ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-127-138

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ
ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ-ХАМЕЛЕОНОВ

И. М. Буркин (Тула)

Аннотация

Сегодня хорошо известно, что динамические системы можно подразделить на системы с самовозбуждающимися и системы со скрытыми аттракторами. Самовозбуждающийся аттрактор имеет область притяжения, которая примыкает к неустойчивым состояниям равновесия системы, в то время как скрытые аттракторы имеют области притяжения, не пересекающиеся с малыми окрестностями ни одного из состояний равновесия. Скрытые аттракторы играют важную роль в инженерных приложениях, поскольку их наличие вызывает неожиданные и потенциально опасные ответы на возмущения, например, в таких структурах как мост, или крыло самолета. Кроме того, сложное поведения хаотических систем используют в различных областях, от таких, как изображения водяных знаков, аудио схема шифрования, хаотическая маскировка коммуникаций, до генераторов случайных чисел. Недавно исследователями были обнаружены так называемые "системы-хамелеоны". Эти системы были так названы потому, что они демонстрируют самовозбуждающиеся или скрытые колебания в зависимости от значений входящих в них параметров. В настоящей работе предлагается простой алгоритм синтеза однопараметрических систем-хамелеонов. Отслеживается эволюция ляпуновских показателей и размерности Каплана-Йорке таких систем при изменении параметра.

Ключевые слова: самовозбуждающийся аттрактор, скрытый аттрактор, мультистабильность, цикл, бифуркация, система-хамелеон, показатели Ляпунова, размерность Каплана-Йорке.

Библиография: 21 названий.

ABOUT ONE APPROACH TO CONSTRUCTION
OF CHAOTIC CHAMELEONS SYSTEMS

I. M. Burkin (Tula)

Abstract

Now it is well known that dynamical systems can be categorized into systems with self-excited attractors and systems with hidden attractors. A self-excited attractor has a basin of attraction that is associated with an unstable equilibrium, while a hidden attractor has a basin of attraction that does not intersect with small neighborhoods of any equilibrium points. Hidden attractors play the important role in engineering applications because they allow unexpected and potentially disastrous responses to perturbations in a structure like a bridge or an airplane wing. In addition, complex behaviors of chaotic systems have been applied in various areas from image watermarking, audio encryption scheme, asymmetric color pathological image encryption, chaotic masking communication to random number generator. Recently so-called chameleons systems have been found out by researchers. These systems were so are named for the reason, that they shows self-excited or hidden oscillations depending on the value of parameters entering into them. In the present work the simple algorithm of synthesizing of one-parametrical chameleons systems is offered. Evolution Lyapunov exponents and Kaplan-Yorke dimension of such systems at change of parameter is traced.

Keywords: self-excited attractor, hidden attractor, multistability, cycle, bifurcation, chameleon system, Lyapunov exponents, Kaplan–Yorke dimension.

Bibliography: 21 titles.

1. Введение

Колебания динамической системы могут быть легко локализованы численно, если все начальные данные из его открытой окрестности в фазовом пространстве (за исключением, может быть, конечного числа точек) приводят к переходному процессу, который приближается к колебанию. Такое колебание называют аттрактором, а его притягивающее множество, то есть множество точек, которые притягиваются к аттрактору, называют бассейном притяжения. На ранних этапах исследования реальных динамических систем их структура была, как правило, столь простой, что был очевидным факт ограниченности всех траекторий системы и возможность возбуждения колебаний только из окрестностей неустойчивых состояний равновесия [1–3]. Таким образом, ученые того времени могли легко вычислить аттракторы исследуемых систем, "запуская" вычислительную процедуру из малой окрестности неустойчивого состояния равновесия, отслеживая переходный процесс, который выводил на аттрактор и локализовал его. Аттракторы, бассейн притяжения которых содержит сколь угодно малые окрестности неустойчивых состояний равновесия, получили название "*самовозбуждающиеся аттракторы*". В настоящее время тысячи публикаций посвящены вычислению и анализу самовозбуждающихся хаотических колебаний динамических систем.

Дальнейшее изучение динамических систем показало, что самовозбуждающиеся периодические и хаотические колебания не дают исчерпывающую информацию о возможных типах поведения динамических систем. Были найдены колебания другого типа, которые в работе [4] получили название "*скрытые колебания*" и "*скрытые аттракторы*". Так было предложено называть аттракторы, бассейн притяжения которых не пересекается с малыми окрестностями состояний равновесия. Локализация и аналитическое изучение характеристик скрытых аттракторов представляет значительно более сложную проблему, поскольку невозможно использовать информацию о состояниях равновесия системы для организации переходных процессов с использованием стандартных вычислительных процедур. Более того, нет никакой гарантии, что вычислительная процедура "выйдет" на аттрактор, поскольку его область притяжения может быть очень малой, а его размерность может быть много меньше размерности изучаемой системы.

Системы, обладающие скрытыми аттракторами, являются мультистабильными, и потому контроль работы таких систем является достаточно сложной задачей [5,6]. Последнее обстоятельство побудило многих исследователей обратиться к поиску и исследованию особенности динамики систем, обладающих скрытыми аттракторами. Были, например, изучены системы, не имеющие состояний равновесия [7–9], имеющие единственное состояние равновесия [10,11], имеющие бесконечное число состояний равновесия [12,13]. Недавно в работе [14] были обнаружена гиперхаотическая четырехмерная система, обладающая одновременно самовозбуждающимися и скрытыми аттракторами. Наконец, в работе [15] было введено новое понятие "системы-хамелеоны". Так было предложено называть системы, которые в зависимости от значений входящих в них параметров, могут обладать либо самовозбуждающимися, либо скрытыми аттракторами.

В настоящей работе предлагается использовать метод гомотопии для синтеза однопараметрических систем-хамелеонов. Показано, что при изменении параметра в таких системах меняется не только тип аттрактора, но также его ляпуновские показатели и размерность Каплана–Йорке.

2. Основная идея

Основная идея использования метода гомотопии для построения систем-хамелеонов состоит в следующем. Рассматривается однопараметрическое семейство динамических систем

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \varepsilon \in [0, 1], x \in R^n \quad (1)$$

такое, что при малых $\varepsilon > 0$ система (1) имеет легко обнаруживаемые самовозбуждающиеся орбитально асимптотически устойчивые циклы или самовозбуждающиеся хаотические аттракторы. Численно отслеживается эволюция этих циклов или аттракторов при возрастании ε до 1. При некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ происходит бифуркация, при которой меняется тип аттракторов системы. Например, некоторые состояния равновесия системы становятся устойчивыми в малом и из их окрестностей перестают возбуждаться аттракторы, а самовозбуждающиеся орбитально устойчивые циклы трансформируются в скрытые циклы или скрытые хаотические аттракторы. При $\varepsilon = 1$ все аттракторы системы являются скрытыми.

Ясно, что ключевым моментом в реализации описанной идеи является построение функции $f(x, \varepsilon)$, для которой имеет место описанный выше сценарий. Один из методов построения функции с нужными свойствами для класса систем вида

$$\frac{dX}{dt} = AX + B\xi, \xi = \varphi(\varepsilon, \sigma), \sigma = C^*X \quad (2)$$

предложен в работе [16]. В системе (2) A, B, C — вещественные постоянные матрицы порядков, соответственно, $n \times n$, $n \times m$ и $n \times m$, где $m \leq n$, $x \in R^n, \xi_j = \varphi_j(\varepsilon, \sigma_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Функции $\varphi_j(\varepsilon, \sigma_j)$ — непрерывные, дифференцируемые при $\sigma_j = 0, \varepsilon \in [0, 1]$. Знак (*) в записи (2) означает транспонирование, а ниже в комплексном случае — эрмитово сопряжение. Для упрощения дальнейшего изложения приведем здесь формулировку теоремы, доказанной в [16] в удобной для нас форме.

Обозначим через $W(p) = C^*(A - pI_n)^{-1}B$, где p — комплексная переменная, передаточную $m \times m$ -матрицу системы (2). Относительно функций $\varphi_j(\varepsilon, \sigma_j)$ будем предполагать выполненными условия

$$\mu_j^1 \leq \frac{\varphi_j(\varepsilon, \sigma_{j2}) - \varphi_j(\varepsilon, \sigma_{j1})}{\sigma_{j2} - \sigma_{j1}} \leq \mu_j^2 \text{ для всех } \sigma_j \in (-\infty, \infty), \sigma_{j1} \neq \sigma_{j2}, \varphi_j(\varepsilon, 0) = 0, j = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

Предположения (3), очевидно, означают, что система (2) имеет решение (точку покоя) $x = 0$. Ниже будем считать, что это единственная точка покоя системы (2) при $\varepsilon = \varepsilon_0 \in [0, 1]$. Условия, гарантирующие выполнение последнего предположения, приведены в [16, Лемма 2].

ТЕОРЕМА. Пусть для $\varepsilon = \varepsilon_0$ нелинейности $\varphi_j(\varepsilon_0, \sigma_j)$ в системе (2) удовлетворяют соотношениям (3) и существует число $\lambda > 0$ такое, что выполнены следующие условия.

1) Матрица $A + B\varphi'(\varepsilon_0, 0)C^*$, где $\varphi'(\varepsilon_0, 0) = \text{diag}(\varphi'_1(\varepsilon_0, 0), \dots, \varphi'_m(\varepsilon_0, 0))$, имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \leq \text{Re} p \leq 0$.

2) Система (2) диссипативна по Левинсону. Например, матрица $A + BhC^*$, где $h = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_m)$ является гурвицевой и $|\varphi(\varepsilon_0, \sigma) - hC^*X| < \gamma < \infty$.

3) При всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\det \text{Re}[I_m + \mu^1 W(i\omega - \lambda)]^* [I_m + \mu^2 W(i\omega - \lambda)] \neq 0, \mu^k = \text{diag}(\mu_1^k, \mu_2^k, \dots, \mu_m^k), k = 1, 2. \quad (4)$$

Тогда система (2) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $X = 0$.

Рис. 22

Ниже будут продемонстрированы примеры построения систем-хамелеонов, опирающиеся на использование сформулированной теоремы.

3. Система-хамелеон с двумя нелинейностями

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1.241x_1 + 8.45x_2 - 8.45[\varepsilon \frac{x_1^4+0.2}{0.34x_1^4+0.2} \tanh x_1 + (1-\varepsilon)\psi_1(x_1)], \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 + 0.1[\varepsilon x_2^3 + (1-\varepsilon)\psi_2(x_2)], \\ \dot{x}_3 &= -12.1x_2 - 0.005x_3,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\text{где } \psi_1(x_1) = \begin{cases} 0.18x_1 - 0.11, & x \leq -0.5, \\ 0.4x_1, & |x| \leq 0.5, \\ 0.18x_1 + 0.11, & x \geq 0.5, \end{cases}, \quad \psi_2(x_2) = 0.5x_2.$$

Эта система может быть записана в виде (2) с

$$A = \begin{pmatrix} 1.241 & 8.45 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -12.1 & -0.005 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -8.45 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(\varepsilon, \sigma_1) = \varepsilon \frac{x_1^4+0.2}{0.34x_1^4+0.2} \tanh \sigma_1 + (1-\varepsilon)\psi_1(\sigma_1), \quad \varphi_2(\varepsilon, \sigma_2) = \varepsilon \sigma_2^3 + (1-\varepsilon)\psi_2(\sigma_2).$$

Можно убедиться, что для рассматриваемой системы выполнено соотношение (4) для $\lambda = 0.6$, $\mu^2 = \text{diag}(0.77, 1)$, $\mu^1 = \text{diag}(0.17, 0)$. Как нетрудно проверить, для системы (5) при $\varepsilon = 0$ выполнены все условия теоремы и, следовательно, она имеет самовозбуждающийся из ее единственного состояния равновесия $(0, 0, 0)$ орбитально устойчивый цикл. При $\varepsilon \approx 0.827$ это состояние равновесия становится устойчивым в малом и появляется орбитально устойчивый скрытый цикл системы. Наконец, при $\varepsilon = 1$ система имеет хаотический аттрактор, представленный на рисунке 1.

При этом система (5) имеет 3 состояния равновесия $(0, 0, 0)$ и $(\pm 3.3862, \pm 1.3987 \times 10^{-3}, \mp 3.3862)$. Нулевое состояние равновесия устойчиво в малом, а два других состояния равновесия являются седло-фокусами. Отметим, что точка с координатами $(3.386, 1.3987 \times$

$\times 10^{-3}, -3.386)$ находится в области притяжения найденного аттрактора, тогда как траектория, начинающаяся в близкой точке $(3.386, 1.3987 \times 10^{-2}, -3.386)$ очень быстро "уходит на бесконечность". То есть аттрактор является скрытым.

Вычислим ляпуновские показатели и размерность Каплана-Йорке найденного при $\varepsilon = 1$ аттрактора. Напомним, что для вычисления размерности Каплана-Йорке D_{KY} необходимо вычислить ляпуновские показатели $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ системы. Тогда $D_{KY} = k + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) |\lambda_{k+1}|^{-1}$, где число k такое, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0$, а $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0$. Для аттрактора рассматриваемой системы находим $\lambda_1 = 0.2344862$, $\lambda_2 = -0.1387071$, $\lambda_3 = -1.1398013$, $D_{KY} = 2.0840314$. Наличие положительного старшего показателя Ляпунова и дробность размерности Каплана-Йорке свидетельствуют о том, что аттрактор, представленный на рис.1, является странным хаотическим аттрактором.

4. Система "гипертолчка"

Простейшими системами, в которых были обнаружены хаотические аттракторы, являются так называемые "системы толчка" ("Jerk Systems") [17], которые описываются уравнениями вида $\frac{d^3x}{dt^3} = J\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x\right)$, где функцию J называют "толчком" поскольку она порождается одной скалярной переменной x , а в системе Ньютона величины $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^3x}{dt^3}$ есть, соответственно, смещение скорости, ускорение и толчок. В работе [18] рассмотрена так называемая "система гипертолчка" ("Hyperjerk System") $\frac{d^4x}{dt^4} = J\left(\frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x\right)$ специального вида, в которой найден самовозбуждающийся из её единственного состояния равновесия хаотический аттрактор. С использованием результатов работы [18] ниже будет построена однопараметрическая система-хамелеон. Рассмотрим систему

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{dx}{dt} + x = -\varphi\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \varepsilon\right), \quad (6)$$

где функция $\varphi\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \varepsilon\right)$ будет построена ниже. Система (6) может быть записана в виде (2) где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\ddot{x}} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma = C^*X. (6')$$

Положим

$$\varphi(\sigma, \varepsilon) = 2\varepsilon \cdot \arctg(4\sigma) \exp\left(\frac{\sigma}{3}\right) + (1 - \varepsilon) \frac{4(\sigma^3 + 3\sigma)}{\sigma^2 + 4} \quad (7)$$

Для рассматриваемой системы $W(p) = p^2(p^4 + p^3 + 3p + 1)^{-1}$. Для такой передаточной функции выполнено соотношение (4) при $\mu_1 = 3, \mu_2 = 4.5, \lambda = 0.3$. График функции (7) при $\varepsilon = 0$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = 0$ с прямой $\sigma + W(0)\varphi = 0$. Поэтому при $\varepsilon = 0$ система (2)-(6') имеет единственное состояние равновесия $X = 0$. Как нетрудно убедиться, при $\varepsilon = 0$ справедливы соотношения (3) с указанными μ_1 и μ_2 , а также условия 1) и 2) теоремы для $h = 4$. Поэтому, согласно утверждению теоремы, при $\varepsilon = 0$ система (2)-(6') имеет самовозбуждающийся аттрактор (цикл). Поскольку при всех $\varepsilon \in [0, 1]$ график функции $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ поочередно пребывает в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2 системы (2)-(6'), то из результатов работы [19] следует, что при всех $\varepsilon \in [0, 1]$ система (6) с

Рис. 23: ($\varepsilon = 0$) Рис. 24: ($\varepsilon = 0.2$)

нелинейностью (7) может иметь аттрактор (самовозбуждающийся при $\varepsilon \in [0, \frac{1}{15})$ и скрытый при $\varepsilon \in (\frac{1}{15}, 1]$).

Пользуясь приемом, предложенным в работе [16], отследим численно эволюцию существующего при $\varepsilon = 0$ самовозбуждающегося цикла системы при изменении ε от 0 до 1. На рисунке 2 представлена проекция на плоскость (x_1, x_4) самовозбуждающегося при $\varepsilon = 0$ цикла, полученного интегрированием системы с начальными условиями $(0.1, 0.1, -0.2, -0.2)$. На рисунке 3 проекция на ту же плоскость скрытого цикла при $\varepsilon = 0.2$.

При $\varepsilon \approx 0.637$ наблюдается удвоение периода скрытого цикла (рис.4), а при $\varepsilon \approx 0.826$ — учетверенный период (рис.5). Приведены проекции на плоскость (x_2, x_3) .

На рисунках 6 и 7 представлены проекции на плоскость (x_1, x_4) скрытого странного аттрактора системы (6) при $\varepsilon = 0.88$ и $\varepsilon = 1$. Для этих аттракторов вычислены ляпуновские

Рис. 25: ($\varepsilon = 0.637$)

Рис. 26: ($\varepsilon = 0.826$) Рис. 27: ($\varepsilon = 0.88$) Рис. 28: ($\varepsilon = 1$)

показатели и размерности Каплана-Йорке, приведенные в таблице 1

Таблица 1

ε	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	D_{KY}
0.88	0,1045429	-0,0290923	-0,2226633	-0,8609476	2,3755037
1	0,0611581	-0,0132200	-0,1323177	-0,9156204	2,3622955

5. Системы-хамелеоны с бесконечным числом состояний равновесия

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Pz + q\varphi(\sigma, \varepsilon), \\ \dot{\sigma} &= r^*z + \beta\varphi(\sigma, \varepsilon),\end{aligned}\quad (8)$$

где P — $(n-1) \times (n-1)$ матрица, q и r — $(n-1)$ -векторы, β — скаляр, $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ — 2π -периодическая по σ функция. Уравнений вида (8) описывают широкий класс систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). В настоящее время различные модификации ФАПЧ широко используются в системах радиосвязи, телекоммуникационных системах, системах глобального позиционирования (GPS), компьютерных архитектурах и другие областях. Если функция $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ при некотором значении ε имеет нули на периоде $[0, 2\pi)$, то система (8) имеет бесконечное число состояний равновесия.

В работе [20] найдены системы вида (8), обладающие бесконечным числом скрытых аттракторов. Опираясь на результаты этой работы, ниже построена система-хамелеон, демонстрирующая, при различных значениях параметра ε , как самовозбуждающиеся мультивитковые аттракторы, так и скрытые аттракторы-близнецы.

Положим

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -15.8 \\ -0.3 \end{pmatrix}, \beta = -3.2,$$

$$\varphi(\varepsilon, \sigma) = \frac{\pi}{6}[1.00052411 \sin \sigma + \varepsilon(0.404720835 \sin 2\sigma + 0.1798759 \sin 3\sigma + 0.062532677 \sin 4\sigma)]$$

При $\varepsilon \in [0, 0.78)$ аттракторы самовозбуждаются из любой точки окрестностей всех состояний равновесия системы $z_1 = z_2 = 0, \sigma = \pi m, m \in \mathbb{Z}$ и являются мультивитковыми аттракторами. Пара таких аттракторов для $\varepsilon = 0.2$, возбуждающихся из окрестностей точки $(0, 0, 0)$ (синий) и $(0, 0, \pi)$ (красный), представлена на рисунке 8.

При $\varepsilon \approx 0.78$ состояния равновесия $(0, 0, 2\pi m)$ становятся устойчивыми в малом, а из окрестностей неустойчивых состояний равновесия $(0, 0, (2m+1)\pi)$ возбуждаются аттракторы, представленные на рис. 9.

При $\varepsilon = 1$ исследуемая система имеет бесконечное число скрытых аттракторов - близнецов, представленных на рис 10. Каждая пара этих аттракторов расположена в своей "полосе" $\pi(2k-1) < \sigma < \pi(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Ляпуновские показатели и размерность Каплана-Йорке аттракторов, представленных на рисунках 8-10, приведены в таблице 2.

Таблица 2

ε	λ_1	λ_2	λ_3	D_{KY}
0.2	0.2226039	-0.0048410	-2.70566	2.0804842
0.78	0.4235692	-0.0539937	-1.2663746	2.2918375
1	0.666114	-0.0426294	-1.0348001	2.1055671

Рис. 29: ($\varepsilon = 0.2$) Рис. 30: ($\varepsilon = 0.78$, проекция на (z_2, σ)) Рис. 31: Семейство скрытых аттракторов (проекция на плоскость (z_2, σ) , $\varepsilon = 1$)

6. Заключение

В данной работе предложен алгоритм синтеза однопараметрических динамических систем-хамелеонов вида (2). Автору известны примеры синтеза систем-хамелеонов иного вида. Например, в работе [21], по сути дела, была построена система-хамелеон, которая при некоторых значениях параметра имеет самовозбуждающийся аттрактор, принадлежащий обобщенной системе Лоренца. При изменении параметра в некотором диапазоне указанный аттрактор трансформируется в скрытый аттрактор системы Глуховского–Должанского.

При наличии большого количества обнаруженных в настоящее время систем, обладающих как самовозбуждающимися, так и скрытыми аттракторами, остается открытым вопрос: можно ли локализовать скрытый аттрактор любой системы, отслеживая численно эволюцию самовозбуждающегося аттрактора некоторой вспомогательной системы при изменении ее параметров в некотором диапазоне?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lorenz, E. N. 1963, "Deterministic nonperiodic flow". J.Atmos.Sci., vol.20, pp.65 -75.
2. Rössler, O. E. 1976, "An Equation for Continuous Chaos". Physics Letters A, vol. 57, no.5, pp.397 -398.
3. Chua, L. O. 1992, "A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits". Proc. Of the IEEE 35th Midwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No.92CH3099-9). Washington, vol. 2, pp. 916 – 926.
4. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagitsev V. I. 2011 "Localization of hidden Chua's at-tractors". Phys. Lett. A, vol. 375, pp.2230-2233.
5. Sharma P. R. , Shrimali M.D , Prasad A , Kuznetsov N.V , Leonov G.A. 2015, "Control of multistability in hidden attractors". Eur Phys J Spec Top; vol. 224,no.8, pp.1485–1491 .
6. Sharma P. R. , Shrimali M.D , Prasad A , Kuznetsov N.V , Leonov G.A . 2015, "Controlling dynamics of hidden attractors".Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 25, no.4:1550061.
7. Pham V-T, Volos C. , Jafari S. , Wei Z. , Wang X . 2014, "Constructing a novel no-equilibrium chaotic system". Int J Bifurcation and Chaos, vol. 24,no.5:1450073 .
8. Tahir F. R. , Jafari S. , Pham V-T. , Volos C , Wang X . 2015, "A novel no-equilibrium chaotic system with multiwing butterfly attractors". Int J Bifurcation and Chaos, vol.25, no.4:1550056.
9. Jafari S, Pham V-T., Kapitaniak T . 2016, "Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3d system without equilibrium". Int J Bifurcation and Chaos, vol.26,no.2:1650031.
10. Molaie M., Jafari S., Sprott J. C., Golpayegani SMRH 2013, "Simple chaotic flows with one stable equilibrium". Int J Bifurcation and Chaos, vol.23, no.11:1350188.
11. Kingni S. T., Simo H., Wofo P. 2014, "Three-dimensional chaotic autonomous system with only one stable equilibrium: analysis, circuit design, parameter estimation, control, synchronization and its fractional-order form". Eur Phys J Plus, vol.129, no.5, pp.1–16 .
12. Pham V-T , Jafari S., Volos C. , Giakoumis A/ , Vaidyanathan S. , Kapitaniak T. 2016, "A chaotic system with equilibria located on the rounded square loop and its circuit implementation". IEEE Trans Circuits Syst II, vol.63,no.9, pp.878–882.

13. Pham V-T., Jafari S., Volos C., 2017, "A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuital implementation". *Optik*, vol. 131, pp. 343–349.
14. Rajagopal K., Karthikeyan A., Duraisamy P. 2017, "Hyperchaotic chameleon: fractional order FPGA implementation". *Complexity* Volume 2017. Available at: <https://www.hindawi.com/journals/complexity/aip/8979408/>.
15. Rajagopal K., Akgul A. , Jafari S. , Karthikeyan A., Koyuncu I. 2017, " Chaotic chameleon: Dynamic analyses, circuit implementation, FPGA design and fractional-order form with basic analyses". *Chaos, Solitons and Fractals*, vol.103, pp.476-487.
16. Буркин И. М., Нгуен Нгок Хиен. Аналитико-численные методы поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах // *Диф. уравнения*, 2014, т. 50, № 13. С.1695–1717.
17. Sprott, J. C. 2011, "A new chaotic jerk circuit". *IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Expr. Briefs*, vol. 58, pp. 240–243.
18. Sprott, J. C., Fatma Y. D., 2016, "Simple Chaotic Hyperjerk System". *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no.11: 1650189.
19. Буркин И. М. О явлении буферности в многомерных динамических системах // *Диф. уравнения*, 2002, т.38, №5. С. 615-625.
20. Буркин И. М. Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконечным числом состояний равновесия // *Чебышевский сборник*, 2017, т.18. № 2 (62). С. 18-33.
21. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. 2015, "Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion". *The European Physical Journal Special Topics, Multistability: Uncovering Hidden Attractors*, vol. 224, no. 8, pp. 1421–1458, doi:10.1140/epjst/e2015-02470-3.

REFERENCES

1. Lorenz, E. N. 1963, "Deterministic nonperiodic flow". *J. Atmos. Sci.*, vol.20, pp.65 -75.
2. Rössler, O. E. 1976, "An Equation for Continuous Chaos". *Physics Letters A*, vol. 57, no.5, pp.397 -398.
3. Chua, L. O. 1992, "A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits". *Proc. Of the IEEE 35th Midwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No.92CH3099-9)*. Washington, vol. 2, pp. 916 – 926.
4. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagitsev V. I. 2011 "Localization of hidden Chua's attractors". *Phys. Lett. A*, vol. 375, pp.2230-2233.
5. Sharma P. R. , Shrimali M. D. , Prasad A , Kuznetsov N. V , Leonov G. A. 2015, "Control of multistability in hidden attractors". *Eur Phys J Spec Top*; vol. 224,no.8, pp.1485–1491 .
6. Sharma P. R. , Shrimali M. D. , Prasad A , Kuznetsov N. V , Leonov G. A. 2015, "Controlling dynamics of hidden attractors". *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 25, no.4:1550061.
7. Pham V-T, Volos C. , Jafari S. , Wei Z. , Wang X . 2014, "Constructing a novel no-equilibrium chaotic system". *Int J Bifurcation and Chaos*, vol. 24,no.5:1450073 .

8. Tahir F.R. , Jafari S. , Pham V-T. , Volos C , Wang X . 2015, "A novel no-equilibrium chaotic system with multiwing butterfly attractors". *Int J Bifurcation and Chaos*, vol.25, no.4:1550056.
9. Jafari S, Pham V-T., Kapitaniak T . 2016, "Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3d system without equilibrium". *Int J Bifurcation and Chaos*, vol.26,no.2:1650031.
10. Molaie M., Jafari S., Sprott J.C., Golpayegani SMRH 2013, "Simple chaotic flows with one stable equilibrium". *Int J Bifurcation and Chaos*, vol.23, no.11:1350188.
11. Kingni S.T.,, Simo H., Wofo P. 2014, "Three-dimensional chaotic autonomous system with only one stable equilibrium: analysis, circuit design, parameter estimation, control, synchronization and its fractional-order form". *Eur Phys J Plus*, vol.129, no.5, pp.1–16 .
12. Pham V-T , Jafari S., Volos C. , Giakoumis A/ , Vaidyanathan S. , Kapitaniak T. 2016, "A chaotic system with equilibria located on the rounded square loop and its circuit implementation". *IEEE Trans Circuits Syst II*, vol.63,no.9, pp.878–882.
13. Pham V-T., Jafari S., Volos C., 2017, "A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuit implementation". *Optik*, vol. 131, pp. 343–349.
14. Rajagopal K., Karthikeyan A., Duraisamy P. 2017, "Hyperchaotic chameleon: fractional order FPGA implementation". *Complexity Volume 2017*. Available at: <https://www.hindawi.com/journals/complexity/aip/8979408/>.
15. Rajagopal K., Akgul A. , Jafari S. , Karthikeyan A., Koyuncu I. 2017, "Chaotic chameleon: Dynamic analyses, circuit implementation, FPGA design and fractional-order form with basic analyses". *Chaos, Solitons and Fractals*, vol.103, pp.476-487.
16. Burkin I.M., Nguen N.K. 2014, "Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems". *Diff. Equations*, vol. 50, no. 13, pp. 1695–1717.
17. Sprott, J. C. 2011, "A new chaotic jerk circuit". *IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Expr. Briefs*, vol. 58, pp. 240–243.
18. Sprott, J. C., Fatma Y. D., 2016, "Simple Chaotic Hyperjerk System". *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no.11: 1650189.
19. Burkin I.M. 2002, "The buffer phenomenon in multidimensional dynamical systems". *Diff. Equations*, vol.38, no.5, pp.615-625.
20. Burkin I.M. 2017, "Hidden attractors of some multistable systems with infinite number of equilibria". *Chebyshevskiy sbornik*, vol.18. no 2 (62), pp. 18-33.
21. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. 2015, "Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion". *The European Physical Journal Special Topics, Multistability: Uncovering Hidden Attractors*, vol. 224, no. 8, pp. 1421–1458, doi:10.1140/epjst/e2015-02470-3.