\bar{\chi}_1}(2b+1+it)|$. Имеем

$$|F_{\bar{\chi}_1}(2b+1+it)| \ll \prod_p \left(1 + \frac{1/2v^2}{p^{2b+1}}\right) \ll \zeta(1+2b)^{1/2v^2} \ll b^{-1/2v^2}.$$

Таким образом, погрешность от замены $m_c(1+w)$ на $m_c(1)$ есть

$$O\left(b^{-1/2v^2} x^b \ln \ln X \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right),$$

следовательно,

$$K_{1/v,x}(2\sigma, \chi_2) = m_c(1) \frac{1}{2\pi i} \int_{2b-i\infty}^{2b+i\infty} F_{\bar{\chi}_1}(1+w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw + O\left(b^{-1/2v^2} x^b \ln \ln X \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right),$$

Пусть

$$T_0 = e^{\sqrt{\ln X}}.$$

Пусть Γ_1 — прямоугольник с вершинами $2b - iT_0$, $2b + iT_0$, $-c_1 + iT_0$, $-c_1 - iT_0$, где $c_1 = c'_1 b^{1/2}$, а c'_1 — столь малая положительная постоянная, что ни внутри Γ_1 , ни на его границе нет нулей $\zeta(1+w)$ и $L(1+w, \chi_2)$. Существование такой постоянной следует из теорем о границе нулей дзета-функции и L -функции Дирихле (см. [12]).

Пусть $c = c'b$, где $0 < c' < 0, 1c'_1$.

Сделаем внутри Γ_1 разрез по отрезку $[-c_1, -c]$. Определим замкнутый ориентированный контур Γ следующим образом. От точки $2b - iT_0$ по сторонам Γ_1 поднимаемся вверх, поворачиваем налево и опускаемся вниз до точки $-c_1$; по верхнему берегу разреза доходим до точки $-c$; обходим точку $s = 0$ отрицательно ориентированной окружности с центром в точке $s = 0$ радиуса c ; по нижнему берегу разреза доходим до точки $-c_1$; по сторонам Γ_1 опускаемся вниз, поворачиваем налево и возвращаемся в точку $2b - iT_0$.

Верхний берег разреза, окружность и нижний берег разреза назовем Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 , соответственно. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_{\bar{\chi}_1}(1+w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} w^{k_1} U(w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw = \\ &= \operatorname{res}_{w=b} \left(w^{k_1} U(w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} \right); \end{aligned}$$

здесь

$$U(w) = (w\zeta(1+w))^{-k_1} (L(1+w, \chi_2))^{-k_2} e^{H_2(1+w)}.$$

Эта функция регулярна во внутренности и на границе контура Γ_1 , а также регулярна, ограничена и отлична от нуля в некотором круге с центром в $w = 0$, радиус которого равен постоянной.

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{w=b} \left(w^{k_1} U(w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} \right) &= (k_1 b^{k_1-1} + b^{k_1} \ln x) U(b) + O(b^{k_1}) = \\ &= (k_1 b^{k_1-1} + b^{k_1} \ln x) U(0) + O(b^{k_1}). \end{aligned}$$

Поскольку на границе Γ_1 справедливы оценки ([13, глава 3]):

$$\frac{1}{|\zeta(1+w)|} \ll \ln T_0 \ll \sqrt{\ln x}, \text{ так как } x \geq \sqrt{X}; \quad \frac{1}{|L(1+w, \chi_2)|} \ll \ln T_0 \ll \sqrt{\ln x},$$

имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{2b-iT_0}^{2b+iT_0} F_{\bar{\chi}_1}(1+w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw = \\ &= -\frac{U(0)}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right) w^{k_1} \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw + O(b^{k_1}) + U(0)(k_1 b^{k_1-1} + b^{k_1} \ln x). \end{aligned}$$

Так как $k_1 > 0$ интеграл

$$\int_{\Gamma_3} w^{k_1} \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw$$

стремится к нулю при $c' \rightarrow +0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{c' \rightarrow +0} \left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right) &= 2ix^{-b} \sin \pi k_1 \int_0^{c_1} r^{k_1} \frac{e^{-r \ln x}}{(r+b)^2} dr = \\ &= 2ix^{-b} b^{-1+k_1} \sin \pi k_1 \int_0^{c_1' b^{-1/2}} r^{k_1} \frac{e^{-rb \ln x}}{(1+r)^2} dr = \\ &= 2ix^{-b} b^{-1+k_1} \sin \pi k_1 \int_0^\infty r^{k_1} \frac{e^{-rb \ln x}}{(1+r)^2} dr + O(e^{-c_1'/2} b^{-1/2}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{2b-iT_0}^{2b+iT_0} F_{\bar{\chi}_1}(1+w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw = \\ &= U(0)(k_1 b^{k_1-1} + b^{k_1} \ln x - x^{-b} b^{k_1-1} \frac{\sin \pi k_1}{\pi} \int_0^\infty r^{k_1} \frac{e^{-rb \ln x}}{(1+r)^2} dr) + O(b^{k_1}). \end{aligned}$$

Замечаем, что

$$x^{-b} b^{k_1-1} \frac{\sin \pi k_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{k_1}}{(1+r)^2} e^{-rb \ln x} dr \leq b^{k_1-1} \frac{\sin \pi k_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{k_1}}{(1+r)^2} dr = k_1 b^{k_1-1},$$

$$\begin{aligned} K_{1/v,x}(2\sigma, \chi_2) &= \frac{m_c(1)}{2\pi i} \int_{2b-iT_0}^{2b+iT_0} F_{\bar{\chi}_1}(1+w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw + \\ &+ O\left(e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln x}}\right) + O\left(b^{-1/2v^2} x^b \ln \ln X \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right). \end{aligned}$$

Тем самым получена асимптотическая формула

$$K_{1/v,x}(2\sigma, \chi_2) = m_c(1)U(0) \left(k_1 b^{k_1-1} + b^{k_1} \ln x - x^{-b} b^{k_1-1} \frac{\sin \pi k_1}{\pi} \int_0^\infty r^{k_1} \frac{e^{-rb \ln x}}{(1+r)^2} dr \right) +$$

$$+ O(b^{k_1}) + O \left(b^{-1/2v^2} x^b \ln \ln X \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right),$$

причем

$$k_1 b^{k_1-1} + b^{k_1} \ln x - x^{-b} b^{k_1-1} \frac{\sin \pi k_1}{\pi} \int_0^\infty r^{k_1} \frac{e^{-rb \ln x}}{(1+r)^2} dr \geq b^{k_1} \ln x.$$

Пусть $C > C_0(\varepsilon) > 0$, где $C_0(\varepsilon)$ столь велико, что $b^{-1} = \frac{\log T}{C} < 0.001 \log x$. Тогда имеем

$$0.999 m_d(1) m_r^2(1) U^2(0) b^{2k_1} \log^2 x < K_{1/v,x_1}(2\sigma, \chi_2) K_{1/v,x_2}(2\sigma, \chi_2) <$$

$$< 1.003 m_d(1) m_r^2(1) U^2(0) b^{2k_1} \log^2 x.$$

Пользуясь этими неравенствами, оценим снизу сумму

$$S = \sum_{\substack{r \leq X^{0.1} \\ (r,d)=1}} \mu(r) \frac{\chi_1^2(r) d_{1/v}^2(r) g^2(r) \alpha^2(r)}{r^{4\sigma}} K_{1/v,x_1}(2\sigma, \chi_2) K_{1/v,x_2}(2\sigma, \chi_2).$$

Выделяя $r = 1$, приходим к неравенству

$$S \geq m_d(1) U^2(0) b^{2k_1} \log^2 x \left(1.998 - 1.003 \sum_{r=1}^\infty \mu^2(r) \frac{d_{1/v}^2(r) \alpha^2(r) g^2(r) m_r^2(1)}{r^2} \right).$$

Из определений следует, что для любого простого p справедливо неравенство

$$\frac{d_{1/v}^2(p) \alpha^2(p) g^2(p) m_p^2(1)}{p^2} \leq \frac{1}{v^2 p^2},$$

следовательно

$$1.003 \sum_{r=1}^\infty \mu^2(r) \frac{d_{1/v}^2(r) \alpha^2(r) g^2(r) m_r^2(1)}{r^2} < 1.003 \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) < 1.003 \zeta(2) < 1.65,$$

$$S \geq 0.348 m_d(1) U^2(0) b^{2k_1} \log^2 x.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$|V_{1,1/v,d}(2\sigma, \chi_1)| \gg \frac{|\chi_1(d) d_{1/v}(d) \alpha(d) \tau(d) g(d) m_d(1)|}{d^{2\sigma}} b^{2k_1}.$$

Мы пришли к неравенству

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1) \gg b^{4k_1} \prod_p \left(1 + \frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}} \right) \sum_{d \leq X^{0.1}} \frac{\alpha^2(d) \tau^2(d) m_d^2(d)}{d^{2\sigma}} \frac{\varphi(d)}{d}.$$

Оценим снизу сумму по d . Имеем

$$\sum_{d \leq X^{0.1}} \frac{\alpha^2(d) \tau^2(d) m_d^2(1)}{d^{2\sigma}} \frac{\varphi(d)}{d} \geq \sum_{d=1}^\infty \frac{\alpha^2(d) \tau^2(d)}{d^{2\sigma}} \left(\frac{\varphi(d)}{d} \right)^3 - X^{-b/20} \sum_{d=1}^\infty \frac{\alpha^2(d) \tau^2(d)}{d^{2\sigma_1}} \left(\frac{\varphi(d)}{d} \right)^3,$$

$$\begin{aligned}
2\sigma &= 1 + b, \quad 2\sigma_1 + b/2, \quad \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)}{d^{2\sigma}} \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^3 = \prod_p \left(1 + \frac{4\alpha^2(p)}{p^{2\sigma}} \left(\frac{p-1}{p}\right)^3\right); \\
\log \prod_p \left(1 + \frac{4\alpha^2(p)}{p^{2\sigma}} \left(\frac{p-1}{p}\right)^3\right) &= \frac{1}{v^2} \sum_{p \equiv \pm 1 \pmod{5}} \frac{1}{p^{2\sigma}} + 4\varepsilon^2 \sum_{p \equiv \pm 2 \pmod{5}} \frac{1}{p^{2\sigma}} + O(1) = \\
&= \left(\frac{1}{2v^2} + 2\varepsilon^2\right) \log \zeta(2\sigma) + O(1); \quad \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)}{d^{2\sigma}} \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^3 \gg \zeta(2\sigma)^{\frac{1}{2v^2} + 2\varepsilon^2} \gg b^{-\frac{1}{2v^2} - 2\varepsilon^2}; \\
X^{-b/20} &= e^{-\frac{C}{\log T} \frac{\varepsilon}{20} \log T} = e^{-\frac{C\varepsilon}{20}}.
\end{aligned}$$

Считая, что C достаточно велико, получаем

$$\sum_{d \leq X^{0.1}} \frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)m_d^2(1)}{d^{2\sigma}} \frac{\varphi(d)}{d} \gg b^{-\frac{1}{2v^2} - 2\varepsilon^2}.$$

Далее,

$$\log \prod_p \left(1 + \frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}}\right) = \sum_p \frac{1}{v^2 p^{2\sigma}} + O(1) = \frac{1}{v^2} \log \zeta(2\sigma) + O(1), \quad \prod_p \left(1 + \frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}}\right) \gg b^{-1/v^2}.$$

Применяя полученные оценки, получаем

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1) \gg (2\sigma - 1)^{-\frac{(1+2v\varepsilon)^2}{2v^2}}.$$

Отсюда следует утверждение леммы для $\Sigma_{1,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1, Y)$. Оценка для $\Sigma_{2,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1, Y)$ проводится аналогично. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $2\sigma_2$ равно либо $2\sigma = 1 + b$, либо 1, c — натуральное число, $0 < k < 1$,

$$g_k(\nu) = \prod_{p|\nu} \left(d_k(p) + \frac{d_k(p^2)d_k(p)}{p^{2\sigma}} + \frac{d_k(p^3)d_k(p^2)}{p^{4\sigma}} + \dots\right) \left(1 + \frac{d_k^2(p)}{p^{2\sigma}} + \frac{d_k^2(p^2)}{p^{4\sigma}} + \dots\right)^{-1},$$

$$K_{k,c}(2\sigma_2, \chi) = \sum_{\nu} \frac{\beta(c\nu)\bar{\chi}(\nu)g_k(\nu)}{\nu^{2\sigma_2}}.$$

Тогда справедливы оценки

$$K_{k,c}(2\sigma_2, \chi_1) = O\left(\frac{|\alpha(c)|}{\log X} b^{-(1-k_2)} \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right), \quad K_{k,c}(2\sigma_2, \bar{\chi}_1) = O\left(\frac{|\alpha(c)|}{\log X} b^{-(1-k_1)} \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right),$$

где $k_1 = \frac{k}{4v} - \frac{k\varepsilon}{2}$, $k_2 = \frac{k}{4v} + \frac{k\varepsilon}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $K_{k,c}(2\sigma_2, \chi)$ в виде

$$K_{k,c}(2\sigma_2, \chi) = \frac{\alpha(c)}{\log X} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_{\chi}(2\sigma_2 + s) m_c(2\sigma_2 + s) \frac{x^s}{s^2} ds,$$

где

$$F_{\chi}(z) = \prod_p \left(1 + \frac{\alpha(p)\chi_1(p)\bar{\chi}(p)g_k(p)}{p^z}\right), \quad (\Re z > 1),$$

$$m_c(z) = \prod_{p|c} (1 + \frac{\alpha(p)\chi_1(p)\bar{\chi}(p)g_k(p)}{p^z})^{-1}.$$

Оценивая $m_c(z)$ тривиально, получаем $m_c(z) = O(\prod_{p|c} (1 + \frac{1}{p}))$. Повторяя рассуждения из леммы 1, получаем

$$|F_{\bar{\chi}_1}(z)| = O(|\zeta(z)|^{-k_1} |L(z, \chi_2)|^{-k_2}), \quad |F_{\chi_1}(z)| = O(|\zeta(z)|^{-k_2} |L(z, \chi_2)|^{-k_1})$$

($\Re z = b$, $|\Im z| \leq 0.1$).

Кроме того, имеем тривиальную оценку

$$|F_{\bar{\chi}_1}(z)| + |F_{\chi_1}(z)| = O(b^{-k/(2v)}) \quad (\Re z = b, |\Im z| > 0.1).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} K_{k,c}(2\sigma_2, \chi_1) &= O\left(\frac{|\alpha(c)|}{\log X} \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(\int_0^{1/4} \frac{t^{k_2} + b^{k_2}}{t^2 + b^2} dt + b^{-k/(2v)} \int_{1/4}^\infty \frac{dt}{t^2}\right)\right) = \\ &= O\left(\frac{|\alpha(c)|}{\log X} b^{-(1-k_2)} \prod_{p|c} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right). \end{aligned}$$

Оценка $K_{k,c}(2\sigma_2, \bar{\chi}_1)$ проводится аналогично. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $2\sigma = 1 + \frac{C}{\log T} = 1 + b$, $0 < k < 1$, $2 \leq u \leq v$,

$$a_{l,k,u}(\lambda, \chi) = \sum_{n\nu_1 \cdots \nu_u = \lambda} d_k(n) \chi(n) \beta(\nu_1) \cdots \beta(\nu_u) (\nu_1 \cdots \nu_u)^{(l-1)(2\sigma-1)} \quad (l = 1, 2),$$

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma, \chi) = \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{|a_{l,k,u}(\lambda, \chi)|^2}{\lambda^{2\sigma}}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma, \chi_1) \ll X^{2u(2\sigma-1)} \left(\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X}\right)^2 (2\sigma-1)^{-(k-u/(4v)-u\varepsilon/2)^2 - (u/(4v)-u\varepsilon/2)^2},$$

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma, \bar{\chi}_1) \ll X^{2u(2\sigma-1)} \left(\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X}\right)^2 (2\sigma-1)^{-(k-u/(4v)+u\varepsilon/2)^2 - (u/(4v)+u\varepsilon/2)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{l,k,u}(2\sigma, \chi) &= \sum_{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_u} \sum_{\nu_{u+1}} \cdots \sum_{\nu_{2u}} \frac{\beta(\nu_1) \cdots \beta(\nu_u) \overline{\beta(\nu_{u+1})} \cdots \overline{\beta(\nu_{2u})}}{(\nu_1 \cdots \nu_u \nu_{u+1} \cdots \nu_{2u})^\sigma} \times \\ &\times (\nu_1 \cdots \nu_u \nu_{u+1} \cdots \nu_{2u})^{(l-1)(2\sigma-1)} \sum_{n_1 \nu_1 \cdots \nu_u = n_1 \nu_{u+1} \cdots \nu_{2u}} \frac{d_k(n_1) d_k(n_2) \chi(n_1) \bar{\chi}(n_2)}{(n_1 n_2)^\sigma}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $q = (\nu_1 \cdots \nu_u, \nu_{u+1} \cdots \nu_{2u})$, $\nu_1 \cdots \nu_u = aq$, $\nu_{u+1} \cdots \nu_{2u} = bq$, $(a, b) = 1$. Тогда

$$\sum_{n_1 \nu_1 \cdots \nu_u = n_1 \nu_{u+1} \cdots \nu_{2u}} \frac{d_k(n_1) d_k(n_2) \chi(n_1) \bar{\chi}(n_2)}{(n_1 n_2)^\sigma} = \frac{\bar{\chi}(a) \chi(b)}{(ab)^\sigma} \sum_{m=1}^\infty \frac{d_k(am) d_k(bm) |\chi(m)|^2}{m^{2\sigma}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\bar{\chi}(\nu_1) \cdots \bar{\chi}(\nu_u) \chi(\nu_{u+1}) \cdots \chi(\nu_{2u})}{(\nu_1 \cdots \nu_u \nu_{u+1} \cdots \nu_{2u})^\sigma} q^{2\sigma} \sum_{m_a \in M_a} \frac{d_k(am_a) d_k(m_a)}{m_a^{2\sigma}} \sum_{m_b \in M_b} \frac{d_k(bm_b) d_k(m_b)}{m_b^{2\sigma}} \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{m=1 \\ (m, 5ab)=1}} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} = c_5 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} \frac{\bar{\chi}(\nu_1) \cdots \bar{\chi}(\nu_u) \chi(\nu_{u+1}) \cdots \chi(\nu_{2u})}{(\nu_1 \cdots \nu_u \nu_{u+1} \cdots \nu_{2u})^\sigma} \times \\
&\quad q^{2\sigma} g_k\left(\frac{\nu_1 \cdots \nu_u}{q}\right) g_k\left(\frac{\nu_{u+1} \cdots \nu_{2u}}{q}\right), \tag{9}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_5 &= \left(1 + \frac{d_k^2(5)}{5^{2\sigma}} + \frac{d_k^2(5^2)}{5^{4\sigma}} + \cdots\right)^{-1}, \quad g_k(c) = \prod_{p|c} \left(d_k(p^{\alpha_p}) + \frac{d_k(p^{\alpha_p+1}) d_k(p)}{p^{2\sigma}} + \frac{d_k(p^{\alpha_p+2}) d_k(p)}{p^{4\sigma}} + \cdots\right) \times \\
&\quad \times \left(1 + \frac{d_k^2(p)}{p^{2\sigma}} + \frac{d_k^2(p^2)}{p^{4\sigma}} + \cdots\right)^{-1}, \quad c = \prod_{p|c} p^{\alpha_p}.
\end{aligned}$$

Согласно формуле Мебиуса имеем

$$q^{2\sigma} g_k\left(\frac{\nu_1 \cdots \nu_u}{q}\right) g_k\left(\frac{\nu_{u+1} \cdots \nu_{2u}}{q}\right) = \sum_{d|q} \gamma(d), \tag{10}$$

где

$$\gamma(d) = d^{2\sigma} \sum_{\delta|d} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2\sigma}} g_k\left(\frac{\nu_1 \cdots \nu_u}{d} \delta\right) g_k\left(\frac{\nu_{u+1} \cdots \nu_{2u}}{d} \delta\right). \tag{11}$$

Подставим (10) и (11) в (9):

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma, \chi) = c_5 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} \sum_{d \leq X^u} d^{2\sigma} \sum_{\delta|d} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2\sigma}} |V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma, \chi)|^2,$$

где

$$V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma, \chi) = \sum_{\substack{\nu_1 \cdots \nu_u \equiv 0 \\ (\text{mod } d)}} \cdots \sum_{\nu_u} \frac{\beta_1(\nu_1) \cdots \beta_1(\nu_u)}{(\nu_1 \cdots \nu_u)^{2\sigma_2}} g_k\left(\frac{\nu_1 \cdots \nu_u}{d} \delta\right), \tag{12}$$

$\beta_1(\nu) = \beta(\nu) \bar{\chi}(\nu)$, $2\sigma_2$ равно 2σ при $l = 1$ и 1 при $l = 2$.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma, \chi) &= \sum_{\substack{\nu_{1d} \in M_d \\ \nu_{1d} \cdots \nu_{ud} \equiv 0 \\ (\text{mod } d)}} \cdots \sum_{\substack{\nu_{ud} \in M_d \\ (\text{mod } d)}} \frac{g_k\left(\frac{\nu_{1d} \cdots \nu_{ud} \delta}{d}\right)}{(\nu_{1d} \cdots \nu_{ud})^{2\sigma_2}} \times \\
&\times \sum_{(\nu_1, d)=1} \cdots \sum_{(\nu_u, d)=1} \frac{\beta_1(\nu_{1d} \nu_1) \cdots \beta_1(\nu_{ud} \nu_u)}{(\nu_1 \cdots \nu_u)^{2\sigma_2}} g_k(\nu_1 \cdots \nu_u).
\end{aligned}$$

Поскольку $\nu_1, \dots, \nu_u$ — бесквадратные числа, для любого произведения $\nu_1 \cdots \nu_u$ существует единственный набор $\mu_1, \dots, \mu_u$ бесквадратных попарно простых и взаимно простых с d чисел таких, что

$$\nu_1 \cdots \nu_u = \mu_1 \mu_2^2 \cdots \mu_u^u.$$

При этом числа ν_j раскладываются в произведения

$$\nu_j = \nu_j^{(1)} \cdots \nu_j^{(u-1)} \mu_j \quad (j = 1, \dots, u)$$

так, что

$$\nu_1^{(1)} \cdots \nu_u^{(1)} = \mu_1, \nu_1^{(2)} \cdots \nu_u^{(2)} = \mu_2^2, \dots, \nu_1^{(u-1)} \cdots \nu_u^{(u-1)} = \mu_{u-1}^{u-1}.$$

Введем обозначения

$$\nu_j = \nu'_j \nu''_j, \nu'_j = \nu_j^{(1)}, j = 1, \dots, u.$$

Отметим, что при любом $1 \leq j \leq u$ ν_j'' делит число $\mu_2 \cdots \mu_u$.

Сделаем в кратной сумме по $\nu_1, \dots, \nu_u$ замену переменных суммирования и перейдем к неравенству:

$$\begin{aligned} |V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma, \chi)| &\leq \sum_{\substack{\nu_{1d} \in M_d \\ \nu_{1d} \cdots \nu_{ud} \equiv 0 \pmod{d}}} \cdots \sum_{\nu_{ud} \in M_d} \frac{g_k\left(\frac{\nu_{1d} \cdots \nu_{ud}}{d} \delta\right)}{(\nu_{1d} \cdots \nu_{ud})^{2\sigma_2}} \times \\ &\times \sum_{\mu_u} \frac{g_k(\mu_u^u)}{\mu_u^{2\sigma_2 u}} \cdots \sum_{\mu_2} \frac{g_k(\mu_2^2) \tau_u(\mu_2^2)}{\mu_2^{4\sigma_2}} \mu^2(\mu_2 \cdots \mu_u) \times \\ &\times \left| \sum_{\nu'_1} \frac{\beta_1(\nu_{1d} \nu''_1 \nu'_1)}{\nu_1'^{2\sigma_2}} g_k(\nu'_1) \cdots \sum_{\nu'_u} \frac{\beta_1(\nu_{ud} \nu''_u \nu'_u)}{\nu_u'^{2\sigma_2}} g_k(\nu'_u) \mu^2(\nu'_1 \cdots \nu'_u) \right|. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть $\chi = \bar{\chi}_1$. Продолжим, пользуясь известной формулой для $\mu^2(\nu)$ и леммой 2,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\nu'_1} \frac{\beta_1(\nu_{1d} \nu''_1 \nu'_1)}{\nu_1'^{2\sigma_2}} g_k(\nu'_1) \cdots \sum_{\nu'_u} \frac{\beta_1(\nu_{ud} \nu''_u \nu'_u)}{\nu_u'^{2\sigma_2}} g_k(\nu'_u) \mu^2(\nu'_1 \cdots \nu'_u) \right| \leq \\ &\leq \sum_m \mu^2(m) \sum_{\substack{\nu_{1m} \in M_m \\ \nu_{1m} \cdots \nu_{um} \equiv 0 \pmod{m^2}}} \cdots \sum_{\nu_{um} \in M_m} \frac{g_k(\nu_{1m}) \cdots g_k(\nu_{um})}{(\nu_{1m} \cdots \nu_{um})^{2\sigma_2}} |K_{k,\nu_{1d}\nu_{1m}\nu'_1}(2\sigma_2, \chi) \cdots K_{k,\nu_{ud}\nu_{um}\nu'_u}(2\sigma_2, \chi)| \ll \\ &\ll \frac{b^{-(1-k_1)u}}{(\log X)^u} |\alpha(\nu_{1d})| \cdots |\alpha(\nu_{ud})| \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^u. \end{aligned}$$

Подставим это неравенство в (13). Получим

$$V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma, \bar{\chi}_1) \ll \frac{b^{-(1-k_1)u}}{(\log X)^u} G(d) \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^u,$$

где

$$G(d) = \sum_{\substack{\nu_{1d} \in M_d \\ \nu_{1d} \cdots \nu_{ud} \equiv 0 \pmod{d}}} \cdots \sum_{\nu_{ud} \in M_d} \frac{|\alpha(\nu_{1d})| \cdots |\alpha(\nu_{ud})|}{(\nu_{1d} \cdots \nu_{ud})^{2\sigma_2}}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{l,k,u}(2\sigma, \bar{\chi}_1) &\ll \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} X^{2ub} \frac{b^{-2(1-k_1)u}}{(\log X)^{2u}} \sum_{d=1}^{\infty} d^{1-b} G^2(d) \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{3u} \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} X^{2ub} \frac{b^{-2(1-k_1)u}}{(\log X)^{2u}} \prod_p \left(1 + p^{1-b} G^2(p) \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{3u} + p^{2-2b} G^2(p^2) \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{3u} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Заметим, что эйлерово произведение сходится, поскольку

$$G(p^\kappa) \leq \binom{u}{\kappa} \left(\frac{|\alpha(p)|}{p}\right)^\kappa \left(1 + \frac{1}{p}\right)^u.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \log \prod_p (1 + p^{1-b} G^2(p) (1 + \frac{1}{p})^{3u} + p^{2-2b} G^2(p^2) (1 + \frac{1}{p})^{3u} + \dots) &= \frac{u^2}{4v^2} \sum_{p \equiv \pm 1 \pmod{5}} \frac{1}{p^{2\sigma}} + \\ &+ \varepsilon^2 u^2 \sum_{p \equiv \pm 2 \pmod{5}} \frac{1}{p^{2\sigma}} + O(1) = (\frac{u^2}{8v^2} + \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}) \log \zeta(2\sigma) + O(1); \\ \prod_p (1 + p^{1-b} G^2(p) (1 + \frac{1}{p})^{3u} + p^{2-2b} G^2(p^2) (1 + \frac{1}{p})^{3u} + \dots) &\ll b^{-(\frac{u^2}{8v^2} + \frac{\varepsilon^2 u^2}{2})}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} \ll \prod_p (1 - \frac{1}{p^{2\sigma}})^{-k^2} = (\zeta(2\sigma))^{k^2} \ll b^{-k^2},$$

окончательно получаем

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma, \bar{\chi}_1) \ll X^{2ub} (\frac{b^{-1}}{\log X})^2 b^{-(k-u/(4v)+u\varepsilon/2)^2 - (u/(4v)+u\varepsilon/2)^2}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения и пользуясь неравенством

$$V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma, \chi_1) \ll \frac{b^{-(1-k_2)u}}{(\log X)^u} G(d) \prod_{p|d} (1 + \frac{1}{p})^u,$$

приходим к оценке для $\Sigma_{l,k,u}(2\sigma, \chi_1)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $2\sigma = 1 + \frac{C}{\log T} = 1 + b$, $l = 1, 2$.

Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \Sigma_{l,1/v,2}(2\sigma, \chi_1) &\ll X^{2u(2\sigma-1)} (\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2 (2\sigma-1)^{-(1-2v\varepsilon)^2/(2v^2)}, \\ \Sigma_{l,1/2,v}(2\sigma, \chi_1) &\ll X^{2u(2\sigma-1)} (\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2 (2\sigma-1)^{-(1-2v\varepsilon)^2/8}, \\ \Sigma_{l,1/v,2}(2\sigma, \bar{\chi}_1) &\ll X^{2u(2\sigma-1)} (\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2 (2\sigma-1)^{-(1+2v\varepsilon)^2/(2v^2)}, \\ \Sigma_{l,1/v,2}(2\sigma, \bar{\chi}_1) &\ll X^{2u(2\sigma-1)} (\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2 (2\sigma-1)^{-(1+2v\varepsilon)^2/8}. \end{aligned}$$

3. Леммы об оценках дробных моментов

Пусть

$$\varphi_1(z) = \left(\sum_{\nu} \frac{\beta(\nu)}{\nu^z} \right)^{2v}, \quad \varphi_2(z) = \left(\sum_{\nu} \frac{\bar{\beta}(\nu)}{\nu^{1-z}} \right)^{2v}, \quad f_l(z, \chi) = L(z, \chi) \varphi_l(z) \quad (l = 1, 2).$$

При $k > 0$

$$J_{l,k}(\sigma, \chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_l(\sigma + it, \chi)|^{2k} w_k(t) dt,$$

где

$$w_k(t) = \int_T^{2T} e^{-2k(t-\tau)^2} d\tau.$$

ЛЕММА 4. Пусть $k > 0$, $T \geq 2$, $1/2 < \sigma \leq 3/4$, l — любое из чисел 1, 2. Тогда

$$J_{l,k}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \ll T^{k(\sigma-1/2)} \sqrt{J_{1,k}(\sigma, \chi) J_{2,k}(\sigma, \chi)} + e^{-0,1kT^2}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $k > 0$, $T \geq 2$, $1/2 < \sigma \leq 3/4$, l — любое из чисел 1, 2. Тогда

$$J_{l,k}(\sigma, \chi) \ll \left(J_{l,k}\left(\frac{1}{2}, \chi\right)\right)^{3/2-\sigma} (T^{1+\varepsilon})^{\sigma-1/2} + e^{-0,1kT^2}.$$

Доказательства лемм 4 и 5 проводятся так же, как доказательства соответствующих лемм 4 и 5 в работе [14].

Введем ряд определений:

$$A_{l,k,u}(z, \chi) = \sum_{\lambda \leq Y} \frac{a_{l,k,u}(\lambda, \chi)}{\lambda^z}, \quad g_{l,k,u}(z, \chi) = L(z, \chi) \varphi_l(z) - A_{l,k,u}^\nu(z, \chi),$$

$$K_{l,k,u}(\sigma, \chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_{l,k,u}(\sigma + it, \chi)|^{2/\nu} w_{1/\nu}(t) dt \quad (l = 1, 2, \nu = 2, v).$$

ЛЕММА 6. Пусть $1/2 < \sigma \leq 5/4$, l — любое из чисел 1, 2, $k = \frac{1}{2}$, $u = v$, или $k = \frac{1}{v}$, $u = 2$. Тогда

$$K_{l,k,u}(\sigma, \chi) \ll (K_{l,k,u}(1/2, \chi))^{\frac{5-4\sigma}{3}} (K_{l,k,u}(5/4, \chi))^{\frac{4\sigma-2}{3}} + e^{-\frac{T^2}{\log^2 T}}.$$

Доказательства леммы 6 совпадает с доказательством леммы 7 из работы [14].

ЛЕММА 7. Пусть l — любое из чисел 1, 2, $k = \frac{1}{2}$, $u = v$, $\nu = 2$ или $k = \frac{1}{v}$, $u = 2$, $\nu = v$. Тогда

$$K_{l,k,u}(5/4, \chi) \ll T^\varepsilon \int_0^{3T} \left| \sum_{n > YX^{-2}} \frac{b_{l,k,u}(n)}{n^{5/4+it}} \right|^{2/\nu} dt + e^{-T^2/(10v)},$$

где $|b_{l,k,u}(n)| \leq 1$;

$$K_{l,k,u}(5/4, \chi) \ll T^{1+\varepsilon} Y^{-\frac{3}{2}k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство первого утверждения при любых значениях l , k , u , ν проводится одинаково. Пусть, например, $l = 1$, $k = 1/v$, $u = 2$, $\nu = v$. Пусть $z = 5/4 + it$. Тогда

$$\begin{aligned} A_{1,1/v,2}(z, \chi) &= \sum_{n\nu_1\nu_2 \leq Y} \frac{d_{1/v}(n)\chi(n)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{(n\nu_1\nu_2)^z} = \\ &= \left(\sum_{n \leq YX^{-2}} \frac{d_{1/v}(n)\chi(n)}{n^z} \right) \left(\sum_{\nu_1} \frac{\beta(\nu_1)}{\nu_1^z} \sum_{\nu_2} \frac{\beta(\nu_2)}{\nu_2^z} \right) + \\ &+ \left(\sum_{\nu_1} \frac{\beta(\nu_1)}{\nu_1^z} \sum_{\nu_2} \frac{\beta(\nu_2)}{\nu_2^z} \right) \sum_{YX^{-2} < n \leq Y(\nu_1\nu_2)^{-1}} \frac{d_{1/v}(n)\chi(n)}{n^z}. \end{aligned}$$

Возведем это равенство в степень v ; получим

$$A_{1,1/v,2}^v(z, \chi) = \sum_{n \leq (YX^{-1})^v} \frac{b(n)\chi(n)}{n^z} \varphi_1(z) + S_{1,1/v,2}(z, \chi),$$

где $S_{1,1/v,2}(z, \chi)$ представляет собой сумму четырех слагаемых вида

$$\sum_{YX^{-2} < n \leq (YX^{-2})^v} \frac{b_{1,1/v,2}(n)}{n^z}, \quad |b_{1,1/v,2}(n)| \leq 1,$$

$$b(n) = \sum_{\substack{n_1 \leq YX^{-2} \\ n_1 \cdots n_v = n}} \cdots \sum_{\substack{n_v \leq YX^{-2}}} d_{1/v}(n_1) \cdots d_{1/v}(n_v).$$

Поскольку $b(n) \in [0, 1]$ при любых n , и $b(n) = 1$ при $n \leq YX^{-2}$, имеем

$$L(z, \chi) \varphi_1(z) - \sum_{n \leq YX^{-2}} \frac{b(n) \chi(n)}{n^z} \varphi_1(z) = \sum_{n > YX^{-2}} \frac{(1 - b(n)) \chi(n)}{n^z} \varphi_1(z).$$

Тем самым первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение следует теперь, из неравенства Гельдера и неравенства

$$\int_0^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{it} \right|^2 dt = T \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 \right) \quad (14)$$

(см., например, [15, глава 7]). $\square$

4. Доказательство теоремы 1

Пусть

$$R_{l,k,u}(\sigma, \chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_{l,k,u}(\sigma + it, \chi)|^2 w_k(t) dt.$$

Неравенство

$$R_{l,1/v,2}(\sigma, \bar{\chi}_1) \ll J_{l,1/v,2}(\sigma, \bar{\chi}_1) + K_{l,1/v,2}(\sigma, \bar{\chi}_1), \quad (15)$$

справедливо для любого σ из промежутка $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\eta}{\log T}\right]$.

Если $K_{l,1/v,2}(1/2, \bar{\chi}_1) \leq T$, то, полагая в (15) $\sigma = 1/2$, получаем

$$R_{l,1/v,2}\left(\frac{1}{2}, \bar{\chi}_1\right) \ll J_{l,1/v}\left(\frac{1}{2}, \bar{\chi}_1\right) + T.$$

Поскольку

$$T \Sigma_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1, Y) \ll R_{l,1/v,2}\left(\frac{1}{2}, \bar{\chi}_1\right) \ll T \Sigma_{l,1/v}(2\sigma, \bar{\chi}_1, Y),$$

то, в силу леммы 1, при $K_{l,1/v,2}(1/2, \bar{\chi}_1) \leq T$

$$T \Sigma_{l,1/v}\left(\frac{1}{2}, \bar{\chi}_1\right) \ll J_{l,1/v}\left(\frac{1}{2}, \bar{\chi}_1\right). \quad (16)$$

Пусть $K_{l,1/v,2}(1/2, \bar{\chi}_1) > T$. Тогда из лемм 6, 7 следует, что

$$\begin{aligned} T \Sigma_{l,1/v}(\sigma, \bar{\chi}_1) &\ll J_{l,1/v}(\sigma, \bar{\chi}_1) + K_{l,1/v,2}(1/2, \bar{\chi}_1) Y^{-(\frac{3}{2v} - \frac{4\varepsilon}{3}) \frac{4\sigma-2}{3}} \ll \\ &\ll J_{l,1/v,2}(\sigma, \bar{\chi}_1) + J_{l,1/v}\left(\frac{1}{2}, \bar{\chi}_1\right) + T \Sigma_{l,1/v}(1/2, \bar{\chi}_1) Y^{-(\frac{3}{2v} - \frac{4\varepsilon}{3}) \frac{4\sigma-2}{3}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как $\eta > 0$ — достаточно большое число, из лемм 1 и 2 следует, что

$$\Sigma_{l,1/v}(1/2, \bar{\chi}_1) Y^{-(\frac{3}{2v} - \frac{4\varepsilon}{3}) \frac{4\sigma-2}{3}} \leq \frac{1}{2} c_1 \Sigma_{l,1/v}(\sigma, \bar{\chi}_1),$$

где c_1 — константа из знака Виноградова в (17).

Отсюда и из леммы 4 следует, что и в случае $K_{l,1/v,2}(1/2, \bar{\chi}_1) > T$ справедливо неравенство (16).

Пусть l — любое из чисел 1, 2, k равно либо $\frac{1}{2}$, либо $\frac{1}{v}$. Пусть $u = \frac{1}{k}$. Оценим $J_{l,k}(2\sigma, \chi)$ сверху. Имеем

$$J_{l,k}(\sigma, \chi) \ll R_{l,k,u}(\sigma, \chi) + K_{l,k,u}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) Y^{-\left(\frac{3}{2}k - \frac{4\varepsilon}{3}\right)\frac{4\sigma-2}{3}} \ll R_{l,k,u}(\sigma, \chi) + \\ + R_{l,k,u}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) + J_{l,k}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) Y^{-\left(\frac{3}{2}k - \frac{4\varepsilon}{3}\right)\frac{4\sigma-2}{3}}.$$

Если $K_{l,k}(1/2, \chi) \leq T$, то

$$J_{l,k}(\sigma, \chi) \ll R_{l,k,u}(\sigma, \chi) + T \ll R_{l,k,u}(\sigma, \chi) \ll T \Sigma_{l,k}(\sigma, \chi). \quad (18)$$

Воспользуемся леммой 4:

$$J_{l,k}(\sigma, \chi) \ll R_{l,k,u}(\sigma, \chi) + R_{l,k,u}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) + \sqrt{J_{1,k}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) J_{2,k}\left(\frac{1}{2}, \chi\right)} T^{k(\sigma-\frac{1}{2})} Y^{-\left(\frac{3}{2}k - \frac{4\varepsilon}{3}\right)\frac{4\sigma-2}{3}}.$$

Пусть

$$\max(J_{1,k}(\sigma, \chi), J_{2,k}(\sigma, \chi)) = J_{l,k}(\sigma, \chi).$$

Тогда при достаточно большом $\eta > 0$

$$c_2 T^{k(\sigma-\frac{1}{2})} Y^{-\left(\frac{3}{2}k - \frac{4\varepsilon}{3}\right)\frac{4\sigma-2}{3}} \leq \frac{1}{2},$$

где c_2 — неравенство из знака Виноградова в (4); поэтому и в этом случае справедливо неравенство (18).

Пусть $J_{l,k}(\sigma, \chi) < J_{3-l,k}(\sigma, \chi)$. Тогда получаем

$$J_{3-l,k}(\sigma, \chi) \ll R_{3-l,k,u}(\sigma, \chi) + R_{3-l,k,u}(1/2, \chi) \ll T \Sigma_{3-l,k,u}(\sigma, \chi).$$

Отсюда, из (16) и (18) и из леммы 1 и следствия 1 утверждения теоремы прямо следуют.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определений следует, что для моментов успокоенной функции Дэвенпорта–Хейльбронна справедливы те же оценки, что и для соответствующих моментов успокоенной функции $L(\frac{1}{2} + it, \bar{\chi}_1)$. Беря в этих оценках $v = 3$, и повторяя рассуждения из статьи [4], приходим к оценке

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/12-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann zeta-function on the critical line // Math. Zs. 1921.V.10, PP.283–317.
2. Selberg A. On the zeroes of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo.1942. V. 10.
3. Карацуба А. А. Дробные моменты $\zeta(s)$ на критической прямой // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 4, С. 502–508.
4. Гриценко С. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна // Тр. МИАН. 2017. Т. 296. С. 72–94.
5. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, № 2, С. 303–315.

6. Карацуба А. А. О нулях некоторых рядов Дирихле // УМН, 1990, Т. 45, 1(271), 175–176.
7. Карацуба А. А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991, Т. 55, № 3, 483–514.
8. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Тр. МИ-АН. 1994. Т. 207. С. 180–196.
9. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Изв. РАН. Сер. матем., 1993, Т. 57, № 5, 3–14.
10. Карацуба А. А. О нулях одного класса функций, порожденных функцией Гурвица // УМН, 1993, Т. 48, 5(293), 175–176.
11. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40, 5 (245), С. 19–70.
12. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — 2-е изд. — М.: Наука, 1983.
13. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.
14. Heath-Brown D. R. Fractional moments of Riemann zeta-function // J. Lond. Math. Soc. 1981. V 24, № 2, PP. 65–78.
15. Ivić A. The Riemann Zeta-function. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1985.

REFERENCES

1. Hardy G. H. & Littlewood J. E. 1921, “*The zeros of Riemann zeta-function on the critical line*“, Math. Zs., vol. 10, pp. 283–317.
2. Selberg A. 1942, “*On the zeroes of Riemann’s zeta-function*“, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo, vol. 10.
3. Karatsuba A. A. 1983, “*Basic Analytic Number Theory*“, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 222.
4. Gritsenko S. A. 2017, “*On the zeros of the Davenport–Heilbronn function*“, Proc. Steklov Inst. Math., vol. 296, pp. 65–87.
5. Karatsuba A. A. 1986, “*Zeros of the Riemann zeta function on the critical line*“, Proc. Steklov Inst. Math., vol. 167, pp. 187–200.
6. Karatsuba A. A. 1990, “*Zeros of certain Dirichlet series*“, Russian Math. Surveys, vol. 45, № 1, pp. 207–208.
7. Karatsuba A. A. 1991, “*On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line*“, Math. USSR-Izv., vol. 36, № 2, pp. 311–324.
8. Karatsuba A. A. 1992, “*On the zeros of a special type of function connected with Dirichlet series*“, Math. USSR-Izv., vol. 38, № 3, pp. 471–502.
9. Karatsuba A. A., 1993, “*On the zeros of a class of functions generated by the Hurwitz function*“, Russian Math. Surveys, vol. 48, № 5, 175–176.
10. Karatsuba A. A. 1994, “*On the zeros of arithmetic Dirichlet series without Euler product*“, Russian Acad. Sci. Izv. Math., vol 43, № 2, pp. 193–203.

11. Karatsuba A. A. 1995, “*A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series*“, Proc. Steklov Inst. Math., vol 207, pp. 163–177.
12. Karatsuba A. A. 2002, “*Fractional Moments and Zeros of $\zeta(s)$ on the Critical Line*“, Math. Notes, vol. 72, 4, 466–472.
13. Titchmarsh E. C. 1986, “*The Theory of the Riemann Zeta-function*“ 2-nd edition, Oxford University Press, New York.
14. Heath-Brown D. R. 1981, “*Fractional moments of Riemann zeta-function*“, J. Lond. Math. Soc., vol. 24, № 2, pp. 65–78.
15. Ivić A. 1985, “*The Riemann Zeta-function*“ John Wiley and Sons, New York.