

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511.3

О СОВРЕМЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РЕШЁТОК ¹

Н. М. Добровольский (г. Тула)
dobrovol@tspu.tula.ru

Аннотация

В статье дается расширенный текст доклада, сделанного автором 30 января 2015 года в г. Москве на международной конференции, посвященной памяти профессора А. А. Карацубы, проходившей в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН и МГУ имени М. В. Ломоносова.

В докладе были приведены факты из истории развития теории гиперболической дзета-функции, даны определения и обозначения.

Основное содержание доклада было сосредоточено на обсуждении актуальных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток. Были выделены следующие перспективные направления современных исследований:

1. Проблема правильного порядка убывания гиперболической дзета-функции при $\alpha \rightarrow \infty$;
2. Проблема существования аналитического продолжения в левую полуплоскость $\alpha = \sigma + it$ ($\sigma \leq 1$) гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$;
3. Аналитическое продолжение для случая решёток С. М. Воронина $\Lambda(F, q)$;
4. Аналитическое продолжение для случая решётки совместных приближений;
5. Аналитическое продолжение для случая алгебраической решётки $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$;
6. Аналитическое продолжение для случая произвольной решётки Λ ;
7. Проблема поведения гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в критической полосе;
8. Проблема значений тригонометрических сумм сеток.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

В качестве перспективного метода исследования перечисленных проблем был выделен подход, основанный на изучении возможности предельного перехода по сходящейся последовательности декартовых решёток.

Ключевые слова: решётка, гиперболическая дзета-функция решётки, сетка, гиперболическая дзета-функция сетки, квадратурная формула, параллелепipedальная сетка, метод оптимальных коэффициентов.

Библиография: 19 названий.

ABOUT THE MODERN PROBLEMS OF THE THEORY OF HYPERBOLIC ZETA-FUNCTIONS OF LATTICES

N. M. Dobrovol'skii (Tula)

Abstract

The article gives an expanded version of the report, the author of Made in January 30, 2015 in Moscow at an international conference, dedicated to the memory of Professor A. A. Karatsuba, held at the Mathematical Institute. Russian Academy of Sciences and Moscow State University named after M. V. Lomonosov.

The report sets out the facts from the history of the theory of hyperbolic zeta function, provides definitions and notation.

The main content of the report was focused discussion of actual problems of the theory of hyperbolic zeta function of lattices. Identified the following promising areas of current research:

1. The problem of the correct order of decreasing hyperbolic zeta function in $\alpha \rightarrow \infty$;
2. The problem of existence of analytic continuation in the left half-plane $\alpha = \sigma + it$ ($\sigma \leq 1$) hyperbolic zeta function of lattices $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$;
3. Analytic continuation in the case of lattices S. M. Voronin $\Lambda(F, q)$;
4. Analytic continuation in the case of joint lattice approximations;
5. Analytic continuation in the case of algebraic lattices $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$;
6. Analytic continuation in the case of an arbitrary lattice Λ ;
7. The problem behavior hyperbolic zeta function of lattices $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ in the critical strip;
8. The problem of values of trigonometric sums grids.

As a promising method for investigating these problems has been allocated an approach based on the study of the possibility of passing to the limit by a convergent sequence of Cartesian grids.

Keywords: lattice, hyperbolic zeta function of lattice, net, hyperbolic zeta function of net, quadrature formula, parallelepiped net, method of optimal coefficients.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

В работах [6]–[8] были очерчены контуры некоторых актуальных направлений дальнейшего развития теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе. Сейчас мы остановимся более подробно на нерешенных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток, которая задаётся в правой полуплоскости $\alpha > 1$ дзета рядом²

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\overline{x_1} \dots \overline{x_s})^{-\alpha}. \quad (1)$$

Очевидно, что при $s = 1$ гиперболическая дзета-функция решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

Впервые гиперболическая дзета-функция решёток возникла в работах Н. М. Коробова [14], [15] и Н. С. Бахвалова [1] в 1959 году для решёток решений линейного сравнения с несколькими переменными. В наиболее общем виде она появилась в работах К. К. Фролова [18], [19]. Сам термин гиперболическая дзета-функция решёток появился только в 1984 году в работе [10], в которой начато её изучение как самостоятельного объекта исследований.

Данный доклад является переработанной версией доклада [12].

2. Вспомогательные определения и обозначения

Многие задачи геометрии чисел формулируются в терминах сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x}$, нормы $N(\vec{x}) = |x_1 \cdot \dots \cdot x_s|$, норменного минимума решётки и норменного минимума сдвинутой решётки.

Для произвольной решётки $\Lambda \in PR_s$ норменным минимумом называется величина

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} N(\vec{x}).$$

Для произвольной сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{b} \in CPR_s$ норменным минимумом называется величина

$$N(\Lambda + \vec{b}) = \inf_{\vec{x} \in (\Lambda + \vec{b}) \setminus \{\vec{0}\}} N(\vec{x}).$$

С норменным минимумом тесно связан усеченный норменный минимум, или гиперболический параметр решётки, так называется величина

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} q(\vec{x}),$$

²Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

которая имеет простой геометрический смысл: *гиперболический крест* $K_s(T)$ не содержит ненулевых точек решётки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K_s(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T\},$$

где $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$ — усеченная норма $\vec{x}$, и для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$.

Так как $\max(1, N(\vec{x})) \leq q(\vec{x})$, то $\max(1, N(\Lambda)) \leq q(\Lambda)$ для любой решётки Λ , а из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что

$$q(\Lambda) \leq \max(\det \Lambda, 1).$$

По теореме Абеля гиперболическую дзета-функцию решёток можно представить в следующем интегральном виде

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}},$$

где $D(T|\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K_s(T)$.

Прежде всего заметим, что гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Норменным спектром решётки Λ называется множество значений нормы на ненулевых точках решётки Λ :

$$N_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\}.$$

Соответственно усеченным норменным спектром решётки Λ — множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\}.$$

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, то есть

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$N(\Lambda) = \inf_{\lambda \in N_{sp}(\Lambda)} \lambda, \quad q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Порядком точки спектра называется количество точек решётки с заданным значением нормы. Если таких точек решётки бесконечно много, то говорят, что точка спектра имеет бесконечный порядок. Порядок точки λ норменного

спектра обозначается через $n(\lambda)$, а порядок точки λ усеченного норменного спектра, соответственно, через $q(\lambda)$.

Понятие порядка точки спектра позволяет лучше понять определение гиперболической дзета-функции решётки. В нем вместо нормы точки $\vec{x}$ фигурирует усеченная норма.

Из дискретности усеченного норменного спектра вытекает, что гиперболическую дзета-функцию произвольной решётки Λ можно представить как ряд Дирихле:

$$\begin{aligned}\zeta_H(\Lambda|\alpha) &= \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s)^{-\alpha} = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k) \lambda_k^{-\alpha} = \\ &= \sum_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} q(\lambda) \lambda^{-\alpha}.\end{aligned}\quad (2)$$

Так как $D(T|\Lambda) = 0$ при $T < q(\Lambda)$, то

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{D(t|\Lambda) dt}{t^{\alpha+1}}. \quad (3)$$

Из равенства (2) следует, что для любого комплексного $\alpha = \sigma + it$ в правой полуплоскости ($\sigma > 1$) определена регулярная функция комплексного переменного, заданная рядом (1), и справедливо неравенство

$$|\zeta_H(\Lambda|\alpha)| \leq \zeta_H(\Lambda|\sigma).$$

3. Дзета-функция решётки

В работе [9] было получено функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ . При получении функционального уравнения существенную роль играет понятие дзета-функции решётки.

Напомним, что

$$M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2}$$

и для произвольной целочисленной решётки Λ с $\det \Lambda = N$ дзета-функция $\zeta(\Lambda | \alpha)$ в правой полуплоскости задается равенством

$$\zeta(\Lambda | \alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda, N(\vec{x}) \neq 0} |x_1 \dots x_s|^{-\alpha} = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} N(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{\lambda \in N_{sp}(\Lambda), \lambda \neq 0} n(\lambda) \lambda^{-\alpha}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение

$$\zeta(\Lambda | \alpha) = \frac{1}{N} (M(\alpha) N^{1-\alpha})^s \zeta(\Lambda^{(p)} | 1 - \alpha), \quad (4)$$

где $\Lambda^{(p)} = \det \Lambda \cdot \Lambda^*$ — присоединенная решётка, а Λ^* — взаимная решётка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7]. $\square$

Переходя к взаимным решёткам, эту теорему можно записать в новой форме:

ТЕОРЕМА 2. Для дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение

$$\zeta(\Lambda | \alpha) = \frac{M(\alpha)^s}{N} \zeta(\Lambda^* | 1 - \alpha). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7]. $\square$

Уже в одномерном случае обнаруживается существенная разница между гиперболической дзета-функцией решётки и дзета-функцией решётки. А именно, имеют место следующие лемма и теорема.

ЛЕММА 1. Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda | \alpha)$ произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda | \alpha)$ справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda | \alpha) = \zeta(\Lambda | \alpha) + f(\alpha, d), \quad (6)$$

где аналитическая по α функция $f(\alpha, d)$ задана равенством

$$f(\alpha, d) = \begin{cases} 0, & \text{при } d \geq 1, \\ \sum_{1 \leq |m| \leq [\frac{1}{d}]} \left(1 - \frac{1}{|dm|^\alpha}\right), & \text{при } 0 < d < 1. \end{cases} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $d \geq 1$ для любого целого $m \neq 0$ имеем $\overline{dm} = |dm|$, поэтому

$$\zeta_H(\Lambda | \alpha) = \sum'_{x \in \Lambda} \overline{x}^{-\alpha} = \sum'_{m \in \mathbb{Z}} \overline{dm}^{-\alpha} = \sum'_{m \in \mathbb{Z}} |dm|^{-\alpha} = \zeta(\Lambda | \alpha) = \zeta(\Lambda | \alpha) + f(\alpha, d).$$

При $0 < d < 1$ для любого целого $m \neq 0$ имеем

$$\overline{dm} = \begin{cases} |dm|, & \text{при } |m| > \frac{1}{d}, \\ 1, & \text{при } 1 \leq |m| \leq \frac{1}{d}, \end{cases}$$

поэтому

$$\zeta_H(\Lambda | \alpha) = \sum'_{m \in \mathbb{Z}} \overline{dm}^{-\alpha} = \sum'_{m \in \mathbb{Z}} |dm|^{-\alpha} + \sum_{1 \leq |m| \leq [\frac{1}{d}]} \left(1 - \frac{1}{|dm|^\alpha}\right) = \zeta(\Lambda | \alpha) + f(\alpha, d).$$

$\square$

ТЕОРЕМА 3. Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$, где $d > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) - f(\alpha, d) = \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda} (\zeta_H(\Lambda^* \mid 1 - \alpha) - f(\alpha, d^{-1})). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$, то $\Lambda^* = d^{-1} \cdot \mathbb{Z}$. По теореме 2 (см. стр. 181) при $s = 1$ получим

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \frac{M(\alpha)}{d} \zeta(\Lambda^* \mid 1 - \alpha).$$

Так как по лемме 1 имеем

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + f(\alpha, d), \quad \zeta_H(\Lambda^* \mid \alpha) = \zeta(\Lambda^* \mid \alpha) + f(\alpha, d^{-1}),$$

то теорема доказана. $\square$

В s -мерном случае эти отличия ещё более существенные. Действительно, пусть $\Lambda = t\Lambda(F)$ – алгебраическая решётка, тогда

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda} |x_1 \cdot \dots \cdot x_s|^{-\alpha} = \sum'_{w \in \mathbb{Z}_F} |t^s N(w)|^{-\alpha}, \quad (9)$$

где $N(w)$ – норма целого алгебраического числа из кольца $\mathbb{Z}_F$. В силу теоремы Дирихле о единицах ряд в правой части равенства (9) расходится при любом $\alpha > 1$, так как в кольце $\mathbb{Z}_F$ целых алгебраических чисел чисто вещественного алгебраического поля F степени s имеется бесконечно много единиц ε и для них $|N(\varepsilon)| = 1$. Таким образом в этом случае каждая точка норменного спектра имеет бесконечный порядок, что и приводит к расходимости при любом α .

4. Актуальные проблемы

Перейдем теперь к описанию некоторых актуальных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток.

4.1. Проблема правильного порядка

Как известно (см. [5]), на классе алгебраических решёток (определение см. ниже в разделе 5) достигается правильный порядок убывания гиперболической дзета-функции решёток при росте детерминанта решёток. Более того, для этих решёток справедлива асимптотическая формула.

Для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(t, F)$ в работе [11] Добровольским Н. М., Ваньковой В. С. и Козловой С. Л. была получена асимптотическая формула

$$\zeta_H(\Lambda(t, F)|\alpha) = \frac{2(\det \Lambda(F))^\alpha}{R(s-1)!} \left(\sum_{(w)} \frac{1}{|N(w)|^\alpha} \right) \frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t, F)}{(\det \Lambda(t, F))^\alpha} + \\ + O \left(\frac{\ln^{s-2} \det \Lambda(t, F)}{(\det \Lambda(t, F))^\alpha} \right), \quad (10)$$

где R — регулятор поля F и в сумме $\sum_{(w)} \frac{1}{|N(w)|^\alpha}$ суммирование проводится по всем главным идеалам кольца $\mathbb{Z}_F$.

Из непрерывности гиперболической дзета-функции на пространстве решёток следует, что правильный порядок убывания гиперболической дзета-функции решёток достижим на классе рациональных решёток. Действительно, достаточно брать рациональные решётки из очень маленьких окрестностей алгебраических решёток.

Возникает естественный вопрос, а на классе целочисленных решёток правильный порядок убывания достижим или нет?

Если достижим, то необходимо указать алгоритм построения таких оптимальных параллелепипедальных сеток, для которых будет правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах E_s^α . Другими словами, в этом случае необходимо построить алгоритм вычисления модуля N и оптимальных коэффициентов по модулю N , для которых выполняется оценка

$$\zeta(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)|\alpha) = O \left(\frac{\ln^{s-1} N}{N^\alpha} \right), \quad (\alpha > 1),$$

где $\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$ — решётка решений сравнения

$$m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_{s-1} m_{s-1} \equiv 0 \pmod{N}.$$

Если такой порядок недостижим, то мы получим некоторый аналог теоремы Лиувилля—Туэ—Зигеля—Рота ([17]) для алгебраических решёток, так как отсутствие правильного порядка будет означать, что алгебраические решётки нельзя хорошо приближать целочисленными.

4.2. Проблема существования аналитического продолжения

Для построения аналитического продолжения обобщенной гиперболической дзета-функции выделяется достаточно широкий класс решёток — декартовы решётки. Даются следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Простой декартовой решёткой называется сдвинутая решётка $\Lambda + \vec{x}$ вида*

$$\Lambda + \vec{x} = (t_1 \cdot \mathbb{Z} + x_1) \times (t_2 \cdot \mathbb{Z} + x_2) \times \dots \times (t_s \cdot \mathbb{Z} + x_s),$$

где $t_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, s$).

Другими словами, если решётка $\Lambda + \vec{x}$ простая декартова решётка, то она получается из фундаментальной решётки растяжением по осям с коэффициентами $t_1, \dots, t_s$ и сдвигом на вектор $\vec{x}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Декартовой решёткой называется сдвинутая решётка, представляемая объединением конечного числа простых декартовых решёток.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Декартовой решёткой называется сдвинутая решётка, у которой найдется сдвинутая подрешётка, являющаяся простой декартовой решёткой.*

ТЕОРЕМА 4. *Определения 2 и 3 эквивалентны.*

ТЕОРЕМА 5. *Любой сдвиг рациональной решётки является декартовой решёткой.*

Как показано в [7], [8] существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки. Более того, для произвольной декартовой решётки получено функциональное уравнение, задающее это аналитическое продолжение в явном виде ([7]).

Естественно возникают вопросы о существовании аналитического продолжения для гиперболической дзета-функции или явного вида этого продолжения в следующих случаях:

4.3. Случай решёток С. М. Воронина $\Lambda(F, q)$

Пусть F — произвольное алгебраическое поле степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а q — простое натуральное число и целочисленная решётка $\Lambda(F, q)$ соответствует идеалу $\mathfrak{L} \subset \mathbb{Z}_F$ с нормой $N(\mathfrak{L}) = q$, если фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^s$ соответствует кольцу $\mathbb{Z}_F$ целых алгебраических чисел поля F .

Так как $\Lambda(F, q)$ — целочисленная решётка, то она декартова и, следовательно, для гиперболической дзета-функции этой решётки существует аналитическое продолжение на всю комплексную область с полюсом в точке $\alpha = 1$.

Сам С. М. Воронин вместе со своим учеником Н. Темиргалиевым рассмотрел случай кольца целых гауссовых чисел и случай круговых полей (см. [2], [3], [4], [16]) для вещественных значений α . Это объясняется тем, что с одной стороны и квадратичное поле гауссовых чисел, и круговые поля относятся к числу

наиболее изученных алгебраических полей. В частности, там имеются теоремы об описании соответствующих идеалов и о распределении их норм в арифметических прогрессиях, явно заданных алгебраическим полем. А с другой стороны, они рассматривали только вопрос о погрешности приближенного интегрирования соответствующих квадратурных формул и не занимались изучением гиперболической дзета-функции решёток как новым классом рядов Дирихле.

Естественно, что для решёток Воронина интересно найти свойства аналитического продолжения гиперболической дзета-функции решёток, связанные с арифметикой поля F и его идеалов.

4.4. Случай решётки совместных приближений

Решётка совместных приближений определена равенством

$$\Lambda(\theta_1, \dots, \theta_s) = \{(q, q\theta_1 - p_1, \dots, q\theta_s - p_s) \mid q, p_1, \dots, p_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\theta_1, \dots, \theta_s$ — произвольные иррациональные числа. Важность таких решёток объясняется их непосредственной связью с проблемой Литлвуда.

Легко видеть, что взаимная решётка $\Lambda^*(\theta_1, \dots, \theta_s)$ имеет вид

$$\Lambda^*(\theta_1, \dots, \theta_s) = \{(q - \theta_1 p_1 - \dots - \theta_s p_s, p_1, \dots, p_s) \mid q, p_1, \dots, p_s \in \mathbb{Z}\}.$$

Естественно предполагать, что гиперболические дзета-функции этих решёток связаны некоторым функциональным уравнением между значениями в левой и правой полуплоскостях.

4.5. Случай алгебраической решётки $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$

Пусть F — чисто вещественное алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_F$ — кольцо целых алгебраических чисел поля F , тогда s -мерной решёткой является множество $\Lambda(F)$, следующим способом образованное с помощью $\mathbb{Z}_F$:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(s)}) \mid \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}, \quad (11)$$

где $\Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(s)}$ — система алгебраически сопряженных чисел, и если d — дискриминант поля F , то $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$.

Решение проблемы аналитического продолжения гиперболической дзета-функции алгебраической решётки уже вызывает серьёзные затруднения даже для квадратичных полей. Одна из причин заключается в том, что дзета-функция алгебраической решётки не существует и вопрос о возможности предельного перехода в функциональном уравнении для дзета-функции рационального приближения алгебраической решётки остается открытым.

4.6. Случай произвольной решётки Λ .

Если для произвольной решётки гиперболическая дзета-функция не продолжается на всю комплексную плоскость (что весьма сомнительно), то требуется описать класс всех решёток, для которых гиперболическая дзета-функция аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс s -го порядка.

По-видимому, ключом к решению проблемы аналитического продолжения является дальнейшее изучение возможности предельного перехода для гиперболических дзета-функций декартовых решёток в левой полуплоскости по сходящейся последовательности декартовых решёток.

Если такой предел всегда существует, то, переходя в функциональном уравнении слева и справа к пределу, получим функциональное уравнение для предельной решётки.

Наиболее перспективно должно быть получение функционального уравнения только в терминах взаимных решёток, так как сходимость последовательности решёток эквивалентна сходимости соответствующих взаимных решёток.

Здесь необходимо подчеркнуть, что основная сложность должна быть в случае, когда предельная решётка недекартовая и имеет только одну главную компоненту. Например, все алгебраические решётки относятся к этому случаю.

4.7. Проблема поведения в критической полосе

На важность этой проблемы указывал в беседах Н. М. Коробов. Он высказывал гипотезу, что аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решётки в критическую полосу из правой полуплоскости и аналитическое продолжение в критическую полосу гиперболической дзета-функции взаимной решётки или присоединённых решёток из левой полуплоскости позволит получать константы в соответствующих теоремах переноса.

По мнению Н. М. Коробова аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток является аналогом теоремы А. О. Гельфонда, которая является своеобразной формой теоремы переноса.

4.8. Проблема значений тригонометрических сумм сеток

Нормированные тригонометрические суммы параллелепипедальных сеток имеют два значения: 0 и 1.

Для нормированных тригонометрических сумм двумерных сеток Смоляка таких значений три: 0, 1 и -1 (см. [13]).

Для нормированных тригонометрических сумм неравномерных сеток имеется или хорошая равномерная оценка $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, или они равны 1.

Очень важно получить оценки нормированных тригонометрических сумм для алгебраических сеток.

Если эти суммы имеют спектр значений, не сосредоточенный около точек 0 и 1, то алгебраические сетки нельзя хорошо приблизить параллелепипедальными сетками, а алгебраические решётки нельзя хорошо приблизить целочисленными решётками.

5. Заключение

Из этого краткого обзора видно, что теория гиперболической дзета-функции решёток динамично развивается. Она имеет свою проблематику, которая не сводится к общей теории рядов Дирихле.

Гиперболические дзета-функции решёток образуют важный класс рядов Дирихле, который имеет существенное приложение в развитии теоретико-числового метода в приближенном анализе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3 — 18.
2. Воронин С. М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 5. С. 189–194.
3. Воронин С. М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59, № 4. С. 3–8.
4. Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Математические заметки. 1989. Т. 46, № 2. С. 34–41.
5. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. 2012. — 283 с.
6. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Ученые записки Орловского государственного университета. Сер. Естественные, технические и медицинские науки. 2012. № 6, часть 2. Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: труды X международной конференции. С. 90–98.
7. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

8. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.
9. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18 — 23.
10. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
11. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета-функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНТИ 12.04.90, № 2327–В90.
12. Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. О некоторых проблемах теоретико-числового метода в приближенном анализе // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Материалы XII Междунар. конф., посвященной 80-летию В.Н.Латышева — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 2014. С. 23–27
13. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110–152.
14. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.
15. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.
16. Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Математический сборник. 1990. Т. 181, № 4. С. 490–505.
17. Фельдман Н. И. Приближение алгебраических чисел. М.: Изд-во Московского университета, 1981.
18. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.
19. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

REFERENCES

1. Bakhvalov, N. S. 1959, "On an approximate calculation of multiple integrals", *Vestnik Moskovskogo universiteta* no. 4. P. 3 — 18. (Russian)
2. Voronin, S. M. 1994, "On quadrature formulas.", *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* Vol. 58, no. 5. pp. 189–194. (Russian); translation in Russian Acad. Sci. *Izv. Math.* 45 (1995), no. 2, pp. 417–422.
3. Voronin, S. M. 1995, "On the construction of quadrature formulas.", *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* Vol. 59, no. 4, pp. 3–8. (Russian); translation in *Izv. Math.* Vol. 59, no. 4, pp. 665–670.
4. Voronin, S. M. & Temirgaliev, N. 1989, "Quadrature formulas that are connected with divisors of the field of Gaussian numbers.", *Mat. Zametki* Vol. 46, no. 2, pp. 34–41, p. 158 (Russian); translation in *Math. Notes* 46 (1989), no. 1–2, pp. 597–602 (1990)
5. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M. & Dobrovolsky N. N. 2012, "Multidimensional Number-theoretic grid and lattice algorithms for finding the optimal coefficients.", *Tula: Izd-vo Tul. state PED. University n.a. L. N. Tolstoy*, 283 p.(Russian)
6. Dobrovolskaya L. P., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., Огородничук Н. К., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. Yu. 2012, "Some questions Number-theoretic methods in approximate analysis", *Scientific notes, Orel state University. Ser. Natural, technical and medical science.* № 6, part 2. Algebra and number theory: modern problems and applications: proceedings of the X international conference. pp. 90–98. (Russian)
7. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M. & Dobrovolsky N. N. 2012, "Hyperbolic Zeta-function grids and sheets the calculation of the optimal coefficients", *Chebyshevskii Sb.* Vol. 13, is. 4(44). P. 4–107. (Russian)
8. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M. & Dobrovolsky N. N. 2014. "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications.* Vol. 211. P. 23–62. *Springer, Cham* doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.
9. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "A functional equation for the hyperbolic zeta function of integer lattices.", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* no. 5, pp. 18–23, p. 71 (Russian); translation in *Moscow Univ. Math. Bull.* 62 (2007), no. 5, pp. 186–191.
10. Dobrovol'skii N. M. 1984, "Hyperbolic Zeta function lattices.", *Dep. v VINITI* 24.08.84, № 6090–84.(Russian)

11. Dobrovol'skii N. M., Van'kova, V. S. & Kozlova, S. L. 1990, "Hyperbolic Zeta-function of an algebraic lattices.", *Dep. v VINITI* 12.04.90, № 2327-B90. (Russian)
12. Dobrovol'skii N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "About some problems of number-theoretic methods in approximate analysis", *Algebra and number theory: modern problems and applications: Proceedings of the XII international. Conf., dedicated to the 80th anniversary V. N. Latysheva — Tula: Izd-vo Tul. state PED. University n.a. L. N. Tolstoy*, pp. 23–27 (Russian)
13. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Discrepancy of two-dimensional Smolyak grids.", *Chebyshevskii Sb.* Vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152. ISBN: 978-5-87954-506-7 (Russian)
14. Korobov, N. M. 1959, "Approximate evaluation of repeated integrals.", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* Vol. 124, pp. 1207–1210. (Russian)
15. Korobov, N. M. 1959, "Computation of multiple integrals by the method of optimal coefficients.", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him.* no. 4, pp. 19–25. (Russian)
16. Temirgaliev, N. 1990, "Application of the theory of divisors to the numerical integration of periodic functions of several variables." *Mat. Sb.* Vol. 181, no. 4, pp. 490–505. (Russian); translation in *Math. USSR-Sb.* 69 (1991), no. 2, pp. 527–542.
17. Fel'dman, N. I. 1981, "Priblizheniya algebraicheskikh chisel." (Russian) [Approximations of algebraic numbers] *Moskov. Gos. Univ.*, Moscow, 200 pp.
18. Frolov, K. K. 1976, "Upper bounds for the errors of quadrature formulae on classes of functions.", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* Vol. 231, no. 4, pp. 818–821. (Russian)
19. Frolov, K. K. 1979, "Kvadraturnye formuly na klassakh funktsiy.", PhD thesis. Moscow. *VTS AN SSSR*. (Russian)

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 31.01.2015