ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-106-114

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА КОРОТКИХ ОТРЕЗКАХ

В.И. Берник (г. Минск), Н.В. Бударина (г. Москва), А.В. Луневич (г. Минск), Х. О'Доннел (г. Йорк)

Аннотация

В работе получены оценки сверху и снизу количества нулей функций специального вида, а также оценка меры множества точек в которых такие фукции принимают малые значения. Пусть $f_1(x),\ ...,\ f_n(x)$ функции определенные на интервале $I,\ n+1$ раз дифференцируемы и вронскиан из производных почти везде на I отличен от 0. Такие функции называются невырожденными. Задача о распределении нулей функции $F(x) = a_n f_n(x) + \ ...\ + a_1 f_1(x) + a_0,\ a_j \in Z,\ 1 \leq j \leq n$ имеет важное значение в метрической теории диофантовых приближений.

Пусть $Q > 1$ достаточно большое целое число, а интервал I имеет длину $Q^{-\gamma},\ 0 \leq \gamma < 1$. В работе получены оценки сверху и снизу для количества нулей функции $F(x)$ на интервале I, при $|a_j| \leq Q,\ 0 \leq \gamma < 1$. При $\gamma = 0$ такие оценкибыли получены А. С. Пяртли, В. Г. Спринджуком, В. И. Берником, В. В. Бересневичем, Н. В. Будариной.

Ключевые слова: невырожденные функции, нули невырожденных функций.

Библиография: 22 названия.

DISTRIBUTION OF ZEROS OF NONDEGENERATE FUNCTIONS ON SHORT CUTTINGS

V. I. Bernik (Minsk), N.V. Budarina (Moscow), A.V. Lunevich (Minsk), H. O'Donnel (York)

Abstract

The paper presents newly obtained upper and lower bounds for the number of zeros for functions of a special type, as well as an estimate for the measure of the set where these functions attain small values. Let $f_1(x),\ ...,\ f_n(x)$ be functions differentiable on the interval I, $n+1$ times and Wronskian from derivatives almost everywhere on I is different from 0. Such functions are called nondegenerate. The problem of the distribution of the zeros of the function $F(x) = a_n f_n(x) + \ ...\ + a_1 f_1(x) + a_0,\ a_j \in Z,\ 1 \leq j \leq n$ is important in the metric theory of Diophantine approximations.

Let $Q > 1$ be a sufficiently large integer, and the interval I has length $Q^{-\gamma},\ 0 \leq \gamma < 1$. We obtain upper and lower bounds for the number of zeros of the function $F(x)$ on the interval I, with $|a_j| \leq Q,\ 0 \leq \gamma < 1$. For $\gamma = 0$ such estimates were obtained by A. S. Pyartli, V. G. Sprindzhuk, V. I. Bernik, V. V. Beresnevitch, N. V. Budarina.

Keywords: nondegenerate functionsons, zeros of nondegenerate functionsons.

Bibliography: 22 titles.

1. Введение

К задаче о количестве и распределении действительных нулей многочленов

$$P = (x) = a_n x^n + a_{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

как в математическом анализе, теории чисел и теории вероятностей в последние годы приковано большое внимание [1, 2, 3, 18, 19, 20, 21, 22].

Основой результатов статей [4, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] является метрическая теорема о свойствах множеств разрешимости неравенств вида $|P_n(x)| < Q^{-w},\ w > 0$ и распределений действительных корней $P_n(x)$ при достаточно большом Q и многочленах $P_n(x)$ степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j| \le Q$.

В данной работе мы обобщаем эти результаты на класс функций

$$\mathcal{F}_l\left(Q, \bar{f}\right) = \{F_n(x) \ : \ H(F_n) \le Q\},\ l_i = \max_{x \in I} |f_i(x)|,\ l = \max_{0 \le i \le n} \{l_i\} \tag{1}$$

где

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + ... + a_1 f_1(x) + a_0,$$

функции $f_1(x),\ f_2(x),\ ...,\ f_n(x)$ — $n+1$-раз непрерывно-дифференцируемы и вронскиан их производных

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & ... & f_n'(x) \\ f_1''(x) & ... & f_n''(x) \\ . & . & . \\ f_1^n(x) & ... & f_n^n(x) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля для всех всех x (в смысле меры Лебега) на интервале I. Такие функции $f_1(x),\ ...,\ f_n(x)$ будем называть невырожденными на I.

2. Основной текст статьи

Теорема 1. *На любом интервале $I, \mu I = Q^{-\gamma},\ 0 \le \gamma \le 1$ количество нулей функций $F_n(x) \in \mathcal{F}_l\left(Q, \bar{f}\right)$ не превосходит $c_1 n l 2^{n+3} Q^{n+1} \mu I$.*

Теорема 2. *Существует $c_2 > 0$, что на любом интервале $I, \mu I = Q^{-\gamma},\ 0 < \gamma < \gamma_0$ не менее $c_2 Q^{n+1} \mu I$ количество нулей функций $F_2(x) \in \mathcal{F}_l\left(Q, \bar{f}\right)$.*

Теорема 3. *Обозначим через $M_2(I,\ Q)$ множество $x \in I$, для которых система неравенств*

$$(|F_2(x))| < Q^{-2},\ \left|F'(x)\right| < \delta_0 Q$$

имеет решение хотя бы для одной функции $F_2 \in \mathcal{F}_2(Q)$. Тогда при достаточно малом δ_0 справедливо неравенство

$$\mu M_2(I,\ Q) < \frac{1}{4}\mu I. \tag{2}$$

Покажем как из теоремы 3 следует теорема 2. Введем множество $B_1 = I \backslash M_2(I,\ Q)$. Из (2) следует, что

$$\mu B_1 \ge \frac{3}{4}\mu I. \tag{3}$$

Пусть $x \in B_1$. С помощью принципа ящиков Дирихле нетрудно доказать, что существует функция $F_2 \in \mathcal{F}_2(Q)$ такая, что

$$|F_2(x)| < c_3 Q^{-2}. \tag{4}$$

Так как $x \in B_1$, то наряду с (4) верно неравенство

$$\left|F_2'(x)\right| \geq \delta_0 Q. \qquad (5)$$

Неравенство (5) определяет интервал T_1 с центром в точке x_1 меры

$$\mu T_1 = 2c_3\delta_0^{-1}Q^{-3}. \qquad (6)$$

Возьмем точку $x_2 \in B_2 \subset I \backslash M_2(I,\ Q) \backslash T_1$ и аналогичным образом найдем другую функцию $F_2 \in \mathcal{F}_2(Q)$, у которой действительный корень α_2 удовлетворяет неравенству

$$|x_2 - \alpha_2| < c_4\delta_0^{-1}Q^{-3}.$$

Такую процедуру можно продолжать и строить t нулей функции $F_2 \in \mathcal{F}_2(Q)$ до тех пор, пока выполняется неравенство $t \cdot 2c_5\delta_0^{-1}Q^{-3} < \frac{3}{4}\mu I$, откуда следует, что количество нулей не менее

$$|x_2 - \alpha_2| < c_5 2^3\delta_0^{-1}Q^{-3}\mu I.$$

Прежде, чем приступить к доказательству теорем приведем несколько лемм о невырожденных функциях. Всюду в дальнейшем

$$\max_{x\in(a,\ b)}\left|f'(x)\right| < c_6 \qquad (7)$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{N-1},\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *таковы, что* $\alpha_0 > 0,\ \alpha_k > \beta_k \geq 0$, $k = 1,\ \ldots,\ N-1$ *и* $0 < \beta < \infty$. *Пусть* $f\ :\ (a,\ b) \to \mathbb{R}$ *есть* N*-раз непрерывно дифференцируемая функция, такая, что* $\inf\limits_{x\in(a,\ b)}\left|f^{(N)}(x)\right| \geq \beta_n$. *Тогда множество* B_2 *тех* $x \in (a,\ b)$, *удовлетворяющих системе неравенств*

$$\left\{\begin{array}{l} |f(x) \leq \alpha_0| \\ \beta_k \leq \left|f^{(k)}\right| \leq \alpha_k\ \ (k = 1,\ \ldots,\ N-1) \end{array}\right).$$

является объединением не более $(N+1)/2$ *интервалов длины не более*

$$\min_{0\leq k\leq l\leq N} 3^{l-k+1}(\alpha_k/\beta_l)^{1/l-k}.$$

Лемма 1 следует из лемм 5 и 6 в [2].

Лемма 2 (6). *Существует постоянная* $\Delta_0 = \Delta_0(c_6,\ M)$ *такая, что для любого интервала* K *длиной не более* Δ_0 *для любой функции* $F_n(x) \in \mathcal{F}_I\left(Q, \bar{f}\right),\ H(F) \gg Q$,

$$\inf_{x\in I}\min_{1\leq j\leq n}\left|F^{(j)}\right| \gg Q.$$

Лемма 3 (6). *При условии* $x \in (a,\ b)$ *мера множества решений системы неравенств*

$$|F_n(x)| < \delta,\ \left|F'(x)\right| < K,\ H(F) \leq Q \qquad (8)$$

не превосходит $c_7\left(\delta K Q^{n-1}\right)^{\frac{1}{(n+1)(2n-1)}}$.

При $n = 2$ показатель степени в (8) равен 1/9.

Доказательство теоремы 1. Разложим функции $F_j(x)$ на интервале I в ряд Тейлора в нуле α_{1j} функции $F_j(x)$, лежащем в I.

$$F_j(x) = F_j(\alpha_{1j}) + F_j'(\alpha_{1j})(x-\alpha_{1j}) + \frac{1}{2}F_j''(\xi)(x-\alpha_{1j})^2,\ \xi \in (x,\ \alpha_{1j}).$$

Так как $F(\alpha_{1j}) = 0,\ |x-\alpha_{1j}| \le \mu I = Q^{-\gamma}$,

$$\left|F_j''(\xi_j)\right| < m_1 nQ,\ \left|F_j'(\alpha_{1j})(x-\alpha_{1j})\right| < nlQ^{1-\gamma},$$

то при достаточно большом Q имеем для всех $x \in I$ оценку

$$|F_j(x)| < 2nlQ^{1-\gamma}. \tag{9}$$

Введем вектор $\bar{b} = (a_n,\ \dots,\ a_1)$, состоящий из коэффициентов функции $F_j(x)$ и множество функций $F_j(x)$ с одним и тем же вектором $\bar{b}$ обозначим $\mathcal{F}(\bar{b})$. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\#\mathcal{F}(\bar{b}) = (2Q+1)^n < 2^{n+1}Q^n.$$

Занумеруем функции $F_j(x),\ j = 0, 1, ..., 2c_8 nl 2^{n+1}Q^{n+1}\mu I$, нули которых лежат на интервале I. образуем новые функции

$$R_j(x) = F_j(x) - F_0(x) = d_i$$

которые являются различными целыми числами и

$$\max|d_i| > 2nkQ^{1-\gamma}$$

вопреки (9). Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 3 поделим на три этапа в зависимости от величин модуля производной $|F_2'(x)|$ на интервале I. Обозначим через $\mathcal{L}(I,\ Q)$ множество $x \in I$, для которого выполняется неравенство

$$|F_2(x)| < Q^{-2},\ \left|F'(x)\right| < c_9 Q,$$

а через $\mathcal{L}_1(I,\ Q)$ множество $x \in I$, для которого выполняется система неравенств

$$|F_2(x)| < Q^{-2},\ Q^{\frac{5}{8}} < \left|F'(x)\right| < \delta_0 Q, \tag{10}$$

Предложение 1. *Справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_1(I,\ Q) < 2^{-4}\mu I. \tag{11}$$

Доказательство. Будем считать, что система неравенств (10) рассматривается на интервале монотонности функции $F_2(x)$. Тогда множество $x \in I$, для которых верна система неравенств (10) содержится в интервале, который можно записать в виде

$$\sigma(F) := \left\{x \in I\ :\ |x-\alpha_1(F)| < c_{10}Q^{-2}\left|F'(\beta_1)\right|\right\}). \tag{12}$$

Наряду с интервалами $\sigma(F)$ рассмотрим интервал

$$\sigma_1(F) := \left\{x \in I\ :\ |x-\alpha_1(F)| < c_{11}\left|F'(\beta_1)\right|\right\}). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует неравенство

$$\mu\sigma(F) < c_{11}c_{10}^{-1}Q^{-2}\mu\sigma_1(F). \tag{14}$$

Зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_1,\ a_2)$, координаты которого являются коэффициентами $F_2(x)$. Интервалы $\sigma_1(F)$, имеющие один и тот же вектор $\bar{b}$ объединим в один класс $\mathcal{F}_2(\bar{b})$. Покажем, что при подходящем выборе c_10 интервалы $\sigma_1(F_1)$ и $\sigma_1(F_2)$ не пересекаются. Предположим противное:

$$s_1 = \sigma_1(F_1) \cap \sigma_1(F_2) \neq$$

и $x_0 \in s_1$. Разложим функцию $F_j(x)$, $j = 1, 2$ на интервалах $\sigma_1(F_1)$ и $\sigma_1(F_2)$ в ряд Тейлора и оценим значения $|F_j(x_0)|$. Имеем

$$|F_j(x_0)| \leq |F_j(\alpha_1)| + \left|F_j'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + F_j(\xi_j)(x-\alpha_1)^2\right|, \ \xi_j \in (x_0, \ \alpha_1).$$

Нетрудно видеть, что

$$|F_j(x_0)| < 2c_{10}$$

и

$$\begin{gathered} R(x_0) = d \in \mathbb{Z}, \ d \neq 0, \\ |R(x_0)| = |F_2(x_0) - F_1(x_0)| < 4c_{10}. \end{gathered} \tag{15}$$

Неравенство (15) при $c_{10} = \frac{1}{8}$ противоречиво. Из того, что интервалы $\sigma_1(F)$ не пересекаются следует, что

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(\bar{b})} \mu\sigma_1(F) \leq \mu I. \tag{16}$$

Воспользуемся неравенством (16). тогда из (14) и (16) следует

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{F \in \mathcal{F}(\bar{b})} \mu\sigma(F) < 4c_{10}^{-1}\delta_0 \mu I < 2^{-4}\mu I,$$

поскольку из неравенства $|F'(x)| < \delta_0 Q$ следует, что a_1 принимает не более δQ значений.

Предложение 2. *Обозначим через $\mathcal{L}(I, \ Q)$ множество $x \in I$ для которых система неравенств*

$$|F_2(x)| < Q^{-2}, \ 1 \leq \left|F'(x)\right| \leq Q^{\frac{5}{8}}$$

имеет хотя бы одно решение в функциях $F_2(x) \in \mathcal{L}(I, \ Q)$. Тогда

$$\mu\mathcal{L}_2(I, \ Q) < 2^{-4}\mu I.$$

Доказательство. Введем при фиксированном $b = a_2$ класс функций с одним и тем же b, который обозначим $\mathcal{F}(b)$. Определим интервалы

$$\sigma_2 := \left\{x \in I \ : \ |x - \alpha_1|(F) < c_{12}Q^{-1}\left|F'(\beta_1)\right|^{-1}\right\} \tag{17}$$

из определения $\sigma(F)$ и $\sigma_2(F)$ следует

$$\mu\sigma(F) < c_{12}^{-1}\mu\sigma_2(F). \tag{18}$$

Интервал $\sigma_2(F_1)$ будем называть существенным, если не существует интервала $\sigma_2(F_2)$, $F_2 \in \mathcal{F}(b)$, такого что

$$\mu\sigma_2(F_1) \sup \sigma_2(F_2) > 0.5\mu\sigma_2(F_1). \tag{19}$$

Если же такой интервал найдется, т. е. при некотором $F_2(x) \in \mathcal{F}(b)$ выполняется неравенство

$$\mu\sigma_2(F_1) \sup \sigma_2(F_2) > 0.5\mu\sigma_2(F_1),$$

то интервал $\sigma_2(F_1)$ будем называть несущественным.

В случае существенных интервалов воспользуемся (18). Тогда из $\sum\limits_{F\in\mathcal{F}} \mu\sigma_2(F) < 2\mu I$ и (18) получим

$$\sum_b \sum_{F\in\mathcal{F}(b)} \mu\sigma(F) < c_{13}\mu I. \qquad (20)$$

В случае несущественных интервалов разложим функции $F_2(x)$ и $F_2'(x)$ на интервале $\sigma_2(F)$ в ряд Тейлора и оценим их модули сверху пользуяс (6). Получим систему неравенств

$$|a_1x + b| < c_{14}Q^{-1},\ |a_1| < 2Q^{\frac{5}{8}},$$

откуда

$$\left|x + \frac{b_1}{a_1}\right| < c_{14}Q^{-1}a_1^{-1}. \qquad (21)$$

Неравенство (21) выполняется для интервала с центром в точке $-\frac{b_1}{a_1}$ длиной $2c_{14}Q^{-1}a_1^{-1}$. Просуммируем эту величину по b_1, количество которых не превосходит $a_1\mu I$, а затем по $a_1,\ |a_1| < 2Q^{\frac{5}{8}}$. Получим оценку $c_{15}Q^{\frac{5}{8}-1}\mu I$, которая вместе с (20) завершает доказательство предложения 2.

Предложение 3. *Обозначим через B_3 множество решений системы неравенств*

$$|a_2f(x) + a_1x + a_0| < c_{16}Q^{-2},\ \left|a_2f'(x)\right| < c_{14}. \qquad (22)$$

Тогда

$$\mu B_3 < 2^{-4}\mu I.$$

Для доказательства предложения 3 применим к системе неравенств (10), (20) лемму 3 при $\delta = Q^{-3},\ c_{16} = K$. Получим

$$\mu B_3 < 2^{-4}Q^{\frac{1}{9}}$$

что меньше $2^{-4}\mu I$ при $0 \le \gamma < \frac{1}{9}$ и достаточно большом Q. Из предложений 1—3 следует теорема 3.

3. Заключение

В дальнейших работах авторы предполагают привести применения результатов статьи в метрической теории диофантовых приближений и при получении оценок сверху для размерности Хаусдорфа резонансных множеств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов, И. А., Маслова, Н. Б. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. II. Коэффициенты с ненулевым средним // Теория вероятн. и ее примен., 1971 vol. 16, P. 595-503

2. Запорожец, Д. Н. Ибрагимов, И. А. О площади случайной поверхности. Вероятность и статистика // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2010, vol. 384, P. 154-1750.

3. Берник, В. И., Гётце, Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах // Изв. РАН. Сер. матем., 2015, vol. 79, no.1, P. 21-42.

4. Beresnevich, V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith, 1999, Vol. 90, no. 8, P. 97-112.

5. Beresnevich, V., Bernik V. On a metrical theorem of W. Shmidt. Acta Arith // Acta Arith, 1996, vol. 75, P. 219-233.

6. Beresnevich, V. A. Grasher type theorem for convergence on maifolds // Acta Matth. Hung, 2002, vol. 94(1—2), P. 99-130.

7. Baker, R. Metric diophantine aProximation on manifolds // J. Lond. Math. Soc., 1976, vol. 14, P. 43-48.

8. Berink, V. On the exact order of approximation of zero by the values of integer-valued polynomials // Acta. Arith., 1989, vol. 53, no. 1, P. 17-28.

9. Berink, V. Kleinbok, D., Marguli Y. 2001 Khinchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions // Jntern. Math. Res., vol. 9, P. 453-486.

10. Berink, V., Götze, F. Distribution of real algebraic numbers of arbitary degree in short intervals // Jzv. Math. RAN., 2015, vol. 79, no. 1, P. 18-39.

11. Berink, V., Gusakova, A., Götze F. On ponts with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves // Moscow Journal of Combinations and Number Theory, 2016, vol. 6, iss. 2-3, P. 56-101.

12. Kleinbok, D., Margulis, G. Flow on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. of Math., 1998, vol. 148 no. 2, P. 339-360

13. Mahker K. Über das Mass der Menge aller S-Zhlen // Math. Ann.,1932, vol. 106, P. 131-139.

14. Pyartly, A. Diophantine approximation on submanifolds of euclidion space // Funk. Analis and its application, 1969, vol. 3, no. 4, P. 303-306

15. Shmidt, W. Metrische Satze über simultane Approximationen abhangiger Grossen // Monatsh. Math.,1964, vol. 68, P. 145-166

16. Sprindzuk, V. Achievements and problems of the theory of Diophantine approximations // Uspekhi mat. Baur.,1980, vol. 35, no. 4, P. 3-68.

17. Sprindzuk, V. Mahler problem in metric theory numbers, Eng. trans. // Amer. Math. Soc. Providence, 1969.

18. Götze, F. Koleda, D., Zaporozhets, D. Distribution of complex algebraic numbers // Proc. Amer. Math. Soc., 2017, vol. 145, no. 1, (), 61-71.

19. Bernik A., Götzeb F., Kukso O. Bad-approximable points and distribution of discriminants of the product of linear integer polynomials // Чебышевский сб., 2007m vol. 8, no. 2, P 140–147

20. Bernik A., Götzeb F., Gusakova A. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves // Записки ПОМИ, 2016, P. 14-47

21. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Adv. Math., 2016, vol. 298, P. 393-412.

22. Koleda, D. V. On the density function of the distribution of real algebraic numbers // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux, 2017, vol. 29, P. 179-200.

REFERENCES

1. Ibragimov, I. A., Maslova, N. B., 1971 " On the Expected Number of Real Zeros of Random Polynomials. II. Coefficients With Non-Zero Means *Theory Probab. Appl.*, vol. 16, pp. 486-493
2. Zaporozhets, D. N. Ibragimov, I. A.2010 "On random surface area" *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 176, pp. 190-202.
3. Берник, В. И., Гётце, Ф. 2015 "Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals" *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no.1, P. 21-42.
4. Beresnevich, V. 1999, "On approximation of real numbers by real algebraic numbers", *Acta Arith* Vol. 90, no. 8, pp. 97-112.
5. Beresnevich, V., Bernik V. 1996 "On a metrical theorem of W. Shmidt. Acta Arith" *Acta Arith*, vol. 75, pp. 219-233.
6. Beresnevich, V. A. 2002 "Grasher type theorem for convergence on maifolds", *Acta Matth. Hung*, vol. 94(1—2), pp. 99-130.
7. Baker, R. 1976 "Metric diophantine approximation on manifolds" *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 14, pp. 43-48.
8. Berink, V. 1989 "On the exact order of approximation of zero by the values of integer-valued polynomials", *Acta. Arith.*, vol. 53, no. 1, pp. 17-28.
9. Berink, V. Kleinbok, D., Marguli Y. 2001 "Khinchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions", *Jntern. Math. Res.*, vol. 9, pp. 453-486.
10. Berink, V., Götze, F. 2015 "Distribution of real algebraic numbers of arbitary degree in short intervals", *Jzv. Math. RAN.*, vol. 79, no. 1, pp. 18-39.
11. Berink, V., Gusakova, A., Götze F. 2016 "On ponts with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves", *Moscow Journal of Combinations and Number Theory*, vol. 6, iss. 2-3, pp. 56-101.
12. Kleinbok, D., Margulis, G. 1998 "Flow on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds", *Ann. of Math.*, vol. 148 no. 2, pp. 339-360
13. Mahker K. 1932 "Über das Mass der Menge aller S-Zhlen", *Math. Ann.*, vol. 106, pp. 131-139.
14. Pyartly, A. 1969 "Diophantine approximation on submanifolds of euclidion space", *Funk. Analis and its application*, vol. 3, no. 4, pp. 303-306
15. Shmidt, W. 1964 "Metrische Satze über simultane Approximationen abhangiger Grossen", *Monatsh. Math.*, vol. 68, pp. 145-166
16. Sprindzuk, V. 1980 "Achievements and problems of the theory of Diophantine approximations", *Uspekhi mat. Baur.* vol. 35, no. 4, pp. 3-68.
17. Sprindzuk, V. 1969 "Mahler problem in metric theory numbers", Eng. trans. *Amer. Math. Soc. Providence*
18. Götze, F. Koleda, D., Zaporozhets, D. 2017 "Distribution of complex algebraic numbers", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 145, no. 1, (), 61-71.

19. Bernik A., Götzeb F., Kukso O. 2007 "Bad-approximable points and distribution of discriminants of the product of linear integer polynomials", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 8, no. 2, pp. 140–147

20. Bernik A., Götzeb F., 2016 "Gusakova A. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves", *Zapiski POMI*, pp. 14-47

21. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. 2016 "Integral polynomials with small discriminants and resultants", *Adv. Math.*, vol. 298, pp. 393-412.

22. Koleda, D. V. 2017 "On the density function of the distribution of real algebraic numbers" *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 29, pp. 179-200.