ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3+511.9.+51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-6-85

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЙ МЕТОД В ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ[1]

С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков (г. Москва), И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов (г. Тула), О. А. Пихтилькова (г. Оренбург)

Аннотация

В обзоре рассматриваются вопросы истории и современного развития теоретико-числового метода в приближенном анализе, основанного в работах Н. М. Коробова и его учеников. Рассмотрена связь теории равномерного распределения и теоретико-числового метода в приближенном анализе. Показано, что предпосылкой возникновения теоретико-числового метода был интегральный критерий Г. Вейля. Разобраны основные типы теоретико-числовых сеток: неравномерные, параллелепипедальные и алгебраические. Освящена деятельность семинара **трёх К**, приводятся биографические сведения о Н. М. Коробове и краткие сведения о руководителях семинара и его участниках.

Описаны основные направления исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе. Рассмотрены вопросы информационного обеспечения теоретико-числового метода в приближенном анализе с помощью ПОИВС ТМК.

Более подробно в обзоре излагаются вопросы поиска оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных сеток, теории гиперболической дзета-функции решёток, теории алгебраических сеток и её связь с теорией диофантовых приближений.

В частности, обсуждается алгебраическая теория полиномов Туэ. Построение теории опирается на изучение подмодулей $\mathbb{Z}[t]$-модуля $\mathbb{Z}[t]^2$. Рассматриваются подмодули, заданные одним определяющим соотношением и одним определяющим соотношением k-ого порядка. Более сложным подмодулем является подмодуль заданный одним полиномиальным соотношением. Подмодули пар Туэ j-ого порядка напрямую связаны с полиномами Туэ j-ого порядка. С помощью алгебраической теории подмодулей пар Туэ j-ого порядка удалось получить новое доказательство теоремы М. Н. Добровольского (старшего) о том, что для каждого порядка j существуют два основных полинома Туэ j-ого порядка, через которые выражаются все остальные. Основные полиномы определяются с точностью до унимодулярной многочленной матрицы над кольцом целочисленных многочленов.

Рассматриваются дробно-линейные преобразования ТДП-форм. Показано, что при переходе от ТДП-формы, связанной с алгебраическим числом α к ТДП-форме, связанной с остаточной дробью к алгебраическому числу α, ТДП-форма преобразуется по закону, аналогичному преобразованию минимальных многочленов, а числители и знаменатели соответствующих пар Туэ преобразуются с помощью дробно-линейного преобразования второго рода.

Кроме этого, обсуждается новая классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей на основе их разложения в цепные дроби.

Показано, что для чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α степени $n \geqslant 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью приведённых алгебраических иррациональностей.

Найдены рекуррентные формулы для нахождения минимальных многочленов остаточных дробей с помощью дробно-линейных преобразований. Композиция этих дробно-линейных преобразований является дробно-линейным преобразование, переводящем систе-

[1]Работа выполнена по грантам РФФИ № 15-01-01540а, №16-41-710194р_центр_а

му сопряжённых к алгебраической иррациональности α в систему сопряжённых к остаточной дроби, обладающую ярко выраженным эффектом концентрации около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Установлено, что последовательность минимальных многочленов для остаточных дробей образует последовательность многочленов с равными дискриминантами.

Перечислены некоторые наиболее актуальные нерешенные проблемы.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод, равномерное распределение, неравномерные сетки, параллелепипедальные сетки, алгебраические сетки, гиперболическая дзета-функция решётки, алгебраическая теория полиномов Туэ, приведённые алгебраические иррациональности, классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей.

Библиография: 238 названий.

NUMBER-THEORETIC METHOD IN APPROXIMATE ANALYSIS

S. S. Demidov, E. A. Morozova, V. N. Chubarikov (Moscow), I. Yu. Rebrov, I. N. Balaba, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, L. P. Dobrovol'skaya, A. V. Rodionov (Tula), O. A. Pikhtil'kova (Orenburg)

Abstract

Into the image it is considered issues of history and the modern development of number-theoretic method in the approximate analysis which based in the work of N. M. Korobov and his disciples. It is reviewed the connection of the theory of uniform distribution and theoretical-numeric method in approximate analysis. It is shown that the condition for the theoretical-numeric method was the integral criterion G. Weyl. It is disassembled main types of number-theoretic nets: uneven, parallelepipedal and algebraic. It is consecrated the activities of the workshop **three K**, it is explored the biographical information about N. M. Korobov and brief information about the leaders of the seminar and its participants.

It is described the main directions of research in theoretical-numeric method in approximate analysis. It is examined the issues of information security theoretic-numeric method in approximate analysis using POIS TMK.

More detailed it is outlined the issues of finding the optimal coefficients for parallelepipedal nets, the theory of the hyperbolic Zeta function of lattices, the theory of algebraic nets and its relationship with the theory of Diophantine approximations.

In particular, we discuss the algebraic theory of polynomials Tue. The theory is based on the study of submodules of $\mathbb{Z}[t]$-module $\mathbb{Z}[t]^2$. It is considered of submodules that are defined by one defining relation and one defining relation k-th order. More complex submodule is the submodule given by one polynomial relation. Sub par Tue j-the order are directly connected with polynomials Tue j-th order. Using the algebraic theory of pairs of submodules of Tue j-th order is managed to obtain a new proof of the theorem of M. N. Dobrowolski (senior) that for each j there are two fundamental polynomial Tue j-th order, which are expressed through others. Basic polynomials are determined with an accuracy of unimodular polynomial matrices over the ring of integer polynomials.

It is discussed the fractional-linear transformation of TDP-forms. It is shown that the transition from TDP-forms associated with an algebraic number α to TDP-the form associated with the residual fraction to algebraic number α, TDP-form is converted under the law, similar to the transformation of minimal polynomials and the numerators and denominators of the respective pairs of Tue is converted using the linear-fractional transformations of the second kind. Besides, we discuss the new classification of purely real algebraic irrationalities which based on their expansion in continued fractions. It is shown that for purely real algebraic irrationalities α of degree $n \geqslant 2$, starting from some numbers $m_0 = m_0(\alpha)$, the sequence of residual fractions α_m is a sequence given the algebraic irrationalities.

It is found recurrence the formula for finding the minimal polynomials of the residual fractions using the linear-fractional transformations. The compositions of these linear-fractional transformations is a linear-fractional transformation that maps the system conjugate to algebraic irrationascenic spots α in the system of associated to the residual fraction, with a pronounced effect of concentration nearly rational fraction $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

It is established that the sequence of minimal polynomials for residual fractions forms a sequence of polynomials with equal discriminants.

Lists some of the most pressing unsolved problems.

Keywords: number-theoretic method, uniform distribution,nonuniform grid, parallelepipedal nets, algebraic nets, hyperbolic dzeta-function of lattices, algebraic theory of polynomials Tue, given an algebraic irrationality, the classification of purely real algebraic irrationalities.

Bibliography: 238 titles.

Посвящается 100-летию со дня рождения
профессора Николая Михайловича Коробова
и 25-летию памяти
профессора Николая Николаевича Ченцова

1. Введение

Эта обзорная работа посвящёна столетию со дня рождения Н. М. Коробова и 25-летию памяти Н. Н. Ченцова, которые вместе с Н. С. Бахваловым были основателями теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Теоретико-числовой метод приближенного анализа был создан в конце 50-ых — начале 60-ых годов в рамках работы семинара под руководством Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова (семинар **трёх К**). Этот семинар был организован по предложению Н. Н. Ченцова, который работал в группе И. М. Гельфанда по математическому обеспечению отечественного атомного проекта.

Выделение класса E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье позволило, используя средства гармонического анализа и аналитической теории чисел, получить оптимальные результаты в теории многомерных квадратурных формул. В этой области работали многие известные математики в нашей стране и за рубежом: Н. М. Коробов [117]–[140], Н. С. Бахвалов [4]–[7], Н. Н. Ченцов [193], Хуа Ло Кен [223], Э. Главка [221]–[222], К. К. Фролов [189]–[192], В. А. Быковский [15]–[20] и многие другие.

Вопросы построения многомерных квадратурных формул тесно связаны с теорией равномерного распределения, основанной Г. Вейлем [237]. В этой области хорошо известны фундаментальные работы К. Рота по оценке квадратичного отклонения [229]–[230] и В. Шмидта по оценке q-ого отклонения [231]–[232].

Теоретико-числовые алгоритмы численного интегрирования имеют существенное значение при расчете интегралов взаимодействия в квантовой химии [141] и при расчете наноразмерных ферромагнитных гетеросистем. Другой класс интегралов, где применимы эти методы, возникает в физике высоких энергий.

За рубежом аналог метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова был предложен на три года позже (1962 г.) Е. Главкой [221]. Он назвал параллелепипедальные сетки с оптимальными коэффициентами сетками с "хорошими точками". В результате, один и тот же объект вошел в позднейшие публикации и вычислительную практику с различными названиями и ссылками на разных авторов, хотя в последнее время даже австрийские математики ссылаются на работы Н. М. Коробова, восстанавливая историческую справедливость.

Результаты работы семинара **трех К** за первые шесть лет работы были отражены в монографии Н. М. Коробова в 1963 г. [127] (второе издание вышло в 2004 г. [140]). За рубежом этой проблеме были посвящены различные монографии [222], [223], [234].

Таким образом, мы видим, что мотивом организации научной деятельности по разработке новых многомерных квадратурных формул было решение жизненно важных проблем вычислительной практики, возникших в ходе выполнения отечественного атомного проекта. Поэтому история развития теоретико-числового метода в приближенном анализе делится на две части.

Первая часть — это открытая теоретическая часть, в которой и были получены первые результаты, и которая продолжала успешно развиваться все прошедшие 60 лет.

И вторая часть — это прикладная, закрытая часть, о которой можно только догадываться.

На первый взгляд, мы сталкиваемся с парадоксальной ситуацией разрыва связи между мотивирующей причиной исследований и самими исследованиями. Но здесь вступает в силу общий методологический закон научных исследований — внутренняя логика предметной области является движущей силой дальнейшего развития.

Дело всё в том, что были достаточно быстро выделены фундаментальные проблемы, с которыми связано решение основных задач, стоящих перед теоретико-числовым методом в приближенном анализе, многие из которых остаются открытыми и по настоящее время.

Отметим ещё один важный методологический момент истории становления теоретико-числового метода в приближенном анализе. Семинар **трех К** был эффективной формой организации исследований. Сейчас трудно судить об административно-организационных аспектах функционирования данного семинара. Вопрос о существовании или отсутствии в архивах Математического института соответствующих документов остается открытым, а участников тех событий практически не осталось, но можно и по тем крохам доступной информации делать вывод, что по современным понятиям семинар был успешной формой организации инновационной деятельности. Надо отметить, что такая организация исследований была и остается типичной формой организации научных исследований как на мехмате МГУ, так и в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

В настоящее время у некоторых исследователей возникает иллюзия, что если не хватает точности вычислений для расчета многомерных задач, то надо перейти к использованию более производительной техники и проблема будет решена, но это глубокое заблуждение. Теоретический анализ вычислительных проблем показывает, что «проклятие размерности» реально существующий феномен, связанный с экспоненциальным ростом трудоемкости вычисления многомерных интегралов. Как показано в работах И. М. Гельфанда и Н. Н. Ченцова при вычислениях континуальных интегралов возникает необходимость численного вычисления 100 и 400-кратных интегралов [39]–[40], [193]. Правильно построенные вычислительные схемы позволяли решать такие задачи на вычислительной технике 60-ых годов, а лобовое решение этих задач невозможно даже на современных суперкомпьютерах.

Цель данного обзора — рассмотреть основные этапы становления метода оптимальных коэффициентов в работах отечественных математиков, представителей научной школы профессора Н. М. Коробова. При этом мы будем делать и некоторые методологические комментарии.

Уже из краткого перечисления основных направлений исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе видно, что исследования в этой области носили интегративный характер, требующий привлечения методов различных математических теорий. Уже в следующем разделе мы покажем как потребности практики, продиктованные решением жизненно важных проблем, привели к возникновению нового направления исследований в математике.

2. Теория равномерного распределения и теоретико-числовой метод в приближенном анализе

За шестьдесят лет развития теоретико-числового метода с 1957 года, когда вышла первая работа [117] Н. М. Коробова по этому направлению исследований, с которой и начинается отсчёт в становлении теоретико-числового метода в приближенном анализе, было сделано значительное количество работ десятков авторов и в нашей стране и зарубежом. Краткая история возникновения этого метода описана её основателем в статье [134].

2.1. Теоретические предпосылки

Теоретические предпосылки теоретико-числового метода восходят ещё к работе [237] Г. Вейля, вышедшей в 1916 году, в которой, с одной стороны, содержался интегральный критерий равномерного распределения последовательности по модулю 1, с другой стороны, в этой работе были получены первые нетривиальные оценки тригонометрических сумм.

Именно применение оценок А. Вейля [235] рациональных тригонометрических сумм было основополагающим при исследование первого класса теоретико-числовых сеток — неравномерных сеток.

Существенное изменение теории и практики вычисления кратных интегралов связано с появлением метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова. Центральной проблемой в этом направлении исследований остается вопрос о построении экономных алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов и оценка их качества.

В 1916 году в работе [237], с которой обычно ведется отсчет теории равномерного распределения, Г. Вейль установил интегральный критерий равномерного распределения бесконечной последовательности точек в многомерном единичном кубе, который устанавливает принципиальную связь между понятием равномерного распределения и вопросами численного вычисления определенных интегралов по многомерному кубу. Он даже не формулирует этот критерий в виде теоремы.

"Для получения критерия равномерного распределения предположим, что числа $\alpha_n \mod 1$ *этому закону удовлетворяют. Я утверждаю тогда, что для любой ограниченной, интегрируемой в смысле Римана периодической с периодом 1 функции* $f(x)$ *можно сделать вывод о существовании предельного равенства*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} f(\alpha_h) = \int\limits_0^1 f(x)dx; \tag{1}$$

т. е. образованное при помощи дискретной совокупности чисел α_n *среднее значение функции совпадает с непрерывным средним значением* $\int\limits_0^1 f(x)dx$. *"*[2]

Многомерный случай данного интегрального критерия вообще не упоминается в этой работе ни в каком виде, хотя подразумевается, что он справедлив.

Необходимо отметить, что вопросы численного интегрирования не были предметом этой работы Г. Вейля, а появление интегрального критерия являлось важной ступенькой в доказательстве критерия равномерного распределения последовательности, выраженного в терминах тригонометрических сумм.

Теорема 1. [3]*(***Критерий Г. Вейля***) Если для каждого целого числа* $m \neq 0$ *выполняется предельное соотношение* [4]

$$\sum_{h=1}^{n} e(m\alpha_h) = o(n), \tag{2}$$

то числа $\alpha_n \mod 1$ *удовлетворяют закону всюду равномерного плотного распределения.*

А также многомерного критерия Г. Вейля.

Теорема 2. [5] *(***Многомерный критерий Г. Вейля***) Последовательность точек* $\alpha(n)$ *заполняет* $\Re_p$ *всюду равномерно плотно, если для любой системы целых, не обращающихся одновременно в нуль чисел* $m_1, m_2, \dots, m_p$ *выполняется предельное соотношение*

$$\sum_{h=1}^{n} e(m_1\alpha_1(h) + m_2\alpha_2(h) + m_p\alpha_p(h)) = o(n). \tag{3}$$

Таким образом, вопрос о равномерном распределении последовательностей свелся к вопросу об оценке модуля соответствующих тригонометрических сумм. И в этой работе Г. Вейль предложил новый метод получения нетривиальных оценок тригонометрических сумм с полиномами. Эти суммы стали называться суммами Г. Вейля, а метод их оценки — методом Г. Вейля.

Именно оценки Г. Вейля тригонометрических сумм стали фундаментом одного из общих и универсальных методов теории чисел — метода тригонометрических сумм.

[2][237], стр. 58

[3][237], стр. 59 — 60

[4]Здесь и далее $e(x) = e^{2\pi i x}$.

[5][237], стр. 63, через $\Re_p$ Г. Вейль обозначает замкнутое p-мерное многообразие, получающиеся из обычного p-мерного пространства путем объединения в одну-единственную "точку" каждую систему сравнимых по модулю 1 точек (см. стр. 62).

Теория равномерного распределения традиционно относится к теории чисел, поэтому не случайно, что именно Н. М. Коробову — специалисту по теории чисел и тригонометрическим суммам принадлежит выдающийся вклад в теорию построения многомерных квадратурных формул (говорят еще — кубатурных).

Отметим, что это произошло в период, когда вычислительная практика с помощью ЭВМ приступила к решению сложных многомерных задач, а никаких алгоритмов, успешно справляющихся с проклятием размерности[6], кроме метода Монте-Карло с вероятностной погрешностью $O(N^{-\frac{1}{2}})$, не было.

Прежде чем двигаться дальше в описание теоретико-числового метода в приближенном анализе, дадим краткий обзор собственно теории равномерного распределения по модулю 1.

Теория равномерного распределения возникла в связи с поставленным Лагранжем вопроса о наложении колебаний, который возник в астрономии при изучении вековых изменений величин перегелия и долготы узла (см. [237], стр. 68). В этой области работали П. Боль [210], В. Серпинский [233], Г. Вейль [236].

Важным этапом в теории равномерного распределения стало введение ван дер Корпутом [214] понятия отклонения и формулировка вопроса об ограниченности отклонения. Отрицательный ответ на этот вопрос дала Ардене-Эренфест в 1949 г. [207]. Существенно более сильный результат получил К. Рот в 1954 г. [229] в работе, в которой он ввёл понятие квадратичного отклонения сетки и доказал что для произвольной сетки из N точек справедлива оценка снизу $D_{s,2}(N) >> \ln^{s-1} N$, где $D_{s,2}(N)$ — квадратичное отклонение сетки из N точек в s-мерном кубе $G_s = [0;1)^s$.

В 1916 году в работе [237], с которой обычно ведется отсчет теории равномерного распределения, Г.Вейль установил интегральный критерий равномерного распределения бесконечной последовательности точек в s-мерном единичном кубе G_s. Согласно этому критерию бесконечная последовательность точек $X = \{\vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_N, \ldots\}$ из G_s равномерно распределена тогда и только тогда, когда для любой интегрируемой по Риману функции $f(\vec{x})$ справедливо равенство

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\vec{x_k}) = \iint\limits_{Gs} f(\vec{x})d\vec{x}. \tag{4}$$

Равенство (4) можно переписать в виде квадратурной формулы

$$\iint\limits_{Gs} f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\vec{x}_k) - R_N(f), \qquad \lim_{N\to\infty} R_N(f) = 0. \tag{5}$$

Если в равенстве (5) взять в качестве $f(\vec{x})$ характеристическую функцию $\chi(\vec{x},\vec{\alpha})$ прямоугольной области $\Pi(\vec{\alpha}) = [0;\alpha_1) \times \ldots \times [0;\alpha_s)$, то получим связь между погрешностью квадратурной формулы и локальным отклонением $D(X_N,\vec{\alpha})$:

$$R_N[\chi] = \frac{1}{N} D(X_N,\vec{\alpha}),$$

$$D(X_N,\vec{\alpha}) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(\vec{x_k},\vec{\alpha}) - N \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_s,$$

где $X_N = \{\vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_{N-1}\}$ – сетка, образованная из первых N членов бесконечной последовательности X. Здесь сразу необходимо подчеркнуть, что понятие последовательности допускает

[6]Под проклятием размерности специалисты подразумевают ситуацию, когда погрешность приближенного интегрирования порядка $O(N^{-\alpha})$, где N — количество узлов квадратурной формулы, а $\alpha > 1$ — параметр гладкости интегрируемой функции, в одномерном случае заменяется на $O(N^{-\frac{\alpha}{s}})$ в s-мерном случае.

повторение точек, а понятие сетки, как произвольного множества точек из G_s, такого повторения не допускает. Такое несоответствие легко преодолеть, перейдя к понятию сетки с весами $(X, \vec{\rho})$, где

$$X = \{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{N-1}\} \subset G_s, \quad \vec{\rho} = (\rho_0, \dots, \rho_{N-1}, \rho) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{6}$$

Рассмотрим произвольную s–мерную сетку

$$X = \{(x_{k1}, ..., x_{ks}) \mid k = 0, ..., N-1\}$$

из s–мерного единичного куба $G_s = [0;1)^s$. Для $q \geqslant 0$ q–отклонением сетки X с весом $\vec{\rho}$ называется величина

$$D_{s,q}(X, \vec{\rho}) = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 |D(X, \vec{\alpha}, \vec{\rho})|^q d\vec{\alpha},$$

где

$$D(X, \vec{\alpha}, \vec{\rho}) = \sum_{k=0}^{N-1} \rho_k \prod_{j=1}^{s} \chi(x_{kj}, \alpha_j) - \rho \cdot N \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_s$$

— функция локального отклонения сетки X и $\chi(x, \alpha)$ — характеристическая функция промежутка $[0; \alpha)$.

Другой способ преодолеть это затруднение ("подъем размерности") впервые использовал К. Рот в работе [229]. Суть этого приема состоит в том, что начальному отрезку из N членов s-мерной последовательности X ставится в соответствие $s+1$-мерная сетка

$$Y_N = \left\{ \left(x_{j\,1}, \dots, x_{j\,s}, \frac{j}{N} \right) \middle| \, j = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Из определения сразу видно, что справедливо равенство

$$D(X_K, \vec{\alpha}) = D(Y_N, \vec{\beta}(\vec{\alpha}, K, N)), \quad \text{при} \quad \vec{\beta}(\vec{\alpha}, K, N) = \left(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \frac{K}{N} \right).$$

При $\rho = \rho_0 = \dots = \rho_{N-1} = 1$ будем писать просто $D_{s,q}(X)$. Относительно $D_{s,q}(X)$ известны следующие результаты.

В 1954 году К. Рот [229] доказал: существует константа $c(s) > 0$ такая, что для любой сетки X из N точек справедлива оценка снизу

$$D_{s,2}(X) \geqslant c(s) \ln^{s-1} N. \tag{7}$$

В 1977 году В. Шмидт [232] установил существование $c(s,q) > 0$ такой, что для любой сетки X из N точек справедлива оценка снизу

$$D_{s,q}(X) \geqslant c(s,q) \ln^{(s-1)\cdot q/2} N, \quad q > 1. \tag{8}$$

В 1980 году К. Рот [230], рассмотрев преобразования сеток Хэммерсли и усредняя по непрерывному параметру квадратичное отклонение преобразования сеток, доказал существование для любого N сетки из N точек, для которой верхняя оценка квадратичного отклонения по порядку совпадает с оценкой (7). Тем самым была доказана неулучшаемость нижней оценки К. Рота.

Можно показать, что при подходящем выборе нормированного пространства функций норма линейного функционала погрешности квадратурной формулы (5) будет выражаться через соответствующую норму локального отклонения сетки с весами, делённую на количество точек сетки. При таком взгляде на различные виды отклонения оказываются сравнимы общий метод Колмогорова — получения оценок снизу для норм погрешностей квадратурных формул и частный метод Рота — оценок квадратичного отклонения. Такой подход позволяет доказать обобщение теоремы Рота об оценке квадратичного отклонения снизу на случай произвольной сетки с весами.

В работах [212], [213] Чень обобщил результат К. Рота для произвольного q–отклонения и, таким образом, доказал неулучшаемость нижней оценки (8). Чень использовал преобразования Рота для сеток Хэммерсли и ввел новые, дискретные преобразования для множеств Фора.

По теории равномерного распределения опубликовано много различных работ (см. [18, 21]–[28],[32]–[38],[53, 62]–[64, 70]–[72, 83]–[85, 87, 97, 113, 142, 161]– [164, 192, 207, 211]–[215, 217]–[219, 224, 226]–[232]), имеется специализированный журнал Uniform Distribution Theory, издаваемый в Австрии.

В работах [62], [63] Н. М. Добровольский предложил дискретные преобразования сеток Хэммерсли, с помощью которых доказал верхние оценки Рота и Ченя с лучшими константами. В ряде работ [63], [87], [83], [26] изучались алгоритмические вопросы поиска оптимальных преобразований сеток Хэммерсли.

Нетрудно показать, что множество преобразований, предложенных К. Ротом, образуют бесконечную группу преобразований сеток Хэммерсли. Аналогично, преобразования Ченя [213] множеств Фора и преобразования из работы [62] относительно композиции являются конечными группами.

В работе [27] В. С. Ваньковой, Н. М. Добровольского, А. Р. Есаяна был введен класс рациональных $\vec{p}$–ичных сеток, и для них определены две группы преобразований: группы арифметических сдвигов и группы поразрядных сдвигов.

Группа арифметических сдвигов является обобщением конструкции из работ [62], [63] для сеток Хэммерсли, а группа поразрядных сдвигов — обобщение конструкции Ченя из работы [213] для множества Фора.

Метод доказательства существования сетки с правильным квадратичным отклонением или q-отклонения в работах [213], [62], [63] состоял в оценке среднего q-отклонения по орбите сетки Хэммерсли или сетки Фора.

В работе Н. М. Добровольского [70] было установлено, что для произвольной рациональной $\vec{p}$-ичной сетки среднее арифметическое квадратичных отклонений сеток из орбиты для группы арифметических сдвигов совпадает со средним арифметическим квадратичных отклонений сеток из орбиты для группы поразрядных сдвигов. Тем самым было показано, что для квадратичного отклонения подходы из работ [213] и [62] дают для одной и той же исходной сетки одинаковые результаты. Кроме этого, в работе [27] были рассмотрены алгоритмические проблемы поиска сетки из орбиты с квадратичным отклонением, не превосходящим среднего арифметического по орбите.

В работах В. С. Ваньковой [21]–[23], [25] и ее кандидатской диссертации [24] были разработаны основные направления теории квадратичного отклонения $\vec{p}$–ичных сеток.

В работе Н. М. Добровольского [70] был предложен способ определения двух групп преобразования арифметических сдвигов и поразрядных сдвигов для произвольных сеток, при этом свойство равенства средних по орбитам квадратичных отклонений сохраняется для этих групп.

Более подробно суть этих конструкций в следующем. Пусть $p_1, ..., p_s$ — фиксированные натуральные числа, отличные от 1, и натуральные числа $h_1, ..., h_s, P_1, ..., P_s$ связаны соотношениями $P_j = p_j^{h_j} (j = 1, ..., s)$. В работе рассматриваются две группы преобразований:

$$G(\vec{P}) = \{g(\vec{t}) | 0 \leqslant t_j \leqslant P_{j-1}, j = 1, ..., s\}$$

и
$$G^*(\vec{P}) = \{g^*(\vec{t})|0 \leqslant t_j \leqslant P_{j-1}, j = 1, ..., s\}$$
куба G_s.

Группа арифметических сдвигов
$$G(\vec{P}) \simeq (Z/P_1Z) \times \cdots \times (Z/P_sZ),$$
группа поразрядных сдвигов
$$G^*(\vec{P}) \simeq (Z/p_1Z)^{h_1} \times \cdots \times (Z/p_sZ)^{h_s}.$$

Пусть $X(\vec{t})$ — образ сетки X под действием преобразования $g(\vec{t}) \in G(\vec{P})$, а $XC(\vec{t})$ — преобразования $g_*(\vec{t}) \in G^*(\vec{P})$; $G(\vec{P})X$ и $G^*(\vec{P})X$ соответствующие орбиты;
$$\sigma_{s,q}\left(G(\vec{P})X\right) = \frac{1}{P_1...P_s} \sum_{g(\vec{t}) \in G(\vec{P})} D_{s,q}\left(X(\vec{t}), \vec{\rho}\right),$$
$$\sigma_{s,q}\left(G^*(\vec{P})X\right) = \frac{1}{P_1...P_s} \sum_{g^*(\vec{t}) \in G^*(\vec{P})} D_{s,q}\left(XC(\vec{t}), \vec{\rho}\right)$$
— средние арифметические по орбитам.

Справедлив следующий основной результат: для любой сетки X справедливо равенство
$$\sigma_{s,q}\left(G(\vec{P})X\right) = \sigma_{s,q}\left(G^*(\vec{P})X\right).$$

Таким образом с точки зрения величины среднего арифметического q—ого отклонения эти две группы преобразований равноправны. Остается открытым вопрос о величине минимального отклонения в каждой из орбит для заданного типа сеток.

Другой сложный вопрос — это построение экономных алгоритмов поиска сеток из орбиты с минимальным или близким к минимальному значению q—ого отклонения.

2.2. Неравномерные сетки

В 1957 — 1959 годах вышли первые работы Н. М. Коробова [117], [118], в которых были применены методы теории чисел к вопросам численного интегрирования кратных интегралов. Выделение класса периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье позволило для оценки погрешности приближенного интегрирования использовать методы гармонического анализа и теорию тригонометрических сумм, важный раздел аналитической теории чисел (см. монографии [132], [2]).

Первая работа Н. М. Коробова [117], с которой и ведется отсчёт становления теоретико-числового метода в приближенном анализе, опиралась на глубокие оценки А. Вейля рациональных тригонометрических сумм для простого модуля, которые потребовались при изучении введенных в этой работе Н. М. Коробовым новых сеток, названных им неравномерными.

Неравномерные сетки $M(P; b_1, \ldots, b_s)$ имеют простой вид. Для любого набора целых b_1, $\ldots, b_s$, взаимно простых с P ($(b_j, P) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$) неравномерная сетка $M(P; b_1, \ldots, b_s)$ состоит из точек, координаты которых выражаются через степенные функции по модулю P:
$$M_k = \left(\left\{\frac{b_1 k}{P}\right\}, \left\{\frac{b_2 k^2}{P}\right\}, \ldots, \left\{\frac{b_s k^s}{P}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, P), \tag{9}$$
где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, $p > s$.

Характерной чертой творчества профессора Н. М. Коробова было стремление к максимальной простоте изложения. В то время ещё не было известно элементарного доказательства оценок А. Вейля рациональных тригонометрических сумм. Такие доказательства появились только в семидесятых годах XX столетия (см. [185], [144]).

Н. М. Коробов рассматривает два варианта неравномерных сеток: по простому модулю и по квадрату простого модуля. Второй вариант обладает сразу двумя достоинствами.

Во-первых, он опирается на аналогичную оценку рациональных тригонометрических сумм по модулю квадрата простого, которая получается совершенно элементарно (см. [127], с. 68).

Во-вторых, он позволяет пользоваться небольшими таблицами простых чисел, например, таблицей из учебника А. А. Бухштаба [14], в которой простые числа не превосходят 6000, что позволяет строить сетки интегрирования с количеством точек до 36 000 000, которое является достаточно существенным и сейчас.

2.3. Метод оптимальных коэффициентов

Наиболее плодотворным оказался метод оптимальных коэффициентов построения для многомерного куба многомерных квадратурных формул с параллелепипедальными сетками, фактически основанный на самых простых фактах теории сравнений. Этот метод был заложен Н. М. Коробовым в работах [118], [121], [122], и его развитие продолжается и по настоящее время.

Важной особенностью метода оптимальных коэффициентов является тот факт, что алгоритм численного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками является ненасыщаемым. Свойства алгоритма быть ненасыщаемым относится к числу его важных качеств (более подробно см. [3] и [143]), и заключается в том, что точность алгоритма связана с гладкостью функции и не имеет ограничений на параметр гладкости.

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{10}$$

имеют ещё более простой вид, чем неравномерные сетки (9), но уже требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j, p) = 1\ (j = = 1, 2, \ldots, s))$, но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \ldots, a_s)$ набора коэффициентов $(a_1, \ldots, a_s)$. $S_p(z_1, \ldots, z_s)$ выражается через сумму[7]

$$S_p(z_1, \ldots, z_s) = \sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s = -p_1}^{p_2} \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \ldots + z_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}, \tag{11}$$

где $z_1, \ldots, z_s$ – произвольные целые, $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m, $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{если} \quad b \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \tag{12}$$

.

Согласно определению, *если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений p выполняется неравенство*

$$S_p(a_1, \ldots, a_s) \leqslant B \frac{\ln^\beta p}{p}, \tag{13}$$

[7]Здесь $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

то целые $a_1, \ldots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β по модулю p.

Известно (см.[140] стр. 81), что для любых целых $a_1, \ldots, a_s$ выполняется оценка

$$S_p(a_1, \ldots, a_s) \geqslant B_0 \frac{\ln^s p}{p}, \tag{14}$$

с некоторой константой B_0.

Интересно отметить, что на совсем других теоретико-числовых соображениях основана серия важных работ по применению теории дивизоров для поиска оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных сеток, выполненных С. М. Ворониным и Н. Т. Тимергалиевым (см. [29], [30], [31]). Фактически в этих работах указаны алгоритмы поиска целочисленных решеток с большим значением гиперболического параметра решетки.[8]

2.4. Квадратурные формулы с обобщёнными параллелепипедальными сетками

В данном разделе рассматриваются вопросы приближенного интегрирования функций многих переменных по единичному $s-$мерному кубу

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s\}$$

по методу К. К. Фролова [189], [191] в модификации Н. М. Добровольского ([65] — [69]) для непрерывных периодических функций с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, s$), принадлежащих классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор

$$\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\}).$$

Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x} - \{\vec{x}\}$. Через $p(\vec{x}) = \left[\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = \max(|x_1|, \ldots, |x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s\,|\,m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$.

Напомним определения трех типов обобщенных параллелепипедальных сеток: $M(\Lambda)$, $M_1(\Lambda)$ и $M'(\Lambda)$ решетки Λ (см. [66], [140] стр. 204), которые определяются через взаимную решетку $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall \vec{y} \in \Lambda\ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$.

[8] Определение гиперболического параметра $q(\Lambda)$ решётки Λ см. далее стр. 39.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Модификация Н. М. Добровольского метода К. К. Фролова опирается на следующую общую конструкцию (см. [66], [140] стр. 247–248).

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s,$$
$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s,$$
$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s.$$

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_{0}^{1} \cdots \int_{0}^{1} f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f], \tag{15}$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB \cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\vec{x} \in \Lambda}}' (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{z}$ сдвинутую решетку $\Lambda + \vec{z}$ и дадим следующие определения.

Определение 4. *Для произвольной решетки Λ и произвольного $\vec{z}$ модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda, \vec{z})$ назовем множество*

$$M(\Lambda, \vec{z}) = (\Lambda^* + \vec{z}) \cap G_s.$$

Сетка $M_1(\Lambda, \vec{z}) = (\Lambda^* + \vec{z}) \cap [-1;1)^s$.

Модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda, \vec{z})$ назовем множество $M'(\Lambda, \vec{z}) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda, \vec{z})\}$.

Определение 5. *Квадратурной формулой с модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ назовем формулу вида*

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda,\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda,\vec{z}), \{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda,\vec{z}) = |M'(\Lambda,\vec{z})|,$$

$R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f]$ *— погрешность квадратурной формулы.*

Квадратурные формулы с модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ естественным образом возникают в следующей ситуации. Пусть имеется решетка Λ и её подрешетка $\Lambda_1 \subset \Lambda$ и $t = \dfrac{\det \Lambda_1}{\det \Lambda}$ — индекс подрешетки Λ_1 решетки Λ. Обозначим через $K(\Lambda, \Lambda_1)$ полный набор представителей по одному из каждого класса решетки Λ по подрешетке Λ_1, тогда $|K(\Lambda, \Lambda_1)| = t$ и справедливо представление

$$\Lambda = \bigcup_{\vec{z} \in K(\Lambda,\Lambda_1)} (\Lambda_1 + \vec{z}).$$

Переходя к взаимным решеткам получим: $\Lambda^* \subset \Lambda_1^*$,

$$\Lambda_1^* = \bigcup_{\vec{z} \in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} (\Lambda^* + \vec{z}), \quad M'(\Lambda_1) = \bigcup_{\vec{z} \in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} M'(\Lambda, \vec{z}).$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z} \in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} \left((\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda,\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f] \right), \tag{16}$$

$$R_{N'(\Lambda_1)}[f] = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z} \in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f]. \tag{17}$$

Формулы (16) — (17) являются основой для концентрических алгоритмов численного интегрирования с квадратурными формулами по обобщенным параллелепипедальным сеткам (см. [49], стр. 192, 193).

Определение 6. *Для концентрической пары обобщенных параллелепипедальных сеток II типа $M'(\Lambda) \subset M'(\Lambda_1)$ и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ мультипликативной дискретной дисперсией $\Delta = \Delta(M'(\Lambda), M'(\Lambda_1), \rho(\vec{x}), f(\vec{x}))$ назовем величину*

$$\Delta = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z} \in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} |R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f] - R_{N'(\Lambda_1)}[f]|^2. \tag{18}$$

Нетрудно понять, что определение 6 согласуется с аналогичным определение из работы [49] (см. стр. 204), так как сетка $M'(\Lambda_1)$ является произведением сетки $M'(\Lambda)$ и сетки $K(\Lambda_1^*, \Lambda^*)$.

2.5. Алгебраические сетки

Назовём вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ целым алгебраическим, если многочлен

$$f_{\vec{\lambda}}(x) = (x - \lambda^{(1)}) \ldots (x - \lambda^{(s)}) \in \mathbb{Z}[x].$$

Вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(s)})$ назовём алгебраическим, если найдется натуральное число n такое, что вектор $\vec{\lambda}_1 = n\vec{\lambda}$ будет целым алгебраическим вектором.

Решётка Λ называется алгебраической, если любой вектор $\lambda \in \Lambda$ будет алгебраическим вектором.

В работе [172] показано, что для любого чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ множество алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ всюду плотно в метрическом пространстве PR_s.

Отсюда следует, что множество алгебраических сеток всюду плотно в метрическом пространстве обобщенных параллелепипедальных сеток. В настоящее время изучена только гиперболическая дзета-функция растянутой алгебраической решётки, соответствующей кольцу целых алгебраических чисел произвольного чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Вопрос об оптимальном выборе такого поля или выборе других алгебраических решёток и сеток остается открытым.

3. Семинар трех К

Все эти события по становлению нового направления математических исследований происходили в стенах Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР в рамках работы семинара по теоретико-числовым методам в приближенном анализе, организованного в 1956 году. Как указывает сам Н. М. Коробов в работе [134], "Заседание семинара проводилось под председательством одного из трех его руководителей — Н. С. Бахвалова (МГУ), Н. Н. Ченцова (ИПМ АН СССР) и Н. М. Коробова (МИ АН СССР)".

Интересен состав руководителей этого семинара. Н. М. Коробову шёл уже сороковой год, и он уже 4 года как был доктором физико-математических наук, а в 1955 году ему было присвоено звание профессора. Будущему академику Н. С. Бахвалову в то время было только 22 года, и он ещё работал над кандидатской диссертацией, которую защитил в 1958 году, а уже в 1964 году защитил докторскую диссертацию [6]. Будущему дважды лауреату государственных премий Н. Н. Ченцову было 26 лет, и он тоже защитил свою кандидатскую диссертацию только в 1958 году, но уже в 1956 году был награжден орденом Трудового Красного Знамени за выполнение важных прикладных работ. Свою докторскую диссертацию на тему "Общая теория статистического вывода" Н. Н. Ченцов защитил в 1969 г. [194].

По словам доцента Е. А. Морозовой, вдовы Н. Н. Ченцова, инициатива организации такого семинара исходила от Николая Николаевича Ченцова, который в это время работал в группе И. М. Гельфанда, занимающейся вычислительными проблемами отечественного атомного проекта. За пять лет участники семинара проделали значительную работу, о которой руководители докладывали на Четвертом Всесоюзном математическом съезде в 1961 году в Ленинграде. От имени руководителей доклад делал Н. Н. Ченцов [7]. В докладе приводился список публикаций из 27 наименований, из которых 12 в Докладах АН [4], [5], [13], [39], [40], [117]–[126], [157]–[159], [174], [178]-[179], [181], [193], [196], [199]–[201].

За рубежом аналог метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова был предложен на три года позже (1962 г.) Е. Главкой [221]. Он назвал параллелепипедальные сетки с оптимальными коэффициентами сетками с "хорошими точками". В результате, один и тот же объект вошел в позднейшие публикации и вычислительную практику с различными названиями и ссылками на разных авторов, хотя в последнее время даже австрийские математики ссылаются на работы Н. М. Коробова, восстанавливая историческую справедливость.

Результаты работы семинара **трех К** за первые шесть лет работы были отражены в монографии Н. М. Коробова [127] в 1963 г. (второе издание вышло в 2004 г. [140]). За рубежом этой проблеме были посвящены монографии [222], [223].

3.1. Биографические сведения о Н. М. Коробове

Николай Михайлович Коробов родился в Москве 23 ноября 1917 года в семье служащих, ответственных работников почтамта — Варвары Георгиевны Георгиевой и Михаила Никитича Коробова.

Родители Н. М. Коробова

Виктор и Николай Коробовы

Рис. 1: Семья Коробовых

Старший брат Николая Михайловича Виктор родился на четыре года раньше, до Первой мировой войны, в 1913 году.

Отец — Коробов Михаил Никитич (1882 – 1940) — работал на Московском почтамте на Мясницкой улице одним из ведущих инженеров связи.

Михаил Никитич на почтамте

С отцом Михаилом Никитичем

Рис. 2: Отец и сын

Варвара Георгиевна

Коля Коробов с мамой

Рис. 3: Мать и сын

Мать — Варвара Георгиевна Георгиева (1888 – 1962) — родилась в Москве, окончила 3 класса, после чего работала швеей. В 1904 году поступила на Пречистинские вечерние рабочие курсы (2 года общеобразовательные и 3 года специализированные математические курсы).

В 1908 году Варвара Георгиевна выдержала экстерном экзамены на звание учителя математики (алгебра и геометрия). Именно она сформировала интерес к математике у Николая Коробова. В 1909 году Варвара Георгиевна поступила работать на Московский почтамт.

С 1924 по 1935 годы Николай Михайлович учился в 24-ой школе Бауманского района города Москвы.

Школьные друзья

Организационным Комитетом Первой Московской Математической Олимпиады в заседании 11 июня 1935 г.
Коробов Николай Михайлович
признан победителем в Олимпиаде и награжден
первой премией

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ОРГКОМИТЕТА
ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ АКАДЕМИИ НАУК СССР:
П. Александров /АЛЕКСАНДРОВ/
СЕКРЕТАРЬ: А. Эйгес

Решение Организационного Комитета

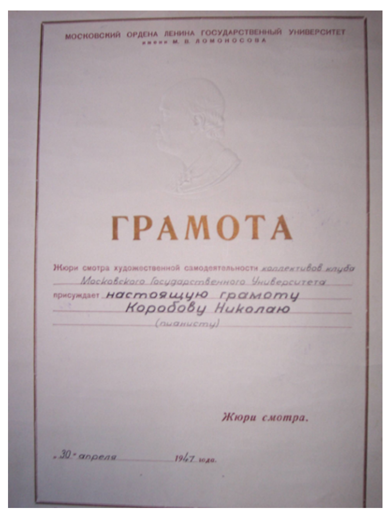
Рис. 4: Школьные годы

В июне 1935 года Николай Коробов принял участие в Первой Московской Математической Олимпиаде, где был награжден первой премией.

В 1935 году Николай Михайлович Коробов поступил на механико-математический факультет Московского Государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Здесь, будучи еще студентом, Николай Коробов начал свою педагогическую деятельность, работая со школьниками в математическом кружке при МГУ.

Студент университета Коробов



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ГРАМОТА

Жюри смотра художественной самодеятельности коллективов клуба Московского Государственного Университета
присуждает настоящую грамоту
Коробову Николаю
(пианисту)

Жюри смотра.

«30» апреля 1947 года.

Музыкальные успехи

Рис. 5: Студенческие годы

Музыка, розы и математика были источником духовных сил Николая Михайловича Коробова на протяжении всей его жизни.

Встреча на четвертом курсе со своим будущим учителем и научным руководителем, членом-корреспондентом АН СССР Александром Осиповичем Гельфондом определила круг научных интересов Н. М. Коробова.

Теория чисел стала основным полем его научной и педагогической деятельности.

А. О. Гельфонд

Рис. 6: А. О. Гельфонд — научный руководитель Н. М. Коробова

В 1940 году Н. М. Коробов окончил с отличием университет. В апреле 1941 года у него родилась старшая дочь Анна. После войны у него родились два сына Олег и Андрей и две дочери Зоя и Александра.

Рис. 7: Н. М. Коробов с дочерью Аней

В годы Великой Отечественной войны Николай Михайлович Коробов служил в рядах Красной Армии — преподавал высшую математику в Ленинградской военно-воздушной академии.

Как вспоминал Н. М. Коробов, осенью 1941 года он прибыл в Москву, ждал направление на фронт. Зашёл на родной факультет, встретил там Андрея Николаевича Колмогорова, рассказал ему о своей жизни. И вдруг неожиданно через неделю или две его отправляют в Елабугу преподавать в Ленинградской военно-воздушной академии, которая была туда эвакуирована. Он так и не знал до конца своей жизни, как встреча с А. Н. Колмогоровым в МГУ была связана с этим неожиданным изменением в его жизни.

После демобилизации в 1945 году Николай Михайлович поступил в аспирантуру МГУ к Александру Осиповичу Гельфонду и в 1948 году защитил кандидатскую диссертацию по теме «Некоторые вопросы равномерного распределения».

В 1953 году Н. М. Коробов получил степень доктора физико-математических наук, защитив диссертацию по теме «Об арифметических свойствах показательных функций». Оппонен-

Н. М. Коробов, 1943 год

Рис. 8: Служба в Ленинградской академии

тами по докторской диссертации были выдающиеся специалисты по теории чисел Ю. В. Линник, А. Я. Хинчин и Н. Г. Чудаков.

Ю. В. Линник

А. Я. Хинчин

Н. Г. Чудаков

Рис. 9: Оппоненты по докторской диссертации

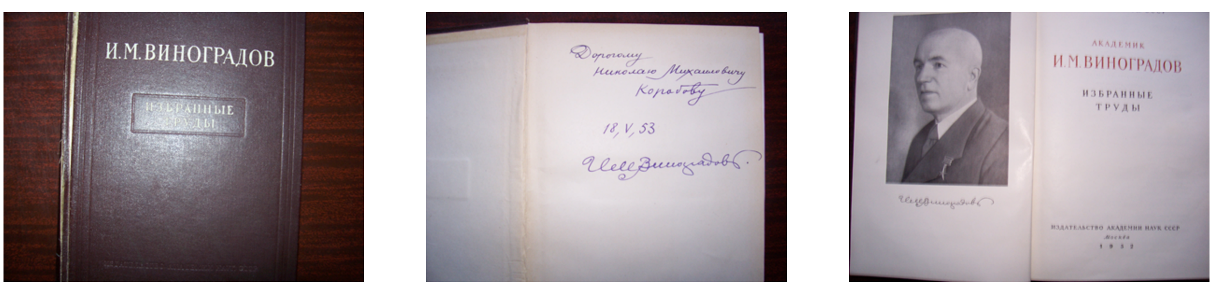


Рис. 10: Подарок академика И. М. Виноградова

В 1948 году Николай Михайлович начал преподавать на кафедре теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Здесь в 1955 году ему было присвоено звание профессора.

Мастерство педагога и филигранные лекции Коробова были достоянием широкой студенческой аудитории в Московском механическом институте, Московском энергетическом институте, Московском государственном педагогическом институте им. В. И. Ленина и МВТУ им. Н. Э. Баумана.

Однако научная деятельность Н. М. Коробова была связана не только с Московским государственным университетом. На протяжении пятидесяти семи лет он проработал в системе Академии Наук:

- 1948–1972 — Математический институт АН СССР им. В. А. Стеклова;

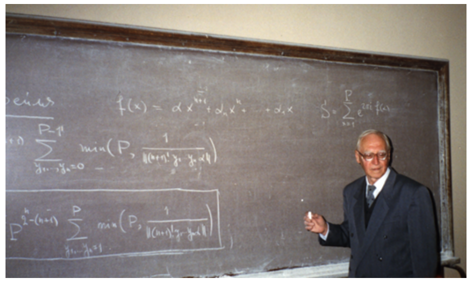


Рис. 11: Лекторское мастерство

- 1979–1988 — Вычислительный центр АН СССР;
- 1988–2004 — Институт истории естествознания и техники АН СССР — РАН им. С. И. Вавилова.

Научная деятельность Николая Михайловича Коробова развивалась в трех направлениях, в каждом из которых он добился выдающихся результатов:

1. Исследование вопросов распределения дробных долей;
2. Исследование и оценки тригонометрических сумм и применение этих оценок к различным вопросам аналитической теории чисел;
3. Исследование вопросов приближённого вычисления кратных интегралов.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н. М. Коробовым: было введено понятие вполне равномерного распределения; были построены примеры вполне равномерно распределенных функций; были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю.

Николаем Михайловичем было также введено понятие совместно нормальных чисел, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

Н. М. Коробов провел детальное изучение нормальных периодических систем и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

При исследовании тригонометрических сумм Коробовым впервые были рассмотрены тригонометрические суммы с так называемыми рекуррентными функциями. Для таких сумм он получил неулучшаемые оценки и применил их к исследованию распределения невычетов и первообразных корней в рекуррентных последовательностях.

Коробов впервые рассмотрел тригонометрические суммы с показательными функциями и получил полное описание сумм такого вида.

Им была получена также оценка суммы характеров, расширяющая область нетривиальности оценок Хассе-Вейля. Эта оценка показывает, что имеется интерференция для нулей локальной дзета-функции Римана кривой

$$y^2 \equiv f(x) \pmod p,$$

где p — простое, а $f(x)$ — полином нечётной степени.

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок классических сумм Вейля.

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу нулей дзета-функции Римана и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Оценку

$$\zeta(1+it) = O\left(\ln^{\frac{2}{3}}|t|\right), \quad t \to \infty,$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригонометрических сумм.

Одновременно с Николаем Михайловичем Коробовым подобные результаты в рамках проблемы оценок сумм Вейля были получены великим российским математиком Иваном Матвеевичем Виноградовым, о чем говорится во второй главе монографии А. Вальфиша «Welsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie», опубликованной в Берлине в 1963 году.

Рис. 12: И. М. Виноградов

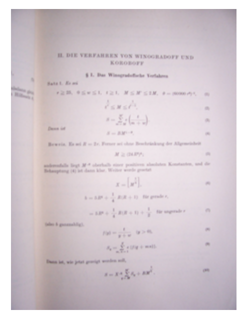
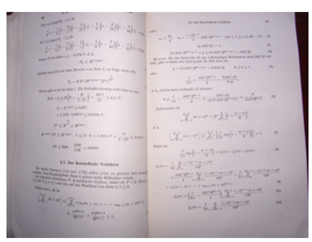



Рис. 13: Монография А. Вальфиша

Третий цикл работ Николая Михайловича посвящен вопросам приближенного вычисления кратных интегралов. Введение неравномерных сеток для построения многомерных квадратурных формул позволило с помощью оценок полных рациональных тригонометрических сумм получить гарантированную оценку погрешности приближенного интегрирования, аналогичную оценке для метода Монте-Карло.

Соображения о сравнениях специального вида, не рассматривавшихся ранее, были им применены к построению многомерных квадратурных формул. Эти формулы являются оптимальными по порядку остаточного члена как для функций малой гладкости, так и для гладких периодических функций.

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Признанием научных заслуг Н. М. Коробова являются премия им. П. Л. Чебышёва АН СССР (1958) и исполнение им обязанностей учёного секретаря оргкомитета III Всесоюзного математического съезда в Москве в 1956 году, на котором председателем оргкомитета был академик И. М. Виноградов.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРЕЗИДИУМ АКАДЕМИИ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

в заседании своем от 31 января 1958 года присудил

ДОКТОРУ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Николаю Михайловичу

КОРОБОВУ

ПРЕМИЮ имени П. Л. ЧЕБЫШЕВА

в размере 20000 рублей

ЗА РАБОТЫ:

«ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСАМ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ»,

«О ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ И СОВМЕСТНО НОРМАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ»,

«ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ»

ПРЕЗИДЕНТ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ГЛАВНЫЙ УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ ПРЕЗИДИУМА АКАДЕМИИ НАУК СССР

27 марта 1958 г. *г. МОСКВА*

№ 223

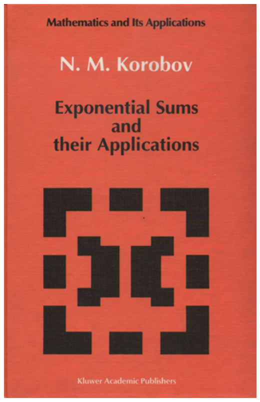
Рис. 14: Решение президиума АН СССР

Николай Михайлович Коробов — автор более 70 научных работ, в том числе двух монографий, в которых ярко раскрывается педагогический талант крупного учёного — понятно и просто излагать сложные и трудные вопросы теории чисел и её приложений к приближённому анализу.

Первая монография — «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе» — вышла двумя изданиями: в 1963 году и переработанное в 2004 году.

Вторая монография Коробова — «Тригонометрические суммы и их приложения» — вышла на русском языке в 1989 году, переведена на английский язык в 1992 году и на испанский язык в 1993 году.

Рис. 15: Монографии Н. М. Коробова



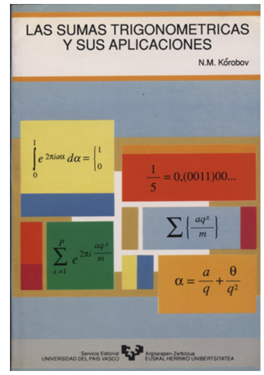


Рис. 16: Переводы монографий Н. М. Коробова

Являясь долгие годы соруководителем научно-исследовательского семинара кафедры теории чисел МГУ, он остался в памяти участников как заинтересованный, внимательный, но строгий авторитет по оценке научной деятельности многих математиков из периферийных вузов, выступавших на семинаре в Москве.

Создание теоретико-числового метода в приближённом анализе неразрывно связано с работой в 1957–1961 годах в Математическом институте АН СССР семинара, которым руководили Н. М. Коробов, Н. С. Бахвалов и Н. Н. Ченцов.

Тридцать лет без перерыва в МГУ им. Ломоносова работал под руководством Николая Михайловича Коробова семинар по тригонометрическим суммам и их приложениям для студентов, аспирантов и научных работников.

За годы педагогической деятельности Н. М. Коробов подготовил многих учеников: более 20-ти из них защитили кандидатские диссертации, а 8 – докторские. Среди них:

- доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом теории чисел Математического института им. В. А. Стеклова РАН А. А. Карацуба.

- доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета Д. А. Митькин.

- член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, директор Хабаровского отделения Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН В. А. Быковский.

- иностранный ученик, профессор Питер Цинтерхоф, возглавляющий Исследовательский институт программных технологий Зальцбургского университета в Австрии.


А. А. Карацуба


Д. А. Митькин


В. А. Быковский


П. Цинтерхоф

Рис. 17: Ученики Н. М. Коробова

С 1 февраля 1988 года Н. М. Коробов по приглашению Адольфа Павловича Юшкевича начал работать в секторе истории математики Института истории естествознания и техники РАН им. С. И. Вавилова. Сотрудничество Николая Михайловича с Институтом не только не прекратило его теоретико-числовых исследований, но и расширило их за счёт исторических аспектов.

Работы Николая Михайловича Коробова в области истории математики такие, как «О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования» (1994) и «О теоретико-числовых интерполяционных формулах» (2001), способствовали появлению интересных исследований по истории математического анализа и теории чисел.

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

- разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – специальные полиномы и комбинированные сетки

- совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов

- получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками

- изучал глубокие вопросы поведения неполных частных цепных дробей.

В 1994 году Николаю Михайловичу Коробову было присвоено звание заслуженного Соросовского профессора.


International Soros Science Education Program

In recognition and appreciation of outstanding contributions to world science and science education

KOROBOV
Nikolai Mikhailovich

is selected and named as a

GEORGE SOROS EMERITUS PROFESSOR

October 1, 1994

George Soros
Chairman, Soros Foundations

Рис. 18: Заслуженный Соросовский профессор

Николай Михайлович Коробов прожил долгую насыщенную жизнь ученого (23.11.1917–25.10.2004), не дожив 29 дней до своего 87-летия.

Рис. 19: Николай Михайлович Коробов дома, 2004 год

3.2. Биографические сведения о Н. Н. Ченцове

Рис. 20: Н. Н. Ченцов (19.02.1930–5.07.1992)

Николай Николаевич Ченцов родился 19 февраля 1930 года в Москве в семье научного сотрудника ЦАГИ. Его отец — Николай Гаврилович Ченцов (1882-1968) — окончил математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, был учеником и сотрудником Николая Егоровича Жуковского, проработал в ЦАГИ 40 лет с начала его открытия в 1918 году до своего 76-летия в 1958 году. Профессор Высшего технического училища, Герой социалистического труда Николай Гаврилович занимался теорией упругости, теорией композитов и газовой динамикой. Несомненно, его труд был направлен на обеспечение обороноспособности страны. Его сын достойно продолжил дело своего отца.

Коля Ченцов ещё в школе проявил интерес к математике, и, также как его будущий старший товарищ Н. М. Коробов, стал в 1947 году победителем X Московской математической олимпиады по десятым классам. После этого прямая дорога была на мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова, который он с отличием закончил в 1952 году. По распоряжению ректора МГУ, академика И. Г. Петровского Николай Ченцов был направлен в расчётное бюро Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, при этом в порядке исключения ему было разрешено учиться в заочной аспирантуре МИАН. За плодотворную работу в группе член-корреспондента АН СССР И. М. Гельфанда Н. Н. Ченцов в 1956 году был награждён орденом Трудового Красного Знамени, а в последствии в составе авторского коллектива в 1972 году Государственной премией.

Н. Н. Ченцов был ведущим специалистом в стране по методу Монте-Карло, но он внёс и в теоретико-числовой метод в приближенном анализе существенный вклад.

Во-первых, ему принадлежит очень важный результат, что если имеется бесконечная последовательность точек в единичном s-мерном кубе, то погрешность многомерной квадратурной формулы, составленной из первых N точек этой последовательности не может быть порядка $o(N^{-1})$.

Во-вторых, он существенно расширил класс функций, к которому применим теоретико-числовой метод в приближенном анализе. Первоначально метод Коробова был пригоден только на классе периодических функций. Н. Н. Ченцов предложил периодизацию функций. Таким образом, появилось понятие простейшей периодизации и полной периодизации функций для задач численного интегрирования функций многих переменных.

В-третьих, ему принадлежит важный результат об интегрировании функций от бесконечного числа переменных. В этой проблеме наиболее трудной задачей было выделить и описать класс функций с бесконечным числом переменных, для которых задача численного интегрирования является содержательной и допускает эффективное решение. Эту проблему Н. Н. Ченцов успешно решил в работе [193].

Подробнее о научном творчестве Н. Н. Ченцове можно узнать на сайте института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН http://www.keldysh.ru/memory/chentsov/bio_och.htm. и в книге Н. Н. Ченцов "Избранные труды: Математика."[195].

3.3. Биографические сведения о Н. С. Бахвалове

Рис. 21: Н. С. Бахвалов

Николай Сергеевич Бахвалов родился 29 мая 1934 года в Москве в семье профессора Московского университета, доктора физ.мат. наук Сергея Владимировича Бахвалова (1898-1963). В шестнадцать лет Николай Бахвалов закончил школу и стал студентом мех-мата МГУ, который закончил в 1955 году. В 1957 году он закончил аспирантуру и в 1958 году защитил кандидатскую диссертацию под руководством академика С. Л. Соболева. Интересно, что в Новосибирске С. Л. Соболев в начале шестидесятых годов начал цикл работ по кубатурным формулам. Результаты этих исследований С. Л. Соболева и его учеников были отражены в фундаментальной монографии [177].

Н. С. Бахвалов также был учеником академика А. Н. Колмогорова, и при оценке погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α он использовал идеи метода Колмогорова. Надо отметить, что наилучшие неулучшаемые оценки снизу на этом классе получил другой участник семинара **трёх К** — И. Ф. Шарыгин, который, дополнив метод Колмогорова и подходы Бахвалова идей близкой к методу К. Рота, получил улучшение оценки Бахвалова на множитель $\ln^{s-1} N$ (см. [197], [140]).

Н. С. Бахвалову принадлежит важный вклад в метод оптимальных коэффициентов. В работе [4] он ввёл важную характеристику, которая позднее была названа гиперболическим параметром решётки (см. [64, 65, 140]). Гиперболический параметр решётки позволил ему получить оценку гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения от многих переменных, которое соответствовало параллелепипедальной сетке. Позднее эта оценка была перенесена на случай произвольной решётки (см. [65, 140]).

Отметим, что Н. С. Бахвалов был одним из комментаторов к Избранным трудам Н. Н. Ченцова.

3.4. Участники семинара

Как указывает Н. М. Коробов в своей работе [134] значительный вклад в развитие теоретико-числового метода в приближенном анализе внесли другие участники семинара: И. И. Пятецкий-Шапиро, В. С. Рябенький, В. М. Солодов, И. Ф. Шарыгин и Ю. Н. Шахов. Кроме того, А. И. Салтыков выполнил большой объем вычислений по составлению первых таблиц оптимальных коэффициентов. По тем временам это была, действительно, большая и сложная работа, требующая от исполнителей значительных творческих, организационных и временных усилий. Остановимся кратко на характеристики некоторых работ участников семинара.

И. И. Пятецкий-Шапиро (30.03.1929–21.02.2009) ученик А. О. Гельфонда, А. А. Бухштаба и И. Р. Шафаревича доказал существование квадратурных формул с погрешностью интегрирования $O\left(N^{-1}\ln N\right)$. Эта работа стимулировала Н. М. Коробова на создание метода оптимальных коэффициентов (подробнее об этом в пятом разделе).

В. С. Рябенький — ученик И. Г. Петровского, родился 20 марта 1923 года, главный научный сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, был личным другом Н. М. Коробова до конца его дней. В теоретико-числовом методе в приближённом анализе он открыл два новых направления исследования: интерполяция функций многих переменных с помощью теоретико-числовых сеток [157, 159] и решение дифференциальных уравнений с частными производными с помощью теоретико-числовых сеток [158].

В. М. Солодов — ученик Н. М. Коробова, к.ф.-м.н., д.т.н., научный руководитель К. К. Фролова — занимался вопросами расширения области применения теоретико-числового метода вычисления кратных интегралов [181, 182, 183, 184].

И. Ф. Шарыгин (13.02.1937–12.03.2004) — ученик Н. С. Бахвалова — занимался вопросами периодизации задач интегрирования [196] и оценками снизу величины погрешности приближенного интегрирования [197, 198]. Обе его оценки снизу относятся к числу неулучшаемых.

Ю. Н. Шахов — ученик Н. М. Коробова — занимался применением теоретико-числовых сеток к интегральным уравнениям и другим вычислительным задачам [199]–[206].

4. Основные направления исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе

Первый этап истории развития теоретико-числового метода в приближенном анализе естественно отсчитывать от 1957 года, когда вышла первая работа Н. М. Коробова [117], до 1963 года, когда вышла его монография [127].

Можно констатировать, что уже на этом первом этапе определились следующие четыре основных направления исследований:

- Построение многомерных теоретико-числовых квадратурных формул для периодических функций и методы периодизации задач численного интегрирования (см. [4] — [13], [15], [17], [19], [20], [35], [40], [66], [81], [100], [104], [117] — [127], [139], [181], [190], [234], [238]).

- Построение многомерных интерполяционных формул периодических функций (см. [157], [159], [123], [137], [127] стр. 168 — 185, [174] — [176], [223] стр. 183 — 203).

- Построение теоретико-числовых методов решения интегральных уравнений (см. [119], [123], [199] — [202], [127] стр. 190 — 213, [223] стр. 204 — 217).

- Построение теоретико-числовых методов решения некоторых классов уравнений в частных производных (см. [158], [127] стр. 185 — 190, [223] стр. 217 — 222).

Кроме этого к этим четырем направлениям следует отнести и пятое —

- Построение различных многомерных теоретико-числовых сеток и оценка их отклонения.

Как уже отмечалось выше, теория равномерного распределения по модулю 1 является идейной основой теоретико-числового метода в приближенном анализе. В теории равномерного распределения после введения ван дер Корпутом [214] понятия отклонения наряду с качественными аспектами, когда устанавливается только факт равномерного распределения, стали играть центральную роль количественные аспекты, когда необходимо оценить величину отклонения равномерно распределенной последовательности. Его гипотезу о неограниченности величины отклонения первая решила Ардене-Эренфест [207].

В 1954 году вышла знаменитая работа К. Рота [229], в которой было введено понятие квадратичного отклонения для произвольной сетки M в s-мерном кубе. Он показал, что для квадратичного отклонения любой сетки M справедлива оценка снизу

$$D_2(M) >> \ln^{s-1}|M|.$$

Вопрос о точности этой оценки удалось решить К. Роту [230] только через 26 лет в 1980 году.

Эта тематика выросла в целое направление — теория нерегулярности распределения (см. [18], [21] — [28], [32] — [35], [38], [52], [53], [62] — [64], [70] — [72], [83] — [85], [97], [113], [142], [161] — [167], [192], [211] — [217], [226] — [232]).

Важность этих исследований обусловлена тем фактом, что через каждый вид отклонения выражается норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по соответствующей квадратурной формуле на подходящем классе функций (подробнее см. [74], [75]).

В рамках теоретико-числового метода в приближенном анализе выделились два важных направления:

- свойства оптимальных коэффициентов и алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов (см. [9], [11], [12], [29] — [31], [55], [94], [98], [99], [122], [129], [160], [186], [225]),
- теория гиперболической дзета-функции решёток (см. [56] — [58], [65], [82], [86], [103], [108], [109], [148] — [150], [156], [191], [68], [73] — [75]).

К ним примыкают ещё три направления, которые пока далеки от завершения:

- алгоритмы вычисления различных характеристик параллелепипедальных сеток (см. [95], [96]),
- определение количества точек решетки в гиперболическом кресте (см. [54], [107], [111], [153] — [155]),
- суммы дробных долей и их приложения (см. [50] — [53], [151]).

В последние годы своей жизни Н. М. Коробов особое внимание уделял новому направлению исследований:

- специальные полиномы и их приложения к приближенному анализу (см. [131], [135], [138], [187], [188]).

Наконец, отметим ряд отдельных работ, которые либо тесно связаны с теоретико-числовым методом в приближенном анализе, либо используются в этих исследованиях [16], [101], [102], [136], [209].

5. Метод оптимальных коэффициентов

Как рассказывал в феврале 1983 года сам Н. М. Коробов одному из авторов данной работы, метод оптимальных коэффициентов появился в результате поиска рационального варианта теоремы И. И. Пятецкого-Шапиро, в которой доказывалось существование действительных чисел $\theta_1, \ldots, \theta_s$, притом для каждой периодической функции и для каждого количества узлов N квадратурной формулы, вообще говоря, своих значений $\theta_1, \ldots, \theta_s$ таких, что квадратурная формула с узлами $(\{k\theta_1\}, \ldots, \{k\theta_s\})$ $(k = 1, \ldots, N)$ имеет порядок погрешности приближенного интегрирования $O\left(N^{-1}\ln N\right)$ (см. [127], стр. 85 — 87).

Позднее этот результат И. И. Пятецкого-Шапиро был уточнен. Были указаны арифметические свойства этих действительных чисел такие, что более точная оценка $O\left(N^{-1}\right)$ справедлива для любой функции на классе E_s^α $(\alpha > 1)$ гладких периодических функций и для любого количества узлов (см. [127], стр. 89 — 95). Но и этот важный теоретический результат имел существенный недостаток для вычислительной практики, так как относился к числу теорем существования, и он не давал алгоритма вычисления конкретных чисел $\theta_1, \ldots, \theta_s$, кроме случая $s = 2$.

Здесь мы видим ещё один методологический пример организации математических исследований. Получен важный теоретический результат о существовании нового математического объекта, но потребности практики требуют нахождения способов эффективого вычисления этого объекта. Так появляются алгоритмические проблемы теоретико-числового метода приближенного анализа. Надо подчеркнуть, что с самого начала проблема, стоящая перед исследователями, была алгоритмическая. Необходимо было найти эффективные методы численного решения сложных многомерных задач, доведя их до конкретных вычислительных программ, реализованных на компьютерах.

Первые результаты по применению теоретико-числовых сеток для вычисления интегралов произвольной кратности были получены в работе [117] для периодических функций, разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье.

В связи с изучением погрешности приближенного интегрирования для квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе периодических функций с быстро убывающими коэффициентами Фурье, в работе Н. М. Коробова [118] впервые встречается частный случай гиперболической дзета-функции решетки. Гиперболическая дзета-функция встречается в работах многих исследователей в связи с оценкой погрешности многомерных квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе гладких периодических функций. В частности, Н. С. Бахвалов доказал общую оценку сверху величины гиперболической дзета-функции через гиперболический параметр решетки, а Н. М. Коробов получил оценку снизу через детерминант решетки. Были построены алгоритмы нахождения оптимальных коэффициентов с малой величиной гиперболической дзета-функции решетки.

В общем виде гиперболическая дзета-функция решеток встречается в работах К. К. Фролова [189], [191]. Рассмотрев алгебраическую решетку, образованную целыми алгебраическими числами чисто вещественного алгебраического поля степени, равной размерности области интегрирования, К. К. Фролов показал, что для таких решеток оценки сверху и снизу для величины гиперболической дзета-функции совпадают по порядку. Отсюда и из результатов И. Ф. Шарыгина [197] следует, что квадратурные формулы с узлами из взаимной решетки к алгебраической решетке будут оптимальными по порядку убывания погрешности приближенного интегрирования на классе гладких периодических функций.

Развитие метода К. К. Фролова содержится в работах В. А. Быковского [15], [17], [19] и работах Н. М. Добровольского [64] — [69]. Дальнейший анализ продемонстрировал, что методы Н. М. Коробова и К. К. Фролова являются двумя противоположными полюсами теории квадратурных формул с обобщенными параллелепипедальными сетками и весовой функцией специального вида. При этом задача о вычислении погрешности приближенного интегрирования по таким формулам один раз сводится к теоретико-числовой задаче об оценке гиперболической дзета-функции соответствующей решетки, и не требуется каждый раз заново проводить оценку нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования для каждого нового типа обобщенной параллелепипедальной сетки.

Важной особенностью всех этих исследований является тот факт, что наряду с нахождением новых научных фактов происходил непрерывный процесс создания новых математических объектов, которые до этого не рассматривались в других исследованиях. Формирование нового языка — набора новых терминов и выделение новых направлений дальнейших исследований — является другим метологическим примером научной действительности.

В 60-х годах XX столетия, отвечая на запросы вычислительной практики, появились и другие подходы к построению многомерных квадратурных формул для различных классов функций (см. [174] — [180], [218], [219]). В связи с этим приведем весьма характерное высказывание академика С. Л. Соболева из [177] (с. 654): "Выбор пространства B, как это по большей части бывает в теории вычислений, в какой-то степени произволен и зависит в практических случаях от интуиции и вкуса исследователя. К сожалению, этот выбор частично диктуется желанием получить задачу, поддающуюся исследованию тем методом, который задуман автором, ибо самая естественная постановка может оказаться слишком трудной".

В настоящее время мы наблюдаем интересное явление, связанное с перемещением исследований по теоретико-числовым методам в приближенном анализе из Москвы в провинцию. Этот метод стал результатом работы семинара, организованного в МИАН им. В. А. Стеклова в 1957 году, которым руководили Н. С. Бахвалов, Н. М. Коробов и Н. Н. Ченцов. Позднее эти исследования сконцентрировались исключительно в МГУ в рамках семинара по тригонометрическим суммам и их приложениям под руководством Н. М. Коробова. В последнее время работа этого семинара продолжается под руководством учеников Н. М. Коробова, но его тематика сместилась в сторону тригонометрических сумм и геометрии чисел.

Непродолжительный период в стенах МИАН им. В. А. Стеклова под руководством С. М. Воронина с конца 80-х годов до последних дней Сергея Михайловича функционировала группа, исследования которой по теоретико-числовым квадратурам были поддержаны грантом РФФИ.

По разным оценкам сейчас в стране постоянно развитием данной теории занимается не более пяти человек, около которых концентрируются на некоторое время аспиранты и студенты, привлекаемые к этой тематике в той или иной мере. Хотя важность теории можно проиллюстрировать защитой по этой тематике за последние двадцать лет двух докторских [19], [73] и более десяти кандидатских диссертаций [202], [191], [67], [24], [156], [116], [150], [152], [34], [61], [42], [41], [147], [114], а также переизданием Н. М. Коробовым монографии [127], которое поддержано грантом РФФИ.

Таким образом, можно констатировать, что теоретико-числовой метод относится к числу актуальных направлений исследования, но в нашей стране его дальнейшая судьба неопределенная в силу малочисленности групп исследователей, занимающихся его развитием. В следующем разделе мы рассмотрим возможные пути решения этой проблемы, которыми может воспользоваться второе поколение исследователей, принявших эстафету от основателей направления.

6. ПОИВС для ТМК в приближенном анализе

В предыдущем разделе была кратко описана история возникновения и становления теоретико-числового метода в приближенном анализе, которая насчитывает уже 60 лет. Даже для специалиста в этой области ориентироваться во всем многообразии работ по этой теме крайне сложно. Согласно библиографии, составленной А. В. Устиновым по просьбе Н. М. Коробова для работы над вторым изданием его монографии, которая вышла в 2004 году, за последние 10 лет XX столетия за рубежом вышло более 500 работ по вопросам численного интегрирования.

В такой ситуации пользователю, например, специалисту по квантовой химии, в которой необходимо рассчитывать многомерные интегралы взаимодействия (см. [141]), или физику, занимающемуся физикой высоких энергий, для которой классы рассчитываемых интегралов существенно другие, или геофизику, решающему задачу минимизации сложной функции методом пвседослучайного поиска (см. [145], [146]), разобраться в этих методах практически невозможно.

Либо он должен забросить свое основное дело и разбираться в геометрии чисел, в теории чисто вещественных алгебраических расширений поля рациональных чисел, в распределении дивизоров и других нетривиальных вопросах теории чисел, либо довериться представителям чуждых для него научных направлений и принять их рецепты на веру, при условии, что они ему встретились.

Но и специалисту по этим методам разобраться во всех областях или в некоторых из них, где могут найти применение результаты его работы, также очень сложно.

Отсюда напрашивается вывод, что необходимо создать проблемно- ориентированную информационную систему (ПОИС) по теоретико-числовым методам в приближенном анализе.

В приложениях теории многомерных квадратурных формул особенную роль играет вычислительный эксперимент. Дело в том, что результаты о величине погрешности этих формул выражаются в терминах норм линейного функционала погрешности на некотором функциональном пространстве и нормы функции, определенной на нем. А, как правило, норма функции неизвестна и ее вычисление более сложная задача, чем вычисление интеграла. Таким образом, мы сталкиваемся с той самой естественной постановкой задачи, о которой писал академик С. Л. Соболев. Теория нам дает ориентиры, где надо искать удовлетворительное решение проблемы, а уже далее, на основании вычислительного эксперимента вырабатываются рекомендации для конкретного класса задач в конкретной предметной области — какой метод и с какими параметрами дает удовлетворительные, достоверные результаты.

Естественные науки сформулировали важнейший критерий научного метода — это воспроизводимость эксперимента. Любой пользователь программной реализации алгоритма должен иметь объективные критерии проверки достоверности полученных результатов. Остановимся на этом подробнее применительно к вопросу о вычислении многомерных интегралов.

Метод оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова обладает очень важным свойством ненасыщаемости алгоритма интегрирования (см. [3]), но это справедливо только для периодических функций. Н. Н. Ченцов предложил делать предварительную периодизацию задачи. Таким образом, мы получаем два параметра метода, количество точек сетки (узлов квадратурной формулы) и метод периодизации, если он требуется. Можно использовать другие методы численного интегрирования, которые приведены в библиографии. Вопрос об их объективном сравнении, насколько нам известно, комплексно не рассматривался. Вполне возможно, что это цеховая тайна специалистов крупных академических вычислительных центров, но такое положение тормозит развитие теории, хотя может быть имеет оправдание, исходящее из каких-то высших интересов.

Есть еще одна немаловажная проблема. В работах представителей разных научных школ используются разные обозначения и математический аппарат из далеких областей науки. Поэтому сопоставление их результатов, чем они себя, как правило, не утруждали, ложится на плечи пользователей этих теорий. Мы сталкиваемся с проблемой омертвления научного достояния. Это усугубляется тем, что телеграфный стиль научных публикаций, а, иногда, и другие соображения, заставляли авторов пренебрегать, осознанно или неумышленно, важным предостережением Дж. Литлвуда, что две пропущенные тривиальности могут в совокупности образовать непреодолимое препятствие.

Информационные технологии и стремительно развивающиеся возможности памяти на машинных носителях снимают ограничения на объем излагаемого материала и дают принципиальную возможность создавать полное и самодостаточное изложение любого материала. Например, можно в полном объеме предоставлять результаты любого эксперимента, в том числе и численного.

В последнее время идея практического создания информационных ресурсов по теории чисел и теоретико-числовым методам в приближенном анализе обогатилась сотрудничеством со студентами выпускного курса мех-мата ТулГУ, которые в рамках выполнения контрольно-практических работ по дисциплине "История и методология прикладной математики и информатики" создали ряд сайтов о крупных отечественных ученых. В это же время в ТГПУ на кафедрах информатики и информационных технологий создается сайт по теоретико-числовым методам в приближенном анализе, который размещен на факультетском сервере, приобретенном для этих целей на средства гранта РФФИ по теоретико-числовым методам приближенного анализа.

Подводя итог обсуждения в данном разделе, мы можем констатировать ещё один важный метологический аспект организации современных научных исследований — это необходимость информационной поддержки, по-видимому, любого научного исследования. На первый взгляд может показаться, что современные информационные ресурсы, широко представленные в Интернете, решают возникающие задачи, но более пристальный анализ показывает, что актуальным является создание всевозможных ПОИВС. Проблемно ориентированные информационно-вычислительные системы могут являться эффективной современной иновационной формой организации исследований, имеющей важные социальные аспекты.

7. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов

Одной из центральных проблем метода оптимальных коэффициентов остается вопрос о построении эффективных алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов. Все известные алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов, кроме случая двумерных коэффициентов, можно отнести к различным вариантам метода полного перебора дискретного аргумента из некоторой области для поиска минимального значения специально построенной функции или нескольких функций.

Суть одной группы этих алгоритмов состоит в следующем. Выбирается один из классов E_s^α и в нем граничная функция класса, то есть такая функция, для которой погрешность приближенного интегрирования по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой максимальна, а значение интеграла известно. После этого методом перебора в некоторой области коэффициентов находится набор, на котором эта величина минимальна. Такой набор и берется в качестве набора оптимальных коэффициентов, если имеется соответствующая теорема о существовании в заданной области оптимальных коэффициентов.

Поиск оптимальных коэффициентов существенно сокращается, если удается доказать, что их можно вычислять последовательно. Имеется два варианта такого последовательного вычисления — покоординатное, когда постепенно увеличивается размерность набора, и модульное, когда поиск для составного модуля основан на результатах поиска наборов для модуля-делителя этого составного модуля.

Суть других алгоритмов состоит в том, что на основании критериев оптимальности, например основанных на теореме Гельфонда, строится функция, для которой минимальное значение достигается на наборе оптимальных коэффициентов. Как показывают исследования, проводимые в рамках выполнения гранта РФФИ 05-01-00672, для широкого класса специальных составных модулей удается получить алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов за $O(N)$ арифметических операций для произвольной размерности. Как подчеркивал Н. М. Коробов в беседах на эту тему, такая трудоемкость вычисления оптимальных коэффициентов соизмерима с трудоемкостью численного интегрирования по параллелепипедальным сеткам, а значит, может считаться приемлемой.

8. Меры качества оптимальных коэффициентов

После достаточно длинного этапа исследований стало ясно, что необходимо рассмотрение различных мер качества оптимальных коэффициентов и их интерпретации как нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования или приближенного суммирования в подходящем функциональном пространстве.

В 1959 году Н.М.Коробов в работе "Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов" ввел сетки вида

$$M(\vec{a}, N) = \left\{ M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \middle| \, k = 1, 2, \ldots, N \right\}, \tag{19}$$

где $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_s)$, $a_1, \ldots, a_s$ — целые числа, взаимно простые с N. Такие сетки он назвал *параллелепипедальными*. В этой работе [121] Н. М. Коробовым было введено понятие оптимальных коэффициентов и указано их значение для приближенного вычисления многомерных интегралов произвольной кратности s от периодических гладких функций.

Пусть целое $N > 1$, $N_1 = \left[\dfrac{N-1}{2}\right]$, $N_2 = \left[\dfrac{N}{2}\right]$, $a_\nu = a_\nu(N)$ – целые, взаимно простые с N ($\nu = 1, \ldots, s$) и символ Коробова $\delta_N(b)$ задан равенствами

$$\delta_N(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \not\equiv 0 \pmod N, \\ 1, & \text{если} \quad b \equiv 0 \pmod N. \end{cases} \tag{20}$$

Обозначим через $S_N(z_1, \ldots, z_s)$ сумму[9]

$$S_N(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -N_1}^{N_2}{}' \frac{\delta_N(z_1 m_1 + \ldots + z_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}, \tag{21}$$

где $z_1, \ldots, z_s$ – произвольные целые, $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Согласно определению, *если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство*

$$S_N(a_1, \ldots, a_s) \leqslant B \frac{\ln^\beta N}{N}, \tag{22}$$

то целые $a_1, \ldots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β по модулю N.

Величину $S_N(a_1, \ldots, a_s)$ называют основной мерой качества набора оптимальных коэффициентов. Известно (см. [140] стр. 81), что для любых целых $a_1, \ldots, a_s$ выполняется оценка

$$S_N(a_1, \ldots, a_s) \geqslant B_0 \frac{\ln^s N}{N}, \tag{23}$$

с некоторой константой B_0.

Отметим, что основная мера качества является нормой линейного функционала приближенного суммирования на классе $E_{s,p}$ и, как показал И. Ф. Шарыгин [198], ни при каком выборе сетки эту оценку улучшить нельзя.

Для $\sigma(N)$ — *среднего арифметического основной меры качества набора коэффициентов по всем параллелепипедальным сеткам*, заданного равенством

$$\sigma(N) = \frac{1}{\varphi^s(N)} \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_s = 1 \\ (a_v, N) = 1 \, (v = 1, \ldots, s)}}^{N-1} S_N(a_1, \ldots, a_s), \tag{24}$$

и для любого составного модуля N справедливо асимптотическое равенство

$$\sigma(N) = \frac{2^s \ln^s N}{N} + O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N} \right). \tag{25}$$

Доказательство этой асимптотической формулы достаточно сложно (см. [106], [36], [37]). Из неё следует существование оптимальных коэффициентов для любого составного модуля N.

[9] Здесь $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

Различные критерии оптимальных коэффициентов, на которых основаны алгоритмы их вычисления, приведены в работах [122], [127] и [128]. В качестве критериев оптимальности набора естественно рассматривать различные количественные меры качества. В качестве меры качества можно брать погрешность приближенного интегрирования или суммирования граничной функции класса. Удается в явном виде в конечной форме найти граничные функции некоторых классов. Для этого требуется доказать ряд лемм о логарифмах произведения синусов, которые позволяют просуммировать некоторый класс конечных сумм.

9. Теорема А. О. Гельфонда и оптимальные коэффициенты

Важную роль имеет применение теоремы А. О. Гельфонда о связи решетки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, \ldots, a_s; N)$ решений линейного сравнения и присоединенной решетки $\Lambda^{(p)}$ решений системы линейных сравнений к вопросу о построении набора оптимальных коэффициентов параллелепипедальной сетки для любого составного модуля N.

В 1982 году Н. М. Коробов в работе [129] построил наиболее быстрый из известных алгоритм вычисления оптимальных коэффициентов по модулю, равному степени двойки (см. [12] с обобщением алгоритма Коробова). Этот алгоритм был основан на теореме А. О. Гельфонда, связывающей между собой величины гиперболического параметра $q(\Lambda)$ решетки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ решений линейного сравнения

$$m + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod N \tag{26}$$

и аналогичного параметра $Q(\Lambda)$ присоединенной решетки $\Lambda^{(p)}$ решений системы линейных сравнений

$$\begin{cases} k_1 \equiv a_1 k \\ \ldots\ldots\ldots \\ k_s \equiv a_s k \end{cases} \pmod N. \tag{27}$$

Согласно теореме А. О. Гельфонда (см. [128], [130], [80], [140]) для величин

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{m} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \overline{m}\,\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s, \qquad Q(\Lambda) = \min_{\substack{\vec{k} \in \Lambda^{(p)},\\ k \not\equiv 0 \pmod N}} |k||k_1| \ldots |k_s| \tag{28}$$

справедливы неравенства

$$\begin{gathered} Q(\Lambda) \geqslant C_1(s) q(\Lambda)^s, \qquad q(\Lambda) \geqslant C_1(s) \frac{Q(\Lambda)^s}{N^{s^2-1}}, \\ C_1 = \min\left(\frac{1}{(2s+3)^{s+1}}, \frac{1}{5^{2s}}\right). \end{gathered} \tag{29}$$

Будем как обычно через $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ обозначать расстояние до ближайщего целого.

Обозначим через $S_N^*(z_1, \ldots, z_s)$ сумму

$$S_N^*(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{k=1}^{N_2} \frac{1}{k \left\| \frac{z_1 k}{N} \right\| \ldots \left\| \frac{z_s k}{N} \right\|}, \tag{30}$$

где $z_1, \ldots, z_s$ – произвольные целые. Величину функции $S_N^*(z_1, \ldots, z_s)$ будем называть присоединенной мерой качества.

Л. П. Бочарова доказала ряд теорем (см. [9]):

Теорема 3. *Целые $1, z_1, \ldots, z_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю N тогда, и только тогда, когда существуют константы $\beta_2 = \beta_2(s)$ и $B_2 = B_2(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство*

$$S_N^*(z_1, \ldots, z_s) \leqslant B_2 \ln^{\beta_2} N.$$

Теорема 4. *Для любого натурального $N > 2$ существует набор оптимальных коэффициентов $1, a_1, \ldots, a_s$ по модулю N с*

$$S^*(a_1, \ldots, a_s) \leqslant (2\ln N + 2(C - \ln 2) + 3)^s\, (\ln N + C - \ln 2).$$

Таким образом, последняя теорема дает новое, достаточно простое доказательство существования оптимальных коэффициентов по любому составному модулю, а следующая теорема дает способ их вычисления.

Теорема 5. *Для любого натурального $N > 2$ определим последовательно целые числа $a_1^*, \ldots, a_s^*$ из условий*

$$S^*(a_1^*, \ldots, a_j^*) = \min_{\substack{1 \leqslant a \leqslant N-1,\\ (a,N)=1}} S^*(a_1^*, \ldots, a_{j-1}^*, a),$$
$$1 \leqslant a_j \leqslant N - 1, \quad (a_j, N) = 1 \quad (j = 1, \ldots, s),$$

тогда набор $1, a_1^*, \ldots, a_j^*$ является набором оптимальных коэффициентов по модулю N с

$$S^*(a_1^*, \ldots, a_j^*) \leqslant (2\ln N + 2(C - \ln 2) + 3)^j\, (\ln N + C - \ln 2)$$

при любом j с $1 \leqslant j \leqslant s$.

10. Алгоритмы поиска для произвольного модуля

Л. П. Бочаровой удалось построить алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов параллелепипедальных сеток и комбинированных сеток для произвольного N (см. [11]).

Множество $M_N(a_1, \ldots, a_s)$ из N точек $M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$, как уже указывалось выше, называется параллелепипедальной сеткой и используется для построения многомерных квадратурных формул вида:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ – погрешность квадратурной формулы.

Рассмотрим две функции

$$T_N^*(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{t=1}^{N-1} \prod_{\nu=1}^{s} \left(1 - 2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{a_\nu t}{N}\right\}\right)\right)\right),$$
$$T_N(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{t=1}^{N-1} \prod_{\nu=1}^{s} \left(\ln N - 2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{a_\nu t}{N}\right\}\right)\right)\right),$$

первая из которых называется логарифмической мерой качества, а вторая — усиленной логарифмической мерой качества набора коэффициентов $a_1, \ldots, a_s$ по модулю N.

Если рассмотреть обобщенную логарифмическую меру качества с константой $A \geqslant 1$, заданную равенством

$$T_{N,\,A}(a_1,\ldots,a_s)=\sum_{t=1}^{N-1}\prod_{\nu=1}^{s}\left(A-2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{a_\nu t}{N}\right\}\right)\right)\right), \tag{31}$$

то справедливы равенства

$$T_N^*(a_1,\ldots,a_s)=T_{N,1}(a_1,\ldots,a_s),\quad T_N(a_1,\ldots,a_s)=T_{N,\,\ln N}(a_1,\ldots,a_s).$$

Прежде всего заметим, что логарифмическая и усиленная логарифмическая меры качества набора коэффициентов имеют простой смысл в терминах приближенных формул суммирования. Рассмотрим среднее-арифметическое значение по узлам равномерной сетки, лежащим в открытом единичном s-мерном кубе $(0;1)^s$, для функций

$$f_1(x_1,\ldots,x_s)=\prod_{j=1}^{s}(1-2\ln(2\sin(\pi x_j)))$$

и

$$f_2(x_1,\ldots,x_s)=\prod_{j=1}^{s}(\ln N-2\ln(2\sin(\pi x_j))),$$

а именно,

$$\sigma_1=\frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\ldots,\,t_s=1}^{N-1}f_1\left(\frac{t_1}{N},\ldots,\frac{t_s}{N}\right)$$

$$\text{и }\sigma_2=\frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\ldots,\,t_s=1}^{N-1}f_2\left(\frac{t_1}{N},\ldots,\frac{t_s}{N}\right).$$

Согласно лемме о произведении синусов (см. [127], стр. 115)

$$\prod_{k=1}^{N-1}2\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)=N, \tag{32}$$

справедливы равенства

$$\sigma_1=\left(1-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=1-O\left(\frac{\ln N}{N}\right)$$

и

$$\sigma_2=\left(\ln N-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=\ln^s N-O\left(\frac{\ln^s N}{N}\right).$$

Если рассмотреть формулу приближенного суммирования с параллелепипедальной сеткой без нулевой точки

$$\frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\ldots,\,t_s=1}^{N-1}f\left(\frac{t_1}{N},\ldots,\frac{t_s}{N}\right)=$$

$$=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1}f\left(\left\{\frac{a_1t}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_st}{N}\right\}\right)-R[f],$$

то при $f(x_1,\dots,x_s)=f_1(x_1,\dots,x_s)$ получим

$$R[f_1]=\frac{T_N^*(a_1,\dots,a_s)}{N-1}-\left(1-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=$$
$$=\frac{T_N^*(a_1,\dots,a_s)-N}{N-1}+O\left(\frac{\ln N}{N}\right),$$

а при $f(x_1,\dots,x_s)=f_2(x_1,\dots,x_s)$ находим

$$R[f_2]=\frac{T_N(a_1,\dots,a_s)}{N-1}-\left(\ln N-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=$$
$$=\frac{T_N(a_1,\dots,a_s)-N\ln^s N}{N-1}+O\left(\frac{\ln^s N}{N}\right).$$

Ясно, что эти формулы являются частным случаем связи погрешности приближенного суммирования с обобщенной логарифмической мерой качества с константой A. Если рассмотрим среднее-арифметическое значение по узлам равномерной сетки, лежащим в открытом единичном s-мерном кубе $(0;1)^s$, для функции

$$f(x_1,\dots,x_s;A)=\prod_{j=1}^{s}(A-2\ln(2\sin(\pi x_j)))$$

а именно,

$$\sigma(A)=\frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\dots,t_s=1}^{N-1}f\left(\frac{t_1}{N},\dots,\frac{t_s}{N};A\right),$$

то при $A\geqslant 1$

$$\sigma(A)=\left(A-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=A^s-O\left(\frac{A^{s-1}\ln N}{N}\right).$$

Поэтому, если рассмотреть формулу приближенного суммирования с параллелепипедальной сеткой без нулевой точки

$$\frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\dots,t_s=1}^{N-1}f\left(\frac{t_1}{N},\dots,\frac{t_s}{N};A\right)=$$
$$=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1}f\left(\left\{\frac{a_1t}{N}\right\},\dots,\left\{\frac{a_st}{N}\right\};A\right)-R[f(\vec{x};A)],$$

то получим

$$R[f(\vec{x};A)]=\frac{T_{N,A}(a_1,\dots,a_s)}{N-1}-\left(A-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=$$
$$=\frac{T_{N,A}(a_1,\dots,a_s)-A^sN}{N-1}+O\left(\frac{A^{s-1}\ln N+A^s}{N}\right).$$

В работе [127] (см. стр. 117) показано, что необходимым и достаточным условием того, чтобы целые $a_1,\dots,a_s$ были оптимальными коэффициентами, является существование констант $\beta_1=\beta_1(s)$ и $c_1=c_1(s)$ таких, чтобы для логарифмической меры качества оценка

$$T_N^*(a_1,\dots,a_s)\leqslant N+c_1\ln^{\beta_1}N$$

выполнялась для бесконечной последовательности целых N.

Аналогичный результат для $T_N(a_1,\dots,a_s)$ — усиленной логарифмической меры качества доказан в работе [99].

Критерий оптимальности. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы целые $a_1,\dots,a_s$ были оптимальными коэффициентами, является существование констант $\beta_2=\beta_2(s)$ и $c_2=c_2(s)$ таких, чтобы оценка*

$$T_N(a_1,\dots,a_s)\leqslant N\ln^s N+c_2\ln^{\beta_2}N \tag{33}$$

выполнялась для бесконечной последовательности целых N.

При этом, если выполнена оценка (33), то каждый набор коэффициентов $a_{j_1},\ \dots,\ a_{j_t}$ $(1\leqslant j_1<\ldots<j_t\leqslant s)$, $t\geqslant 2$ будет оптимальным с индексом $max(t+\beta_2-s,t)$.

Важную роль в методе оптимальных коэффициентов играют среднее арифметическое логарифмической меры качества и среднее арифметическое усиленной логарифмической меры качества по всем параллелепипедальным сеткам:

$$\begin{aligned}T^*_N&=\frac{1}{\varphi^s(N)}\sum_{\substack{1\leqslant a_j\leqslant N-1,\,(a_j,N)=1\\(j=1,\dots,s)}}T^*_N(a_1,\dots,a_s),\\ T_N&=\frac{1}{\varphi^s(N)}\sum_{\substack{1\leqslant a_j\leqslant N-1,\,(a_j,N)=1\\(j=1,\dots,s)}}T_N(a_1,\dots,a_s).\end{aligned} \tag{34}$$

Если рассмотреть среднее арифметическое обобщенной логарифмической меры качества с константой A по всем параллелепипедальным сеткам

$$T_{N,\,A}=\frac{1}{\varphi^s(N)}\sum_{\substack{1\leqslant a_j\leqslant N-1,\,(a_j,N)=1\\(j=1,\dots,s)}}T_{N,A}(a_1,\dots,a_s), \tag{35}$$

то

$$T^*_N=T_{N,1},\quad T_N=T_{N,\ln N}.$$

Как показал Н. М. Коробов ([127], стр. 122), при простом $N=p$ справедливо равенство

$$T^*_p=(p-1)\left(1-\frac{2\ln p}{p-1}\right)^s.$$

Аналогичное равенство справедливо для усиленной логаримической меры качества

$$T_p=(p-1)\left(\ln p-\frac{2\ln p}{p-1}\right)^s \tag{36}$$

и для обобщенной логаримической меры качества с константой A

$$T_{p,\,A}=(p-1)\left(A-\frac{2\ln p}{p-1}\right)^s. \tag{37}$$

Каждое из этих равенств позволяет утверждать, что в основном все параллелепипедальные сетки по простому модулю являются оптимальными.

Заметим, что в работе [99] для простого p и $N=p^h$ доказана более общая формула

$$T_{p^h}=(p^h-1)\ln^s p^h+\sum_{\lambda=1}^{h}\varphi\left(p^\lambda\right)\left(\left(\ln p^h-\frac{2\ln p}{\varphi\left(p^\lambda\right)}\right)^s-\ln^s p^h\right). \tag{38}$$

Удается доказать обобщенный критерий оптимальности набора коэффициентов по произвольному модулю N, выраженный в терминах величины обобщенной логарифмической меры качества $T_{N,A}(a_1,\ldots,a_s)$, и вычисляется среднее $T_{N,A}$.

Далее, центральное место в теории занимает алгоритм поиска значений $a_1,\ldots,a_s$ из приведенной системы вычетов по произвольному модулю N, таких что для обобщенной логарифмической меры качества $T_{N,A}(a_1,\ldots,a_s)$ выполнено неравенство

$$T_{N,A}(a_1,\ldots,a_s)\leqslant T_{N,A}. \tag{39}$$

В частности, при $A=\ln N$ получаем неравенство

$$T_N(a_1,\ldots,a_s)\leqslant N\ln^s N. \tag{40}$$

Значение именно таких наборов оптимальных коэффициентов для комбинированных сеток (см. [133])

$$M(k,k_1,\ldots,k_s)=\left(\left\{\frac{a_1k}{N}+\frac{k_1}{M}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{N}+\frac{k_1}{M}\right\}\right)$$
$$(k=0,1,\ldots,N-1;k_1,\ldots,k_s=0,1,\ldots,M-1),$$

где M — произвольное натуральное, взаимно простое с N, определяется следующим результатом из работы [99].

Если оптимальные коэффициенты $a_1,\ldots,a_s$ удовлетворяют условию (40), $M<<\ln(N)$ и $f\in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности $R_{NM^s}[f]$ квадратурной формулы

$$\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f(\vec{x})\,d\vec{x}=$$
$$=\frac{1}{NM^s}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{M-1} f\left(\left\{\frac{a_1k}{N}+\frac{k_1}{M}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{N}+\frac{k_s}{M}\right\}\right)-R_{NM^s}[f],$$

выполняется оценка

$$|R_{NM^s}[f]|<<\frac{\ln^{\alpha s}N}{(NM^s)^\alpha}.$$

Все известные алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов, кроме случая $s=2$, можно отнести к различным вариантам метода полного перебора дискретного аргумента из некоторой области для поиска минимального значения специально построенной функции или нескольких функций. К такому же типу относится и предлагаемый ниже алгоритм. Так как для простых модулей N алгоритм Коробова из [127] (см. стр. 120 — 123) совпадает с нашим, а для модуля N, равного степени простого p, обобщение алгоритма Коробова содержится в работе [99], то далее будет предполагаться модуль N, имеющий хотя бы два различных простых делителей, то есть $v(N)>1$. Для краткости далее везде $n=v(N)\geqslant 2$.

Напомним определение произведения двух сеток M_1 и M_2. Как известно (см. [59]),

$$M_1\cdot M_2=\left\{\,\vec{z}=\{\vec{x}+\vec{y}\}|\,\vec{x}\in M_1,\,\vec{y}\in M_2\right\},$$

где для любого вектора $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$.

Для нахождения оптимальных значений $a_1,\ \ldots,\ a_s$ переменных $X_1,\ \ldots,\ X_s$, пробегающих наименьшую приведенную систему вычетов по модулю $N=P_1\cdot\ldots\cdot P_n$, где $P_\nu=p_\nu^{\alpha_\nu}$ $(\nu=1,\ldots,n)$ и $p_1,\ldots,p_n$ — различные простые в каноническом разложении числа

N, переходим к рассмотрению параллелепипедальной сетки по модулю N как произведения параллелепипедальных сеток по модулям $P_1,\ldots,P_n$:

$$M_N(a_1,\ldots,a_s)=\prod_{\nu=1}^{n} M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu}),$$

где $a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu}$ из приведенной системы вычетов по модулю P_ν $(\nu=1,\ldots,n)$. Такое представление параллелепипедальной сетки по модулю N как произведения параллелепипедальных сеток по модулям $P_1,\ldots,P_n$ приводит к поиску $a_1,\ldots,a_s$ в виде

$$a_j=N\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{j\nu}}{P_\nu}\right\}\quad(1\leqslant j\leqslant s),$$

а сама параллелепипедальная сетка $M_N(a_1,\ldots,a_s)$ допускает более удобную для дальнейшего кратную параметризацию точек

$$M_N(a_1,\ldots,a_s)=$$
$$=\left\{M(t_1,\ldots,t_n)=\left(\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{1\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\},\ldots,\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{s\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant t_\nu\leqslant P_\nu-1\\ \nu=1,\ldots,n\end{array}\right\}.$$

Многие дальнейшие выкладки будут иметь геометрическую интерпретацию, если рассмотреть следующие произведения параллелепипедальных сеток:

$$M^{(\lambda)}=\prod_{\nu=1}^{\lambda}M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu})=$$
$$=\left\{M(t_1,\ldots,t_\lambda)=\left(\left\{\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{a_{1\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\},\ldots,\left\{\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{a_{s\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant t_\nu\leqslant P_\nu-1\\ \nu=1,\ldots,\lambda\end{array}\right\},$$
$$M^{(\lambda)*}=\prod_{\nu=\lambda+1}^{n}M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu})=$$
$$=\left\{M(t_{\lambda+1},\ldots,t_n)=\left(\left\{\sum_{\nu=\lambda+1}^{n}\frac{a_{1\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\},\ldots,\left\{\sum_{\nu=\lambda+1}^{n}\frac{a_{s\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant t_\nu\leqslant P_\nu-1\\ \nu=\lambda+1,\ldots,n\end{array}\right\},$$

$$M_N(a_1,\ldots,a_s)=M^{(\lambda)}\cdot M^{(\lambda)*}\quad(0\leqslant\lambda\leqslant n).\tag{41}$$

Здесь удобно считать, что $M^{(0)}=M^{(n)*}=\{\vec{0}\}$, кроме того полагаем $p_0=1$.

Такой подход приводит сначала к переходу к переменным $Z_{j\nu}$, пробегающим приведенные системы вычетов, соответственно, по модулю P_ν, с помощью формулы

$$X_j=N\left\{\frac{Z_{j1}}{P_1}+\ldots+\frac{Z_{jn}}{P_n}\right\}\quad(j=1,\ldots,s).$$

Затем рассмотрим каждую из параллелепипедальных сеток $M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ \ldots,\ a_{s\nu})$ по модулю P_ν как произведение неполных параллелепипедальных сеток:

$$M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu})=\prod_{\lambda=0}^{\alpha_\nu-1}M^*_{p_\nu^{\lambda+1}}\left(\sum_{\mu=0}^{\lambda}a_{1\nu\mu}p_\nu^\mu,\ldots,\sum_{\mu=0}^{\lambda}a_{s\nu\mu}p_\nu^\mu\right),$$

где неполная параллелепипедальная сетка

$$M^*_{p_\nu^{\lambda+1}}\left(\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{1\nu\mu}p_\nu^\mu,\ldots,\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{s\nu\mu}p_\nu^\mu\right)$$

из p_ν точек имеет вид:

$$M^*_{p_\nu^{\lambda+1}}\left(\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{1\nu\mu}p_\nu^\mu,\ldots,\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{s\nu\mu}p_\nu^\mu\right) =$$
$$= \left\{ M_\lambda(t_{\nu,\lambda}) = \left(\left\{\frac{t_{\nu,\lambda}}{p_\nu^{\lambda+1}}\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{1\nu\mu}p_\nu^\mu\right\},\ \ldots,\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots,\left\{\frac{t_{\nu,\lambda}}{p_\nu^{\lambda+1}}\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{s\nu\mu}p_\nu^\mu\right\}\right)\right|\, 0\leqslant t_{\nu,\lambda}\leqslant p_\nu-1\right\}.$$

Таким образом приходим к $p-$ичным представлениям переменных $Z_{j\nu}$:

$$Z_{j\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha_\nu-1} z_{j\nu\lambda}p_\nu^\lambda \quad (j=1,\ldots,s \quad \nu=1,\ldots,n),$$

при этом величины $z_{j\nu\lambda}$ при $1\leqslant\lambda\leqslant\alpha_\nu-1$ пробегают полные системы вычетов по модулю p_ν, а величина $z_{j\nu0}$ — только приведенную систему вычетов.

Следовательно, задача о нахождении оптимальных значений $a_1, \ldots, a_s$ из достаточно сложной для программирования $s-$мерной области

$$1\leqslant a_j\leqslant N-1 \quad (a_j,N)=1 \quad (1\leqslant j\leqslant s),$$

содержащей $\varphi^s(N)$ точек, где $\varphi(N)$ — функция Эйлера, сводится к задаче о нахождении значений

$$a_{j\nu\lambda} \quad (1\leqslant j\leqslant s, 1\leqslant\nu\leqslant n, 0\leqslant\lambda\leqslant\alpha_\nu-1)$$

из более простой $s(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)-$мерной области

$$0\leqslant a_{j\nu\lambda}\leqslant p_\nu-1 \quad (1\leqslant j\leqslant s, 1\leqslant\nu\leqslant n, 1\leqslant\lambda\leqslant\alpha_\nu-1),$$
$$1\leqslant a_{j\nu0}\leqslant p_\nu-1 \quad (1\leqslant j\leqslant s, 1\leqslant\nu\leqslant n),$$

в которой содержится то же самое количество точек.

Упорядочим множество индексов $(j\,\nu\,\lambda)$ по правилу:

$(j_1\,\nu_1\,\lambda_1)<(j\,\nu\,\lambda)$, если выполнено одно из трех условий:

$$\begin{cases} a) & \nu_1<\nu; \\ b) & \nu_1=\nu, \quad \lambda_1<\lambda; \\ c) & \nu_1=\nu, \quad \lambda_1=\lambda, \quad j_1<j. \end{cases}$$

Условия $a), b), c)$ задают на множестве индексов линейный порядок, который с точностью до перестановки индексов является лексикографическим. Минимальным элементом является набор $(1\,1\,0)$, максимальным — $(s\,n\,\alpha_n-1)$.

На линейно упорядоченном множестве индексов можно ввести две функции: $(j\,\nu\,\lambda)'$ — следующий набор, $(j\,\nu\,\lambda)^*$ — предыдущий набор с помощью равенств

$$(j\,\nu\,\lambda)' = \begin{cases} (j+1\,\nu\,\lambda), & \text{если} \quad j < s, \\ (1\,\nu\,\lambda+1), & \text{если} \quad j = s, \lambda < \alpha_\nu - 1, \\ (1\,\nu+1\,0), & \text{если} \quad j = s, \lambda = \alpha_\nu - 1, \nu < n; \end{cases}$$

$$(j\,\nu\,\lambda)^* = \begin{cases} (j-1\,\nu\,\lambda), & \text{если} \quad j > 1, \\ (s\,\nu\,\lambda-1), & \text{если} \quad j = 1, \lambda > 0, \\ (s\,\nu-1\;\alpha_{\nu-1}-1), & \text{если} \quad j = 1, \lambda = 0, \nu > 1. \end{cases}$$

Для описания алгоритма вычисления $a_{j\nu\lambda}$ нам необходимо построить систему функций $T_{N,A}^{(j\nu\lambda)}(z)$, зависящих от параметров $a_{j_1\nu_1\lambda_1}$ со всеми наборами индексов $(j_1\,\nu_1\,\lambda_1) < (j\,\nu\,\lambda)$.

Удобно ввести ещё вспомогательные функции $T_{N,A}^{(0\nu\lambda)}(z) = T_{N,A}^{(1\nu\lambda)^*}(z)$.

Определим величины ε_λ и множества $B_{\nu\lambda}$ равенствами

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \lambda = 0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > 0, \end{cases} \qquad B_{\nu\lambda} = \{\varepsilon_\lambda, \ldots, p_\nu - 1\}.$$

Таким образом, множество $B_{\nu\lambda}$ — полная система вычетов по модулю p_ν при $\lambda > 0$ и приведенная при $\lambda = 0$.

Определение функций $T_{N,A}^{(j\nu\lambda)}(z)$, заданной на конечном множестве $B_{\nu\lambda}$, проведем последовательно, начиная с наибольшего набора индексов, следующим образом.

$$T_{N,A}^{(sn\alpha_n-1)}(z) = T_{N,A}\left(N\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_\nu-1} z_{1\nu\lambda}p_\nu^\lambda\right\}, \ldots, N\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_\nu-1} z_{s\nu\lambda}p_\nu^\lambda\right\}\right),$$

где $z = z_{sn\alpha_n-1}$, а все остальные $z_{j\nu\lambda}$ с меньшими наборами индексов являются параметрами.

Если функция $T_{N,A}^{(j\nu\lambda)}(z)$ уже определена, то следующая функция $T_{N,A}^{(j\nu\lambda)^*}(z)$ от $z = z_{(j\nu\lambda)^*}$ на конечном множестве $B_{\nu_1\lambda_1}$, где $(j_1\nu_1\lambda_1) = (j\nu\lambda)^*$, задается равенством

$$T_{N,A}^{(j\nu\lambda)^*}(z) = \frac{1}{p_\nu - \varepsilon_\lambda}\sum_{u=\varepsilon_\lambda}^{p_\nu-1} T_{N,A}^{(j\nu\lambda)}(u).$$

Построение набора функций $T_{N,A}^{(j\nu\lambda)}(z)$ для $(110) \leqslant (j\,\nu\,\lambda) \leqslant (s\,n\,\alpha_n - 1)$ закончено.

Алгоритм вычисления величин $a_{110}, \ldots . a_{sn\alpha_n-1}$ проводится последовательно, исходя из соотношений:

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_{110} \leqslant p_1 - 1, \\ T_{N,A}^{(110)}(a_{110}) = \min\limits_{1 \leqslant z \leqslant p_1 - 1} T_{N,A}^{(110)}(z), \end{cases} \tag{42}$$

если $a_{110}, \ldots . a_{(j\nu\lambda)^*}$ уже определены, то $a_{j\nu\lambda}$ находится из условий

$$\begin{cases} \varepsilon_\lambda \leqslant a_{j\nu\lambda} \leqslant p_\nu - 1, \\ T_{N,A}^{(j\nu\lambda)}(a_{j\nu\lambda}) = \min\limits_{\varepsilon_\lambda \leqslant z \leqslant p_\nu - 1} T_{N,A}^{(j\nu\lambda)}(z). \end{cases} \tag{43}$$

Для всех функций $T_N^{(j\nu\lambda)}(z)$, выполнив необходимые суммирования в конечном виде, удается получить явные формулы.

Центральным результатом здесь является следующая теорема:

Пусть $a_{110}, \ldots, a_{sn\alpha_n-1}$ найдены по алгоритму, заданному формулами (42, 43). Обозначим через $a_1, \ldots, a_s$ величины, заданные по формулам

$$a_j = N\left\{\frac{1}{P_1}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_1-1} a_{j1\lambda}p_1^\lambda + \ldots + \frac{1}{P_n}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_n-1} a_{jn\lambda}p_n^\lambda\right\} \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{44}$$

Теорема 6. *Величины $a_1,\dots,a_s$ заданные формулами (42, 43, 44) являются оптимальными коэффициентами по модулю N индекса s и для обобщенной логарифмической меры качества с константой A этого набора коэффициентов по модулю N справедливо неравенство*

$$T_{N,A}(a_1,\dots,a_s)\leqslant A^s\cdot(N-1)+\sum_{p|N}\sum_{\nu=1}^{\nu_p}\left(1-\frac{1}{p}\right)p^{\nu}\left(\left(A-\frac{2p\ln p}{(p-1)p^{\nu}}\right)^s-A^s\right).$$

11. Алгоритмы поиска для специальных модулей

Оказалось, что постулат Бертрана, доказанный П. Л. Чебышевым, играет важную роль для построения быстрых алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов. Дается определение допустимой последовательности простых и специального модуля, для которых на основе общего алгоритма для $N=p_1p_2\dots p_k$, где $p_1,p_2,\dots,p_k$ — допустимая последовательность простых чисел, строится алгоритм вычисления за $O(N)$ арифметических операций значений $a_1,\dots,a_s$ из приведенной системы вычетов по модулю N таких, что выполнено неравенство (39).

Пусть p — фиксированное нечетное простое число большее 3, например, любое нечетное простое число большее 3 и не превосходящее 100. Будем говорить, что монотонно возрастающая последовательность $p_1,p_2,\dots,p_k$ — допустимая последовательность простых чисел длины k для простого p, если для этой последовательности простых чисел выполнены условия

$$p_1=p,\quad \frac{6p_1\dots p_{j-1}}{6^{j-1}}<p_j<\frac{12p_1\dots p_{j-1}}{6^{j-1}}\quad (2\leqslant j\leqslant k). \tag{45}$$

Из постулата Бертрана легко следует, что для любого простого нечетного $p>3$ существует допустимая последовательность простых чисел произвольной длины k.

Непосредственными вычислениями, используя таблицу простых, нетрудно проверить, что для простого $p=5$ допустимой последовательностью простых длиной 6 будет последовательность $5,7,11,17,53,307$, которая определяет модуль $N=106493695$.

Для заданного фиксированного простого p, вообще говоря, существует несколько допустимых последовательностей простых чисел $p_1,p_2,\dots,p_k$ первого типа длины k. Среди них можно выделить одну минимальную допустимую последовательность $p'_1,p'_2,\dots,p'_k$ и одну максимальную $p''_1,p''_2,\dots,p''_k$, которые обладают свойством

$$p'_j<p_j<p''_j\quad (3\leqslant j\leqslant k) \tag{46}$$

для любой допустимой последовательности $p_1,p_2,\dots,p_k$ с одним и тем же p. Тем самым определяется минимальный модуль $N'_{p,k}=p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_k$ и максимальный $N''_{p,k}=p''_1\cdot p''_2\cdot\ldots\cdot p''_k$.

Например, для $p=5$ минимальной допустимой последовательностью длины 6 будет последовательность $5,11,43,919$, а максимальной — $5,7,11,19,\ 67,751$. Соответственно, $N'_{5,6}=5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot23\cdot89=10245235$ и $N''_{5,6}=5\cdot7\cdot11\cdot19\cdot67\cdot751=368068855$.

Будем предполагать, что заранее перед выполнением алгоритма затабулирована таблица функции $\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{k}{N}\right\}\right)\right)$ для $k=1,2,\dots,N-1$, что потребует разового выполнения $C\cdot N$ машинных операций. Также будем предполагать, что имеется массив всех делителей числа $N=p_1\cdot\ldots\cdot p_k$, в котором 2^k различных элементов, а также массивы значений функции Мёбиуса и функции Эйлера для каждого из этих делителей. Вычисление этих массивов потребует не более $O(\sqrt{N})$ элементарных арифметических операций, а для хранения — не более $O(\sqrt{N})$ байтов объема оперативной памяти.

Таким образом, подготовительная часть нашего алгоритма имеет трудоемкость $O(N)$ элементарных арифметических операций, а для хранения вспомогательных таблиц необходимо $O(N)$ байтов объема оперативной памяти.

Теорема 7. *Пусть $K^*(N)$ — количество элементарных операций, необходимых для вычисления величин $a_1, \ldots, a_s$ оптимальных коэффициентов по специальному модулю N индекса s, тогда справедливо неравенство*

$$K^*(N) \leqslant 5s^2CN\left(\frac{7}{2}\cdot p+32\frac{2}{5}\right)=5\cdot C\cdot s^2\cdot N\cdot\left(\frac{7}{10}\cdot p+6\frac{12}{25}\right), \tag{47}$$

где C — максимальное количество элементарных операций для вычисления и использования одного множителя вида $A-2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{z_{j\nu}t}{p_\nu}\right\}\right)\right)$, а специальные модули N принадлежат показателю 0 с константой $\frac{7}{10}\cdot p+6\frac{12}{25}$.

12. Гиперболическая дзета-функция решёток

Сейчас мы остановимся на нерешенных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток, которая задаётся в правой полуплоскости $\alpha>1$ дзета рядом[10]

$$\zeta(\Lambda|\alpha)=\sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}'(\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{48}$$

Очевидно, что при $s=1$ гиперболическая дзета-функции решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

Впервые гиперболическая дзета-функция решёток возникла в работах Н. М. Коробова [118], [121] и Н. С. Бахвалова [4] в 1959 году для решёток решений линейного сравнения с несколькими переменными. В наиболее общем виде она появилась в работах К. К. Фролова [189], [191]. Сам термин гиперболическая дзета-функция решёток появился только в 1984 году в работе [65], в которой начато её изучение как самостоятельного объекта исследований.

В работе [76] были выделены следующие основные направления современных исследований:

1. Проблема правильного порядка убывания гиперболической дзета-функции при $\alpha\to\infty$;
2. Проблема существования аналитического продолжения в левую полуплоскость $\alpha=\sigma+it$ ($\sigma\leqslant 1$) гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$;
3. Аналитическое продолжение для случая решёток С. М. Воронина $\Lambda(F,q)$;
4. Аналитическое продолжение для случая решётки совместных приближений;
5. Аналитическое продолжение для случая алгебраической решётки
   $\Lambda(t,F)=t\Lambda(F)$;
6. Аналитическое продолжение для случая произвольной решётки Λ.;
7. Проблема поведения гиперболической дзета-функции решётки
   $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в критической полосе;
8. Проблема значений тригонометрических сумм сеток.

Более подробно с состоянием теории гиперболической дзета-функции решёток можно познакомиться по работам [44, 45, 46, 65, 76, 86, 91, 92, 103, 109].

[10] Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x}=\vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x}=\max(1,|x|)$.

13. Диофантовы проблемы теории алгебраических чисел

На первый взгляд, диофантовы проблемы теории алгебраических чисел далеки от теоретико-числового метода в приближенном анализе, но это не так.

Во-первых, до сих пор ничего неизвестно про вещественные числа из теоремы Пятецкого-Шапиро. Естественно возникает вопрос, если такие числа имеют ненулевую меру Лебега, то входят ли в это множество алгебраические числа?

Как известно (см. [127], стр. 98), теореме Пятецкого-Шапиро удовлетворяют числа $\theta_1,\ldots,\theta_s$ такие, что для любых $m_1,\ldots,m_s$, не равных одновременно нулю, выполняется неравенство

$$\|\theta_1m_1+\ldots+\theta_sm_s\|\geqslant\frac{C_0}{\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}\left(\ln(\overline{m_1}+1)\ldots\ln(\overline{m_s}+1)\right)^{\gamma}},$$

где константы $\gamma\geqslant 0$ и $C_0>0$ не зависят от $m_1,\ldots,m_s$.

Ясно, что эти вопросы связаны со свойствами решётки совместных приближений Дирихле

$$\Lambda(\theta_1,\ldots,\theta_s)=\{(q,\theta_1q-p_1,\ldots,\theta_sq-p_s)|q,p_1,\ldots,p_s\in\mathbb{Z}\}$$

и взаимной решёткой

$$\Lambda^*(\theta_1,\ldots,\theta_s)=\{(q+\theta_1p_1+\ldots+\theta_sp_s,-p_1,\ldots,-p_s)|q,p_1,\ldots,p_s\in\mathbb{Z}\}\,.$$

Поэтому, в частности, так важно изучить вопрос об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции решётки совместных приближений Дирихле, которая, вообще говоря, не является декартовой.

Во-вторых, как уже видно из предыдущего важным вопросом является приближение алгебраических решёток целочисленными решётками. Таким образом, мы получаем новую постановку о совместных приближениях алгебраических чисел. Поэтому неслучайным является возрождение в тульской школе теории чисел исследований, которые в 50-х — 60-х года вели В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский (старший).

Остановимся кратко на основных постановках и результатах, которые представлены в работах [77, 78, 88, 89, 90, 92, 93].

Прежде всего, заметим, что так как алгебраические решётки состоят из точек, координаты которых образуют полные наборы алгебраических сопряженных чисел, то все постановки задач, рассматриваемых в выше перечисленных работах рассматривались с точки зрения совокупности алгебраически сопряженных чисел. На этом пути было сформулировано как понятие приведенной алгебраической иррациональности чисто-вещественного алгебраического поля произвольной степени s, так и понятие обобщенного числа Пизо. Именно, такой подход позволил обнаружить фундаментальное свойство цепных дробей алгебраических иррациональностей:

Начиная с некоторого места все остаточные дроби чисто-вещественной алгебраической иррациональности становятся приведенными алгебраическими иррациональностями, а для произвольной алгебраической ираациональности — обобщенным числом Пизо.

Кроме этого, все алгебраически сопряженные числа к остаточной дроби α_m концентрируются около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Продолжая эти исследования в одной из последних работ дано определение

Определение 7. *Приведенная алгебраическая иррациональность n-ой степени $\alpha=\alpha^{(1)}\in\mathbb{F}_n^{(1)}$ называется приведенной алгебраической иррациональностью порядка m, если найдется последовательность приведенных алгебраических иррациональностей $\beta_m,\ldots,\beta_1$*

такая, что

$$\beta_\nu = q_\nu + \cfrac{1}{q_{\nu-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\alpha}}}} \quad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{49}$$

и не существует приведённой алгебраической иррациональности β_{m+1}, для которой β_m — первая остаточная дробь.

Лемма 1. *Если α — приведённая алгебраическая иррациональность, то необходимым и достаточным условием существования приведённой алгебраической иррациональности β, для которой α — первая остаточная дробь, является существование натурального q, для которого выполнены условия*

$$-\frac{1}{q} < \alpha^{(\nu)} < -\frac{1}{q+1} \quad (2 \leqslant \nu \leqslant n), \tag{50}$$

тогда

$$\beta = q + \frac{1}{\alpha}. \tag{51}$$

Таким образом, если для приведенной алгебраической иррациональности α не выполнено условие леммы 1, то α имеет порядок 0. Все приведенные квадратические иррациональности имеют бесконечный порядок в силу периодичности цепной дроби.

Доказана теорема.

Теорема 8. *При $n \geqslant 3$ всякая приведённая алгебраическая иррациональность α степени n имеет конечный порядок $m \geqslant 0$.*

Другое направление исследований было посвящено построению современной алгебраической теории полиномов Туэ. Суть этого построения состоит в следующем.

Определение 8. *Упорядоченная пара многочленов с целыми коэффициентами*

$$T = \{P(t), Q(t)\}$$

называется парой Туэ. Многочлен $P(t)$ называется числителем пары Туэ. Через $m(T)$ обозначается степень числителя. Многочлен $Q(t)$ называется знаменателем пары Туэ. Через $l(T)$ обозначается степень знаменателя. Величина $k(T) = \max(m(T), l(T))$ называется степенью пары Туэ.

Ясно, что множество всех пар Туэ совпадает с $\mathbb{Z}[t]^2 = \mathbb{Z}[t] \times \mathbb{Z}[t]$.

Определение 9. *Модулем Туэ называется множество всех пар Туэ с естественной операцией сложения, когда числитель суммы двух пар Туэ равен сумме числителей слагаемых, а знаменатель суммы — сумме знаменателей. Числитель произведения пары Туэ на многочлен из $\mathbb{Z}[t]$ равен произведению числителя пары на этот многочлен, а знаменатель произведения — произведению знаменателя на тот же многочлен.*

Определение 10. *Пусть имеется k пар Туэ $T_1 = \{P_1(t), Q_1(t)\}, \ldots, T_k = \{P_k(t), Q_k(t)\}$. Говорят, что они линейно зависимые, если существуют многочлены с целыми коэффициентами $c_1(t), \ldots, c_k(t)$, не все равные нулю и такие, что имеет место равенство*

$$c_1(t)T_1 + \ldots + c_k(t)T_k = \{0, 0\}. \tag{52}$$

Замечание 1. *Линейная зависимость пар, вообще говоря, не позволяет выразить одну пару через другие, не выходя за пределы* $\mathbb{Z}[t]$*-модуля* $\mathbb{Z}[t]^2$.

Замечание 2. *Если среди* k *пар хотя бы одна нулевая, то, очевидно, что они линейно зависимы.*

Теорема 9. *Любые три пары Туэ линейно-зависимы.*

Определение 11. *Пусть* $f(t)$ — *унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а* $(f(t)) = f(t)\mathbb{Z}[t]$ — *главный идеал в* $\mathbb{Z}[t]$*, порожденный многочленом* $f(t)$*. Пусть* $a(t)$*,* $b(t)$ — *произвольные многочлены из* $\mathbb{Z}[t]$*. Будем говорить, что пара Туэ* $T = \{P(t), Q(t)\}$ *удовлетворяет линейному определяющему соотношению, если* $a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f(x))$*. Подмодулем с одним определяющим соотношением назовем множество*

$$M(a(t), b(t) \,|\, f(t)) = \{\, \{P(t), Q(t)\} \,|\, a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f(x))\}$$

— *всех пар Туэ, удовлетворяющих этому линейному определяющему соотношению.*

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$, то определяющему соотношению удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассмотрений.

Теорема 10. *Существуют две линейно-независимые, примитивные пары Туэ* T*,* U *степени меньше* n *из* $M(a(t), b(t) \,|\, f(t))$ *такие, что любая пара Туэ* V *из* $M(a(t), b(t) \,|\, f(t))$ *однозначно представима в виде*

$$V = c_1(t)T + c_2(t)U, \tag{53}$$

где $c_1(t)$ *и* $c_2(t)$ — *многочлены с целыми коэффициентами.*

Определение 12. *Пусть* $f(t)$ — *унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а* $(f^k(t)) = f^k(t)\mathbb{Z}[t]$ — *главный идеал в* $\mathbb{Z}[t]$*, порожденный* k*-ой степенью многочлена* $f(t)$*. Пусть* $a(t)$*,* $b(t)$ — *произвольные многочлены из* $\mathbb{Z}[t]$*. Будем говорить, что пара Туэ* $T = \{P(t), Q(t)\}$ *удовлетворяет линейному определяющему соотношению* k*-ого порядка, если* $a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f^k(x))$*. Подмодулем с одним определяющим соотношением* k*-ого порядка назовем множество* $M(a(t), b(t) \,|\, f^k(t))$ *всех пар Туэ, удовлетворяющих этому линейному определяющему соотношению* k*-ого порядка.*

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, то определяющему соотношению k-ого порядка удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассмотрений.

Пусть $a(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \not\equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, тогда на числитель пары не накладывается никаких ограничений, а знаменатель будет принадлежать главному идеалу $(f^k(t))$. Если $a(t) \not\equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, то числитель и знаменатель пары Туэ меняются ролями.

Поэтому все перечисленные тривиальные случаи исключаются, и дальше рассматриваем только случай $a(t)b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$.

Теорема 11. *Существуют две линейно-независимые, примитивные пары Туэ* T_k*,* U_k *степени меньше* nk *из подмодуля с одним определяющим соотношением* k*-ого порядка* $M(a(t), b(t) \,|\, f^k(t))$ *такие, что любая пара Туэ* V *из* $M(a(t), b(t) \,|\, f^k(t))$ *однозначно представима в виде*

$$V = c_1(t)T_k + c_2(t)U_k, \tag{54}$$

где $c_1(t)$ *и* $c_2(t)$ — *многочлены с целыми коэффициентами.*

Определение 13. *Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f(t)) = f(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный многочленом $f(t)$. Пусть $a(t)$, $b(t)$ — произвольные многочлены из $\mathbb{Z}[t]$. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет k линейным определяющим соотношениям, если $a(t)P^{(\nu)}(t) + b(t)Q^{(\nu)}(t) \in (f(x))$ для $\nu = 0, \dots, k-1$. Подмодулем с k определяющими соотношениями назовем множество*

$$M(a(t), b(t) \,|\, f(t), k) = \Big\{ \{P(t), Q(t)\} \,|\, a(t)P^{(\nu)}(t) + b(t)Q^{(\nu)}(t) \in (f(x))\, (\nu = 0, \dots, k-1) \Big\}$$

— всех пар Туэ, удовлетворяющих этим линейным определяющим соотношениям.

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$, то определяющим соотношениям удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассмотрений.

Теорема 12. *Существуют две линейно-независимые пары Туэ T, U степени меньше nk из $M(a(t), b(t) \,|\, f(t), k)$ такие, что любая пара Туэ V из $M(a(t), b(t) \,|\, f(t), k)$ однозначно представима в виде*

$$V = c_1(t)T + c_2(t)U, \tag{55}$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Определение 14. *Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен n-ой степени с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом равным 1, α_ν — корень этого многочлена, а $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Тогда $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu) = P(t) - \alpha_\nu Q(t)$ называется полиномом Туэ для α_ν.*

Таким образом, многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ из $\mathbb{Z}[t]$, а полином Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$, вообще говоря, из его расширения $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][t]$.

Другими словами можно сказать, что неприводимый многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}^*[x]$ задает отображение Туэ из декартового квадрата $\mathbb{Z}[t]^2$ в кольцо полиномов $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][t]$ $(\nu = 1, \dots, n)$. Образом произвольной пары многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ с целыми коэффициентами и будет полином Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$.

Ясно, что полиномы Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_1)$, …, $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$, …, $\mathcal{T}(t, \alpha_n)$ образуют полный набор сопряженных полиномов.

Определение 15. *Порядком полинома Туэ называется наивысшая степень $(t - \alpha_\nu)$, на которую этот полином делится. Полином Туэ j-го порядка обозначается через $\mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu)$. Полином $R_j(t, \alpha_\nu)$, удовлетворяющий равенству $\mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu) = (t - \alpha_\nu)^j R_j(t, \alpha_\nu)$, называется множителем Туэ порядка j для α_ν, а упорядоченная пара многочленов $T_j = \{P_j(t), Q_j(t)\}$ — парой Туэ порядка j. Многочлен $P_j(t)$ называется числителем пары Туэ. Через m_j обозначается степень числителя. Многочлен $Q_j(t)$ называется знаменателем пары Туэ. Через l_j обозначается степень знаменателя. Величина $k_j = \max(m_j, l_j)$ называется степенью пары Туэ.*

Таким образом, для произвольной пары Туэ T и соответствующего полинома Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$ определены четыре функции:

- $j(T)$ — порядок пары Туэ.
- $m(T)$ — степень числителя пары.
- $l(T)$ — степень знаменателя пары.
- $k(T)$ — степень пары.

Единственным полиномом Туэ бесконечного порядка является нулевой полином:

$$\mathcal{T}_\infty(t,\alpha_\nu) = 0 = (t-\alpha_\nu)^j \cdot 0$$

для любого $j \geqslant 0$, соответствующая пара Туэ будет обозначаться $T_\infty = \{0,0\}$. Примем естественное соглашение, что $j(\{0,0\}) = m(\{0,0\}) = l(\{0,0\}) = k(\{0,0\}) = \infty$.

Отметим семь простейших свойств полиномов Туэ, которые сразу вытекают из определения полинома Туэ порядка j.

1. $f^j(t)$ является полиномом Туэ порядка j.
2. Существуют полиномы Туэ любого порядка.
3. Произведение полиномов Туэ j-го порядка на многочлен с целыми коэффициентами есть также полином Туэ порядка не ниже j.
4. Сумма двух полиномов Туэ является также полиномом Туэ и его порядок не ниже наименьшего из порядков слагаемых.
5. Если α — алгебраическое число степени не ниже второй и полином Туэ $\mathcal{T}_j(t,\alpha) = P_j(t) - \alpha Q_j(t)$ делится на многочлен $\varphi(t)$ с целыми коэффициентами, то $P_j(t)$ и $Q_j(t)$ делятся на $\varphi(t)$ и частное от деления $\mathcal{T}_j(t,\alpha)$ на $\varphi(t)$ есть многочлен Туэ порядка не выше j.
6. Степень полинома Туэ j-го порядка не меньше j.
7. Полином Туэ имеет порядок не ниже j тогда и только тогда, когда он сам и все его производные до порядка $j-1$ включительно являются полиномами Туэ порядка не ниже 1.

Определение 16. *Формой А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина называется бинарная полиномиальная форма $\mathcal{F}(P(t),Q(t))$, задаваемая равенством*

$$\mathcal{F}(P(t),Q(t)) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P^\nu(t) Q^{n-\nu}(t). \tag{56}$$

Из определения видно, что ТДП-форма задает отображение из декартового квадрата $\mathbb{Z}[t]^2$ в кольцо многочленов $\mathbb{Z}[t]$. Нетрудно видеть, что степень образа равна $n \cdot k$, где k — степень пары $\{P(t),Q(t)\}$.

С помощью ТДП-формы дается следующее определение.

Определение 17. *Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f^k(t)) = f^k(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный k-ой степенью многочлена $f(t)$. Пусть $\mathcal{F}(P(t),Q(t))$ — соответствующая ТДП-форма. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t),Q(t)\}$ удовлетворяет полиномиальному определяющему соотношению k-ого порядка, если $\mathcal{F}(P(t),Q(t)) \in (f^k(x))$. Подмодулем с одним определяющим полиномиальным соотношением k-ого порядка назовем множество $M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^k(t))$ всех пар Туэ, удовлетворяющих этому полиномиальному определяющему соотношению k-ого порядка.*

Из определения непосредственно следует, что свободный модуль ранга 2

$$f^k(t)\mathbb{Z}[t]^2 \subset M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^k(t)).$$

В частности, линейно независимые пары $T_0 = \{f^k(t),0\}$ и $T_1 = \{0,f^k(t)\}$ принадлежат $M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^k(t))$.

Очевидно, что справедливо включение

$$M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^{k+1}(t)) \subset M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^{k}(t)) \subset M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f(t))$$

для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k.

Теорема 13. *Для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ с целыми коэффициентами множество $M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^{k}(t))$ всех пар Туэ, удовлетворяющих полиномиальному определяющему соотношению k-ого порядка $\mathcal{F}(P(t),Q(t)) \in (f^k(x))$, является свободным $\mathbb{Z}[t]$-модулем ранга 2.*

Определение 18. *Основными парами Туэ для порядка j назовем две пары Туэ $T_{k,1}$ и $T_{m,2}$ порядка не ниже j, для которых любая пара Туэ $T_{l,3}$ порядка не ниже j представляется по формуле*

$$T_{l,3} = c_1(t)T_{k,1} + c_2(t)T_{m,2}, \tag{57}$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Соответствующие полиномы Туэ будут называться основными для порядка j.

Из теоремы 13 (стр. 55) следует, что для любого порядка j существуют основные пары Туэ и соответствующие основные полиномы Туэ.

Так как значением бинарной полиномиальной формы $\mathcal{F}(P(t),Q(t))$ является многочлен, то к нему можно применить дробно-линейное преобразование M многочленов с произвольной невырожденной матрицей M из $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{Z})$:

$$M\left(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\right) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (Ct+D)^{n\cdot k} P^{\nu}\left(\frac{At+B}{Ct+D}\right) Q^{n-\nu}\left(\frac{At+B}{Ct+D}\right),$$

где k — степень пары Туэ $\{P(t),Q(t)\}$.

Через $\mathcal{F}_m(P(t),Q(t))$ будем обозначать ТДП-форму, соответствующую минимальному многочлену $f_m(x)$.

Теорема 14. *Справедливо равенство*

$$M\left(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\right) = \mathcal{F}_m((Q_{m-2}M(P(t)) - P_{m-2}M(Q(t))),(P_{m-1}M(Q(t)) - Q_{m-1}M(P(t)))).$$

14. Актуальные нерешенные проблемы

В методе оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова остается ещё много нерешенных проблем. Центральной из них является проблема правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток. Как известно, для алгебраических сеток порядок погрешности приближенного интегрирования для класса E_s^α имеет вид

$$R_N[f] = O\left(\|f\|_{E_s^\alpha}\frac{\ln^{s-1}N}{N^\alpha}\right),$$

где N — количество точек алгебраической сетки, а $\|f\|_{E_s^\alpha}$ — норма функции f в Банаховом пространстве E_s^α. Из результатов И. Ф. Шарыгина [197] следует, что это правильный порядок убывания погрешности на классе E_s^α и нижняя оценка для любых квадратурных формул имеет тот же порядок. Так как для параллелепипедальных сеток норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α в точности равна гиперболической дзета-функции целочисленной решетки Λ вида (26) (см. стр. 39), то проблему правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток можно сформулировать в терминах гиперболической дзета-функции решеток следующим образом.

Существует ли бесконечная последовательность целочисленных решёток Λ_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *с*

$$\lim_{n\to\infty} \det \Lambda_n = \infty$$

такая, что

$$\zeta_H(\Lambda_n|\alpha) = O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda_n}{\det^{\alpha} \Lambda_n}\right)?$$

Для алгебраических решеток эта формула справедлива в силу результатов К. К. Фролова (см. [189], [191], [65], [140], [75]). В силу непрерывности гиперболической дзета-функции решёток на метрическом пространстве решёток (см. [103], [109]) на классе рациональных решёток правильный порядок гиперболической дзета-функции решёток достижим. Действительно, достаточно брать последовательность рациональных решёток хорошо приближающих алгебраические решётки.

Положительное решение проблемы правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток, по-видимому, очень сложная задача. Дело в том, что если такая последовательность существует, то тогда будет неверна гипотеза Литлвуда. Если гипотеза Литлвуда верна, то не существует указанной последовательности целочисленных решёток. В свою очередь, решение гипотезы Литлвуда, как показал Б. Ф. Скубенко, тесно связана с проблемой Опенгеймера о том, что все решётки с ненулевым норменным минимумом являются подобными алгебраическим решёткам. Подробней на эту тему смотрите [1], [168] — [171].

15. Заключение

Приведенное выше краткое описание истории и методологии теоретико-числового метода в приближенном анализе позволяет сделать следующие выводы:

1. История теоретико-числового метода в приближенном анализе достаточно насыщенная и требует специального исследования. Актуальность этих исследований обусловлена как важностью проблематики данного направления исследований, так и содержательностью самой этой истории.

2. Методологические проблемы теоретико-числового метода в приближенном анализе не потеряли своей актуальности, так как для успешности и непрерывности исследований в этой области математики необходимо на данном этапе для сохранения интеллектуальной эстафеты от одного поколения исследователей к следующему предусмотреть определенные меры.

3. Одним из актуальных направлений дальнейших усилий может являться разработка ПОИВС ТМК, которая позволит на новом уровне организации аккумулировать накопленные знания в области теоретико-числового метода в приближенном анализе. Таким образом, ПОИВС ТМК должна стать современным аккумулятором научного знания в этой области.

Данная работа является расширенным и переработанным вариантом работы [79].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акрамов У. А. Теорема изоляции для форм, отвечающих чисто вещественным алгебраическим полям, // Аналитическая теория чисел и теория функций: 10. Зап. науч. семинара. ЛОМИ. 1990. N 185. С. 5–12.

2. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. / М.: Наука, 1986.

3. Бабенко К. И. Основы численного анализа. / М.: Наука, 1986.

4. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

5. Бахвалов Н. С. Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул // Журн. вычислит. математики и математической физики. 1960. № 1. С. 64–77.

6. Бахвалов Н. С. Об оптимальных на классах функций способах интегрирования с заданным числом узлов. / Дис....док. физ.-мат. наук. Москва. Мгу 1964.

7. Бахвалов Н. С., Коробов Н. М., Ченцов Н. Н. Применение теоретико-числовых сеток к задачам приближенного анализа // Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964. Т. II. С. 580–587.

8. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы Вычислений. — М.: Наука, 1966.

9. Бочарова Л. П. Теорема А. О. Гельфонда и оптимальные коэффициенты для составного модуля // Чебышевский сборник 2005. Т. 6, вып. 3(15). С. 34–50.

10. Бочарова Л. П. О граничных функциях некоторых классов // Наукоемкое образование. Традиции. Инновации. Перспективы 2006, Сборник межвузовских научных статей, С. 198–202.

11. Бочарова Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8. Вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4–109.

12. Бочарова Л. П., Ванькова В. С., Добровольский Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Математические заметки. 1991. Т. 49. Вып. 2. С. 23–28.

13. Брушлинская О. В. Практическое применение метода оптимальных коэффициентов для вычисления кратных интегралов // Труды конф. по вычислит. математике и вычислит. технике. МГУ, 1959. Машгиз, 1962.

14. Бухштаб А. А. Теория чисел / М.: Учпедгиз 1960.

15. Быковский В. А. О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток. / Препринт ДВНЦ АН СССР. Владивосток, 1985, с. 31.

16. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Математический сборник, 136(178), 4(8), 1988, С. 451–467.

17. Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. / Хабаровск, 1995. с. 13. (Препринт.)

18. Быковский В. А. Оценки отклонений оптимальных сеток в Lp-норме и теория квадратурных формул. // Analysis Mathematica, 22(1996), pp. 81–97.

19. Быковский В. А. Теоретико-числовые решетки в эвклидовых пространствах и их приложения. / Дис....док. физ.-мат. наук. Хабаровск. ИПМ ДВО АН СССР, 1990.

20. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т.3 вып. 2(4) С. 27–33.

21. Ванькова В. С. Оценка квадратичного отклонения сеток Холтона. / Деп. в ВИНИТИ 18.03.91, N 1157–В91.

22. Ванькова В. С. Квадратичное отклонение сеток Фора–Чена. / Деп. в ВИНИТИ 21.11.91, N 4372–В91.

23. Ванькова В. С. Об алгоритмах поиска оптимальных сеток Хэммерсли – Рота и Холтона. / Деп. в ВИНИТИ 21.11.91, N 4371–В91.

24. Ванькова В. С. Многомерные теоретико-числовые сетки: / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. // Моск. пед. гос. ун-т. М., 1992.

25. Ванькова В. С. О квадратичном отклонении q–регулярных p–ичных сеток // Соврем. проблемы теории чисел: Тез. докл. междунар. конф. Тула, 1993. С. 24.

26. Ванькова В. С., Добровольский Н. М. Об одном алгоритме для многомерных сеток // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 23.

27. Ванькова В. С., Добровольский Н. М., Есаян А. Р. О преобразовании многомерных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 22.01.91, N 447–91.

28. Виленкин И. В. О плоских сетках интегрирования // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1967. Т. 7. № 1. С. 189–196.

29. Воронин С. М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. № 5. С. 189–194.

30. Воронин С. М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59. № 4.

31. Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Мат. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 34–41.

32. Вронская Г. Т. О квадратичном отклонении плоских сеток Хэммерсли // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 9. Вып. 1. Тула, 2003. С. 23–62.

33. Вронская Г. Т. Квадратичное отклонение плоских сеток [Текст]/ автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.06.06 / Г. Т. Вронская. — М., 2005. — 10 с.

34. Вронская Г. Т. Квадратичное отклонение плоских сеток / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 2005.

35. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М. О двумерных сетках Воронина // Чебышевский сборник 2004 Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Изд-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 74–86.

36. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения суммы и произведения (тезисы)// Материалы всероссийской конференции "Современные проблемы математики, механики и информатики"ТулГУ. Тула 2002.

37. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения, суммы и произведения по приведенной системе вычетов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 8. Вып. 1. Тула, 2002. С. 10–28.

38. Вронская Г. Т., Родионова О. В. Квадратичное отклонение плоских сеток. Тула, Изд-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого, 2005.

39. Гельфанд, И. М. Применение метода случайных испытаний (метода Монте-Карло) для решения кинетического уравнения / И. М. Гельфанд, С. М. Фейнберг, А. С. Фролов, Н. Н. Ченцов // Тр. II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958, Доклад 2141), — М.: Атомиздат, 1959. — Т. 2. — С. 628–633.

40. Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н. Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5(6). С. 32–45.

41. Герцог, А. С. Чисто-вещественные биквадратичные алгебраические поля и их приложения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2012.

42. Добровольская Л. П. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2009.

43. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Проблемно ориентированная информационно вычислительная система ТМК (теоретико-числовой метод Коробова) // Роль университетов в поддержке гуманитарных научных исследований: Материалы V Междунар. науч.-практ. конф.: В 2 т. / Отв. ред. О. Г. Вронский. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2010. Доп. том. С. 16–28.

44. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

45. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

46. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

47. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90–98.

48. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 47–52.

49. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

50. Добровольская В. Н. Неполные суммы дробных долей // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5, вып. 2 (10) С. 43–48.

51. Добровольская В. Н. Формула Пика и неполные суммы дробных долей // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Меха-ника. Информатика. Т. 10. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. С. 5–11.

52. Добровольская В. Н. Отклонение плоских параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник. Тула, 2005 Т. 6. Вып. 1 (13). С. 87–97.

53. Добровольская В. Н. Элементарный метод дробных долей Виноградова – Коробова и отклонение плоских сеток Бахвалова // Чебышевский сборник. 2005 Т. 6, вып. 2(14). С. 138 — 144.

54. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.

55. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 95–121.

56. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

57. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.

58. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

59. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2002. С. 22–23.

60. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник 2002. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

61. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.

62. Добровольский Н. М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении // УМН. Т. 39 (123). 1984. С. 155–156.

63. Добровольский Н. М. Оценки отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота. / Деп. в ВИНИТИ 23.02.84, N 1365–84.

64. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

65. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

66. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

67. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

68. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

69. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

70. Добровольский Н. М. Группы преобразований многомерных сеток // Современные проблемы теории чисел: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1993. С. 46.

71. Добровольский Н. М. Средние по орбитам многомерных сеток // Мат. заметки. 1995. Т. 58, вып. 1. С. 48–66.

72. Добровольский Н. М. Means over of Multidimensional Lattices. // Mathematical Notes. Vol. 58. No 1. 1995. P. 710–721.

73. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения: / Дис. ... док. физ.–мат. наук. Москва, 2000.

74. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико–числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // В сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова Тула, 10–15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I, М., МГУ 2002 С. 54–80.

75. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

76. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

77. Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский, Е. А. Матвеева О дробно-линейных преобразованиях форм А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 54–97.

78. N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016. № 2. P. 27–39.

79. Добровольский Н. М., Бочарова Л. П. Пятьдесят лет теоретико-числовому методу в приближенном анализе // Наукоемкое образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНОВО "ТИНО", 2006. С. 189–198.

80. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Об одной лемме А. О. Гельфонда. / Деп. в ВИНИТИ 08.01.87, N 1467–В87.

81. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Численный эксперимент по применению параллелепипедальных сеток // Алгоритмические проблемы теории групп и подгрупп: Сб. Тула, 1990. С. 153–155.

82. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О гиперболической дзета-функции алгебраических решёток. // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 22.

83. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Новые оценки для модифицированных сеток Хеммерсли–Рота. / Деп. в ВИНИТИ 29.08.90, N 4992–В90.

84. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О регулярных P-ичных сетках // Мат. заметки. 1993. Т. 54, вып. 6. С. 22–32.

85. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Об отклонении q – регулярных сеток // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 52.

86. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета-функция алгебраических решёток. / Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, N 2327–В90.

87. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Пентон М. М. Алгоритм построения оптимальных модифицированных сеток Хеммерсли–Рота // Современные проблемы информатики, вычислительной техники и автоматизации: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тулаб 1989. С. 92–95.

88. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.

89. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5

90. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.

91. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

92. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 4. С. 100–149.

93. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сб., 2012. Т. 13, вып. 3 С. 47–52.

94. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

95. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.

96. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.

97. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: Изд-во ТулГУ, 2002. С. 18–20.

98. Добровольский Н. М., Клепикова Н. Л. Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов // ИОФАН СССР. 63. Москва, 1990. (Препринт.)

99. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток. // Чебышевский сборник, Т. 2, Тула, 2001, С. 41–53.

100. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

101. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

102. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 100–113.

103. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

104. Добровольский Н. М., Родионова О. В. Квадратурные формулы с обобщенными параллелепипедальными сетками. // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 47–48.

105. Добровольский Н. М., Родионова О. В. Квадратурные формулы с обобщенными параллелепипедальными сетками // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 2, вып. 1. Тула, 1996. С. 71–77.

106. Добровольский Н. М., Родионова О. В. Об одном конечном ряде Фурье и его приложениях // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4, вып. 3. С. 68–79.

107. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

108. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

109. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2, вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

110. Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сб., 2013. Т. 14, вып. 1. С. 34–55.

111. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып.1. С. 91–95.

112. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. С. 34–36.

113. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110 — 152.

114. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова. 2014.

115. Ермаков С. Н. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — М.: Наука, 1971.

116. Кан И. Д. Рекуррентные последовательности и их приложения: / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. / Моск. ун–т. МГУ, М., 1997.

117. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. 115. № 6. С. 1062–1065.

118. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

119. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 2. С. 235–238.

120. Коробов Н. М. О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов. Резюме докл. на заседании Моск. мат. об-ва. // УМН. 1959. Т. 14, вып. 2 (86). С. 227–230.

121. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

122. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

123. Коробов Н. М. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961. Т. 60, Изд-во АН СССР, М., С. 195–210.

124. Коробов Н. М. О применении теоретико-числовых сеток // Вычислительные методы и программирование: // Сб. Моск. ун-т. 1962. С. 80–102.

125. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах в приближенном анализе // Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. М.: Машгиз. 1963.

126. Коробов Н. М. О некоторых задачах теории чисел, возникающих из потребностей приближенного анализа: Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

127. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.

128. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С. 83 — 118.

129. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 267. 1982. N2. С. 289 — 292.

130. Коробов Н. М. Об одной оценке А. О. Гельфонда // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1983. N3. С. 3 — 7.

131. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // Тезисы докладов всесоюзной конференции „Теория трансцендентных чисел и ее приложения". 1983. С. 62.

132. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

133. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83 — 90.

134. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования // Историко-матем. исследования. СПб., 1994. Вып. XXXV. С. 285—301.

135. Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения // Диофантовы приближения. Матем. записки. 1996. Т. 2. С. 77-89.

136. Коробов Н. М. О конечных цепных дробях // УМН. 1998. Т. 52. 3. С. 167-168.

137. Коробов Н. М. О теоретико-числовых интерполяционных формулах // Историко-матем. исследования. М.: „Янус // К". 2001. Вып. 6 (41). С. 266-276.

138. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Труды IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения" Чебышевский сборник. Тула. 2001. Т. 1. С. 40 – 49.

139. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики " Тула. 2002. с. 39–40.

140. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

141. Ю. А. Кругляк, Г. С. Гордадзе, Л. М. Подольская, С. Б. Цинаури, Г. Б. Шарашидзе Численный расчет молекулярных интегралов с функциями от межэлектронного расстояния I-II. - Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1971. - 136 с.

142. Лев В. Ф. Диофония и квадратичные отклонения многомерных сеток // Мат. заметки. 1990. Т. 47, N 6. С.45–54.

143. О. В. Локуциевский, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус" 1995

144. Митькин Д. А. Об элементарном доказательстве оценки А. Вейля для рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем // Изв. вузов. Математика. 1986. Т. 6. С. 14—17.

145. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. О реконструкции палеотектонических напряжений по данным о пьезоэлектрических текстурах горных пород. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1988. N 9. С. 66–74.

146. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Texstures of Rocks // Izvestiya Earth Physics Vol 24. 1988. No 9. C. 728–734.

147. Е. Д. Ребров Некоторые теоретико-числовые методы приближенных вычислений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2013.

148. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток Тез. докл. III Междунар. конф. // Современные проблемы теории чисел: Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

149. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

150. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

151. Родионова О. В. Рекуррентные формулы первого порядка для степенных сумм дробных долей //Сб.:"Всероссийская научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики Тула, 2000 с. 50-51

152. Родионова О. В. Обобщенные параллелепипедальные сетки и их приложения / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 2000.

153. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте // Современные проблемы теории чисел и ее приложения": Тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 120.

154. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек сдвинутой решётки под гиперболой $x \cdot y = N$. Тула, 1996. Деп. в ВИНИТИ. N 2743-В-96.

155. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте. Тула, 1997. Деп. в ВИНИТИ. N 2087-N-97.

156. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток./ Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

157. Рябенький В. С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса// ДАН СССР. 1960. 131. № 5 С. 1025–1027.

158. Рябенький В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретико-числовых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232–237.

159. Рябенький В. С. Об экономном выборе сетки для табулирования функций. Сообщение на IV Всесоюзном математическом съезде (не опубл.).

160. Салтыков А. И. Таблицы для вычисления кратных интегралов методом оптиальных коэффициентов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики № 1. 1963.

161. Скриганов М. М. Решётки в полях алгебраических чисел и равномерные распределения по mod 1. ЛОМИ Р-12-88. Л., 1988. (Препринт.)

162. Скриганов М. М. Равномерные распределения и геометрия чисел. ЛОМИ Р-6-91. Л., 1991. (Препринт.)

163. Skriganov M. M. On integer points in polygons. Ann. Inst. Fourier, 43, No. 2 (1993), P. 313–323.

164. Skriganov M. M. Constructions of uniform distributions in terms of geometry of numbers. Prepublication Inst. Fourier (1992). No. 200; Algebra Analiz. 6. 1994. No. 3. P. 200–230; Reprinted in St. Petersburg Math. J., 6. 1995. No. 3. P. 635–664.

165. Skriganov M. M. Ergodic theory on homogeneous spaces and the lattice point counting for polyhedra. Doklady RAN. (1996).

166. Skriganov M. M. Anomalies in spectral asymptotics. Doklady RAN. 340. 1995. No. 5. P. 597–599; English transl.: Doklady Mathematics, 51. 1995. No. 1. P. 104–106.

167. Skriganov M. M. On the Littlwood — Paley theory for multidimensional Fourier series. Zap. Nauchn. Semin. POMI, 226. 1996. P. 155–169; English transl.: Journal of Math. Sciences (Plenum Publish. Corporation).

168. Скубенко Б. Ф. О произведении n линейных форм от n переменных // Труды МИАН СССР. N 158. 1981. С. 175–179.

169. Скубенко Б. Ф. Теорема изоляции для разложимых форм чисто вещественных алгебраических полей степени $n \geqslant 3$ Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 112. 1981. С. 167–171.

170. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 168. 1988. С. 125–139.

171. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geqslant 3$ // Модулярные функции и квадратичные формы. 1. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 183. 1990. С. 142–154.

172. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сборник 2017. Т. 18, вып. 4(64). С. 325–337.

173. Смоляк С. А. ε-энтропия классов $E_s^{\alpha,k}(B)$ и $W_s^{\alpha}(B)$ в метрике L_2 // ДАН СССР. 1960. Т. 131. № 1. С. 30–33.

174. Смоляк С. А. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^{α} и E_s^{α} // ДАН СССР. 1960. Т. 131. № 5. С. 1028–1031.

175. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР 1963 Т. 148, № 5. С. 1042–1045.

176. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1966.

177. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. / М.: Наука, 1974.

178. Соболь И. М. Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функции класса S_p // АН СССР. 1960. 132. № 5. С. 1041–1044.

179. Соболь И. М. К теории многомерных квадратурных формул. Доклады на IV Всесоюзном съезде (не опубл.).

180. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. / М.: Наука, 1969.

181. Солодов В. М. О вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. 127. № 4. С. 753–756.

182. Солодов В. М. О погрешности численного интегрирования // ДАН СССР. 1963. 148. № 2. С. 284–287.

183. Солодов В. М. Интегрирование по некоторым областям, отличным от единичного куба // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. 8. № 6. С. 1334–1341.

184. Солодов В. М. Применение метода оптимальных коэффициентов к численному интегрированию // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.. 1969. 9. № 1. С. 14–29.

185. Степанов С. А. О числе точек гиперэллиптической кривой над простым конечным полем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33. С. 1171–1181.

186. Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 4. С. 490–505.

187. Устинов А. В. О формулах суммирования и интерполяции // Труды IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник 2001. Т. 2 С. 52–71.

188. Устинов А. В. Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера // Матем. замет. 71, № 6, 2002, 931– 936.

189. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

190. Фролов К. К. О связи квадратурных формул и подрешеток решетки целых векторов // ДАН СССР. 232. 1977. № 1. С. 40 — 43.

191. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

192. Фролов К. К. Оценка сверху дискрепанса в метрике L_2 // ДАН СССР. 252. 1980. № 4. С. 805 — 807.

193. Ченцов Н. Н. О квадратурных формулах для функций бесконечно большого числа переменных // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1961. № 3.

194. Ченцов Н. Н. Общая теория статистического вывода. / Дис....док. физ.-мат. наук. Москва. Ин-т прикл. математики АН СССР. 1969.

195. Ченцов Н. Н. Избранные труды: Математика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 400 с.

196. Шарыгин И. Ф. О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций // ДАН СССР. 1960. 132. № 1. С. 71–74.

197. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4. С. 784 — 802.

198. Шарыгин И. Ф. Оценка снизу погрешности формулы приближенного суммирования на классе $E_{s,p}(C)$ //Математические заметки. 1977. Т. 21. Вып. 3. С. 371–375

199. Шахов Ю. Н. О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций // ДАН СССР. 1959. 128. № 6. С. 1136–1139.

200. Шахов Ю. Н. О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций // ДАН СССР. 1961. 136. № 6. С. 1302–1306.

201. Шахов Ю. Н. О численном решении многомерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итераций. Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

202. Шахов Ю. Н. О численном решении многомерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итераций / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1961.

203. Ю. Н. Шахов О вычислении интегралов растущей кратности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, вып. 5. С. 911–916.

204. Ю. Н. Шахов О приближенном решении многомерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итераций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4, дополнение к № 4. С. 75–100.

205. Ю. Н. Шахов О вычислении собственных значений многомерного симметричного ядра с помощью теоретико-числовых сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, №6. С. 988–997.

206. Ю. Н. Шахов О погрешности восстановления функций из некоторого класса по параллелепипедальным сеткам // Матем. заметки, 1974. Т. 15, №5. С. 749–756.

207. Aardenne-Ehrenfest On the impossibility of a just distribution // Indagationes Math. 11, 4 (1949) p. 264–269.

208. Applications of Number Theory to Numerical Analysis / Ed. Zaremba S. K. — N. Y., L., 1972.

209. Baker A. C. On some diophantine inequalities involving the exponential function // Canad. Journ. Math. 17, 4 (1965), p.616 – 626.

210. Bohl P. — Crelles J., 1909, Bd. 135, S. 189–283; s. 222.

211. Chaix H., Fauere H. Diskrepance and diaphonie des suites de van der Corput generalisees. II//C.r.Acad.sci.Ser.1. 1990. N 2 (311). P. 65–68.

212. Chen W. W. L. On irregularities of distribution // Mathematika. 27. 1980. N 2. P. 153–170.

213. Chen W. W. L. On irregularities of distribution II // Quart. J.Math. Oxford (2). 34. 1983. P. 257–279.

214. van der Corput J. G. Verteilungsfunktionen. I–VIII. Proc. Kon. Acad. Wetensch. Amsterdam, 1935. N 8 (38). P. 813–821; N10. P. 1058–1066.

215. Davenport H. Note on irregularities of distribution, // Mathematika. 3. 1956. P. 131–135.

216. Diophantine Approximation and its Applications / Ed. Osgood Ch. F. — N. Y., L., 1973.

217. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.

218. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960) 84 — 90 Bd 2 № 2.

219. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.

220. Hammersley J. M., Handscomb D. Monte-Carlo methods. — L., N. Y., 1964.

221. Hlawka E. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte f ur Math. 66, 2. 1962, p. 140–151.

222. Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretiscne Methoden in der numerischen Matematik. / Wien, Mūnchen, Oldenbourg, 1981.

223. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

224. Kuiper L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences. — London, Sidney, Toronto, 1974.

225. Larcher G. Niederreiter. Optional coefficients modulo prime powers in the three–dimensional case // Ann.mat.pura ed appl. 1989. N 155. P. 299–315.

226. Proinov P., Atanassov E. On the distibution of the van der Corput generalized sequences // C.r.Acad.Sci.Ser.1. 1988. N 18 (307). P. 895–900.

227. Proinov P., Grozdanov V. S. Symmetrization of the van der Corput–Halton sequence // Докл. Болг. АН. 1987. N 8 (40). С. 5–8.

228. Proinov P., Grozdanov V. S. On the diaphony of the van der Corput–Halton sequence // J. Number Theory. 1988. N 1 (30). С. 94–104.

229. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.

230. Roth K. F. On irregularities of distribution – IV, // Acta Arithm. 37. 1980. P. 65–75.

231. Schmidt Wolfgang M. Irregularities of distribution – VII, // Acfa Arithm. 21. 1972. P. 45–50.

232. Schmidt Wolfgang M. Irregularities of distribution – X // Number Theory and Algebra (H.Zassenhaus ed.) New York: Academic Press. 1977. P. 311–329.

233. Sierpinski W. — Krakua. Akad. Anz., math.-naturwiss. Kl. (A), 1910, Jan., S. 9.

234. Wang Yuan О методах приближенного интегрирования // Тр. ин-та матем. Акад. наук КНР 1962

235. Weil A. On some exponentional sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1948. – V. 34, N 5. – P. 204 – 207.

236. Weyl H. — Rend. Circ. math.Palermo, 1910, vol. 30, p. 406.

237. Weyl H.Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313 — 352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

238. Zinterhof P. Über einige Abschatzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleichverteilungsmethoden // Sb. Osterr. Akad. Wiss. Math. –nath. Kl. 1976. № 185. S. 121–132.

REFERENCES

1. Akramov, U. A. 1990, "The isolation theorem for forms corresponding to purely real algebraic fields", Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 10 Zap. nauchn. sem. LOMI, no. 185, pp. 5–12.

2. Arkhipov, G.I., Karachuba, A.A. & Chubarikov, V.N. 1986, Teoriya kratny'x trigonometricheskix summ [The theory of multiple trigonometric sums], Nauka, Moscow, Russia.

3. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

4. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

5. Bakhvalov, N.S. 1960, "The rating average of the remainder term of quadrature formulas", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, no. 1, pp. 64–77.

6. Bakhvalov, N.S. 1964, On optimal methods of integration with a given number of nodes on classes of functions, D. Sc. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

7. Bakhvalov, N.S., Korobov, N.M. & Chentsov, N.N. 1964, "Application of number-theoretic grids to problems of approximate analysis", Trudy Chetvertogo Vsesoyuznogo matematicheskogo s"ezda (Proceedings of the Fourth all-Union mathematical Congress), vol. 2, pp. 580–587.

8. Berezin, I. S. & Zhidkov, N. P. 1966, Metody vychislenij [Calculation method], Nauka, Moscow, Russia.

9. Bocharova, L.P. 2005, "Theorem A. O. Gelfond and optimal coefficients for a composite module", Chebyshevskij sbornik, vol. 6, no. 3(15), pp. 34–50.

10. Bocharova, L.P. 2006, "On the boundary of some classes of functions", Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy, Sbornik mezhvuzovskikh nauchnykh statej, pp.198–202.

11. Bocharova, L.P. 2007, "Algorithms for finding the optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 4–109.

12. Bocharova, L.P., Van'kova, V.S. & Dobrovol'skii, N.M. 1991, "On the calculation of optimal coefficients", Matematicheskie zametki, vol. 49, no. 2, pp. 23–28.

13. Brushlinskaya, O. V. 1963, "Practical application of the optimal coefficients method for computing multiple integrals", Trudy konferentsii po vychislitel'noj matematike i vychislitel'noj tekhnike.

14. Bukhshtab, A.A. 1960, Teoriya chisel [Number theory], Uchpedgiz, Moscow, Russia.

15. Bykovskij, V.A 1985, O pravil'nom poryadke pogreshnosti optimal'nykh kubaturnykh formul v prostranstvakh s dominiruyushhej proizvodnoj i kvadratichnykh otkloneniyakh setok [About the right order of error of optimal cubature formulas in space with dominating derivative and quadratic deviations of grids], Preprint DVNTS AN SSSR, Vladivostok, Russia.

16. Bykovskij, V.A 1988, “Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integer lattices”, Matematicheskij sbornik, vol. 136(178), no. 4(8), pp. 451–467.

17. Bykovskij, V.A 1995, Ehkstremal’nye kubaturnye formuly dlya anizotropnykh klassov [Extremal cubature formulas for anisotropic classes], Preprint, Khabarovsk, Russia.

18. Bykovskij, V.A 1996, “Evaluation of the deviations of optimal grids in the Lp-norm and the theory of quadrature formulas”, Analysis Mathematica, no. 22, pp. 81–97.

19. Bykovskij, V.A 1990, Number-theoretic lattices in Euclidean spaces and their applications, D. Sc. Thesis, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the USSR Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia.

20. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

21. Van’kova, V.S. 1991, “Evaluation of the quadratic deviations of grids of Holton”, Dep. v VINITI, no. 1157– B91.

22. Van’kova, V.S. 1991, “Standard deviation grids Fora-Chan”, Dep. v VINITI, no. 4372– B91.

23. Van’kova, V.S. 1991, “On algorithms for finding optimal Hammersley-Roth and Holton grids”, Dep. v VINITI, no. 4371– B91.

24. Van’kova, V.S. 1992, Multidimensional number-theoretic grids, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

25. Van’kova, V.S. 1993, “On the quadratic deviation of q-regular p-ary grids”, Sovremennye problemy teorii chisel [Modern problems of number theory], Tula, Russia, p.24.

26. Van’kova, V.S. & Dobrovol’skii, N.M. 1990, “About one algorithm for multidimensional grids”, Teoriya chisel i ee prilozheniya [Number theory and its applications], Tashkent, USSR, p.23.

27. Van’kova, V.S., Dobrovol’skii, N.M. & Esayan, A.R. 1991, “On the transformation of multidimensional grids”, Dep. v VINITI, no. 447–91.

28. Vilenkin, I.V. 1967, “About flat integration meshes”, Zhurnal vychislitel’noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 7, no. 1, pp. 189–196.

29. Voronin, S.M. 1994, “On quadrature formulas”, Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya, vol. 58, no. 5, pp. 189–194.

30. Voronin, S.M. 1995, “About the construction of quadrature formulas”, Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya, vol. 59, no. 4.

31. Voronin, S.M. & Temirgaliev, N. 1989, “On quadrature formulas associated to divisors of the field of Gaussian numbers”, Matematicheskie zametki, vol. 46, no. 2, pp. 34–41.

32. Vronskaya, G.T. 2003, “About square deviation of flat grids Hammersly”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 9, no. 1, pp. 23–62.

33. Vronskaya, G.T. 2005, Standard deviation of a flat mesh, Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

34. Vronskaya, G.T. 2005, Standard deviation of a flat mesh, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

35. Vronskaya, G.T. & Dobrovol'skii, N.M. 2004, "On two-dimensional grids Voronin", Chebyshevskij sbornik, vol. 5, no. 1(9), pp. 74–86.

36. Vronskaya, G.T., Dobrovol'skii, N.M. & Rodionova, O.V. 2002, "Comparison of sum and product", Materialy vserossijskoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki i informatiki" [Proceedings of the all-Russian conference "Modern problems of mathematics, mechanics and computer science"], Tula, Russia.

37. Vronskaya, G.T., Dobrovol'skii, N.M. & Rodionova, O.V. 2002, "Comparisons, sums and products on the reduced system of deductions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 8, no. 1, pp. 10–28.

38. Vronskaya, G.T. & Rodionova, O.V. 2005, Kvadratichnoe otklonenie ploskikh setok [Standard deviation of a flat mesh], Izdatel'stvo TGPU im. L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

39. Gel'fand, I. M., Fejnberg, S.M., Frolov, A.S. & Chentsov, N.N 1959, "Application of the random test method (Monte Carlo method) to solve the kinetic equation", Trudy II Mezhdunarodnoj konferentsii po mirnomu ispol'zovaniyu atomnoj ehnergii (Proceedings of the II international conference on the peaceful uses of atomic energy), vol. 2, pp. 628–633.

40. Gel'fand, I. M., Frolov, A.S. & Chentsov, N.N 1958, "The calculation of continual integrals by Monte Carlo", Izvestie vuzov. Matematika, no. 5(6), pp. 32–45.

41. Gertsog, A.S. 2012, Pure real biquadratic algebraic fields and their applications, Ph.D. Thesis, Tula State Pedagogical University, Tula, Russia.

42. Dobrovol'skaya, L.P. 2009, Algorithms for calculating optimal coefficients, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Tula, Russia.

43. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2010, "Problem-oriented computing system TMK (number-theoretic method of Korobov)", Rol' universitetov v podderzhke gumanitarnykh nauchnykh issledovanij: Materialy V Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferentsii [The role of universities in supporting Humanities research: Proceedings of the V international scientific and practical conference], Tula, Russia, pp.16–28.

44. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i algoritmy poiska optimal'nykh koehffitsientov [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L.N. Tolstogo, Tula, Russia.

45. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

46. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 23–62.

47. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. YU. 2012, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", Trudy X mezhdunarodnoj konferentsii "Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya" Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo

universiteta [Proceedings of the X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications"scientific notes of Orel state University], no. 6, part 2, pp. 90-98.

48. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., & Rebrova, I. YU. 2013, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", Izvestie Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.13, no. 4(2), pp. 47-52.

49. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

50. Dobrovol'skaya, V. N. 2004, "Amount incomplete or fractions", Chebyshevskij sbornik, vol. 5, no. 2(10), pp. 43–48.

51. Dobrovol'skaya, V. N. 2004, "Peak formula and partial sums of fractional fractions", Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.10, no. 1, pp. 5-11.

52. Dobrovol'skaya, V. N. 2005, "Deviation flat parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 6, no. 1(13), pp. 87–97.

53. Dobrovol'skaya, V. N. 2005, "Elementary method of fractional shares Vinogradov-Korobov and deviation of plane grids Bakhvalov", Chebyshevskij sbornik, vol. 6, no. 2(14), pp. 138–144.

54. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

55. Dobrovol'skii, M. N. 2004, "The optimum coefficients of the combined meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 5, no. 1(9), pp. 95–121.

56. Dobrovol'skii, M. N. 2006, "Dirichlet series with periodic coefficients and a functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

57. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Doklady akademii nauk, vol. 412, no. 3, pp. 302–304.

58. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, no. 3, pp. 18–23.

59. Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki:Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 22–23.

60. Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

61. Dobrovol'skii, M. N. 2009, Some number-theoretic methods of approximate analysis, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

62. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "An effective proof of Roth's quadratic deviation theorem", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 39(123), pp. 155–156.

63. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Estimates of variance of modified grids Hammersly Rota", Dep. v VINITI, no. 1365– 84.

64. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

65. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

66. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84.

67. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.

68. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

69. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Teoriya chisel i ee prilozheniya: Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii, Tbilisi, USSR, pp. 67–70.

70. Dobrovol'skii, N. M. 1993, "Groups of transformations of multidimensional grids", Sovremennye problemy teorii chisel: Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj konferentsii, Tula, Russia, p. 46.

71. Dobrovol'skii, N. M. 1995, "The average orbits of multidimensional grids", Matematicheskie zametki, vol. 58, no. 1, pp. 48–66.

72. Dobrovol'skii, N. M. 1995, "Means over of Multidimensional Lattices", Mathematical Notes, vol. 58. no. 1, pp. 710–721.

73. Dobrovol'skii, N. M. 2000, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications", D. Sc. Thesis, Tula State Pedagogical University, Tula, Russia.

74. Dobrovol'skii, N. M. 2001, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis", Sbornik IV Mezhdunarodnaya konferentsiya "Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya", posvyashhennaya 180-letiyu P. L. Chebysheva i 110-letiyu I. M. Vinogradova (A collection of the IV international conference "Modern problems of number theory and its applications", dedicated to 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov), Tula, Russia, 10-15 September, pp. 54–80.

75. Dobrovol'skii, N. M. 2005, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

76. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "On modern problems of the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 1, pp. 176–190.

77. Dobrovol'skii, N. M., Balaba, I. N., Rebrova, I. YU., Dobrovol'skii, N. N. & Matveeva, E. A. 2017, "On linear-fractional transformations forms A. Tue-M.N. Dobrovolsky-V.D. Podsypanin", Chebyshevskij sbornik, vol. 18, no. 2, pp. 54–97.

78. Dobrovol'skii, N. M., Balaba, I. N., Rebrova, I. YU. & Dobrovol'skii, N. N. 2017, "On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities", Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., no.2, pp. 27–39.

79. Dobrovol'skii, N. M. & Bocharova, L.P. 2006, "Fifty years of the number-theoretic method in the approximate analysis", Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy, Sbornik mezhvuzovskikh nauchnykh statej, pp.189–198.

80. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1987, "On a Lemma of A. O. Gelfond", Dep. v VINITI, no. 1467– B87.

81. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1990, "Numerical experiment on the use of parallelepipedal grids", Algoritmicheskie problemy teorii grupp i podgrupp, pp.153–155.

82. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1990, "On the hyperbolic Zeta function of algebraic lattices", Teoriya chisel i ee prilozheniya: Tezisy dokladov respublikanskoj konferentsii, Tashkent, USSR, p.22.

83. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1990, "New estimates for modified grids Hammersly Rota", Dep. v VINITI, no. 4992– B90.

84. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1993, "On a regular P-ary meshes", Matematicheskie zametki, vol. 54, no. 6, pp. 22–32.

85. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1995, "On the deviation of q - regular grids", Algebraicheskie, veroyatnostnye, geometricheskie, kombinatornye i funktsional'nye metody v teorii chisel: Sbornik tezisov doklada II Mezhdunarodnoj konferentsii [Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Proceedings of the II international conference], Voronezh, Russia, p. 52.

86. Dobrovol'skii, N. M., Van'kova, V.S. & Kozlova, S. L. 1990, "The hyperbolic Zeta function of algebraic lattices", Dep. v VINITI, no. 2327– B90.

87. Dobrovol'skii, N. M., Van'kova, V.S. & Penton, M.M. 1989, "Algorithm for constructing optimal modified Hammersley-Roth grids", Sovremennye problemy informatiki, vychislitel'noj tekhniki i avtomatizatsii: Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 92–95.

88. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. 2015, "On minimal polynomials of residual fractions for algebraic irrationalities", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 3, pp. 147–182.

89. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Balaba, I. N., Rebrova, I. YU., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2016, "Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition", Advances in Dynamical Systems and Control, Springer Switzerland.

90. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2017, "Classification of pure-real algebraic irrationalities", Chebyshevskij sbornik, vol. 18, no. 2, pp. 98–128.

91. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol'skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, "On the hyperbolic Hurwitz Zeta function ", Chebyshevskij sbornik, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.

92. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Soboleva, V.N., Sobolev, D.K. & Yushina, E.I. 2015, "Hyperbolic dzeta-function of lattices of quadratic fields", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 4, pp. 100–149.

93. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. & Yushina, E.I. 2012, "On the matrix form of Galois ' theorem on purely periodic continued fractions", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 3, pp. 47–52.

94. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil'kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, "On a single algorithm for finding optimal coefficients", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.

95. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.

96. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.

97. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Yafaeva, R. R. 2002, "On grids of Smolyak S. A.", Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 18–20.

98. Dobrovol'skii, N. M. & Klepikova, N.L. 1990, "Table of optimal coefficients for approximate calculation of multiple integrals", Institut obshhej fiziki AN SSSR, Moscow, USSR.

99. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2001, "The optimal coefficients for mixed meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 2, pp. 41–53.

100. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

101. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

102. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Akkuratova, S.V.1999, "On some properties of normed spaces and algebras of nets", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 100–113.

103. Dobrovol'skii, N. M., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A.L. 1998, "Continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Matematicheskie zametki, vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

104. Dobrovol'skii, N. M. & Rodionova, O. V.1996, "Quadrature formulas with generalized parallelepipedal grids", Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya: Sbornik tezisov dokladov III Mezhdunarodnoj konferentsii [Modern problems of number theory and its applications: proceedings of the third International conference], Tula, Russia, pp. 47–48.

105. Dobrovol'skii, N. M. & Rodionova, O. V.1996, "Quadrature formulas with generalized parallelepipedal grids", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2, no. 1, pp. 71–77.

106. Dobrovol'skii, N. M. & Rodionova, O. V.1998, "On one finite Fourier series and its applications", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 68–79.

107. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1995, "On the number of lattice points in a hyperbolic cross", Algebraicheskie, veroyatnostnye, geometricheskie, kombinatornye i funktsional'nye metody v teorii chisel: Sbornik tezisov doklada II Mezhdunarodnoj konferentsii [Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Proceedings of the II international conference], Voronezh, Russia, p. 53.

108. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1996, "On the analytic continuation of the hyperbolic Zeta function of rational lattices", Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya: Sbornik tezisov doklada III Mezhdunarodnoj konferentsii [Modern problems of number theory and its applications: Proceedings of the III international conference], Tula, Russia, p. 49.

109. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1996, "On continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2, no. 1, pp. 77–87.

110. Dobrovol'skii, N. M., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2013, "On a matrix decomposition of the reduced cubic irrational", Chebyshevskij sbornik, vol. 14, no. 1, pp. 34–55.

111. Dobrovol'skii, N. N. 2003, "On the number of integer points in a hyperbolic cross at the values of $1 \leqslant t < 21$", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 9, no. 1, pp. 91–95.

112. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "A trigonometric polynomial on a grid of Smolyak", Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki" [Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"], Tula, Russia, pp. 34–36.

113. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.

114. Dobrovol'skii, N. N. 2014, Hyperbolic parameter of meshes with weights and its application, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

115. Ermakov, S.N. 1971, Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy [Monte Carlo method and related matters], Nauka, Moscow, Russia.

116. Kan, I.D. 1997, Recurrence sequences and their applications, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

117. Korobov, N.M. 1957, "Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.

118. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

119. Korobov, N.M. 1959, "On approximate solution of integral equations", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 128, no. 2, pp. 235–237.

120. Korobov, N.M. 1959, "On some number-theoretic methods for approximate computation of multiple integrals. Abstract of the report at the meeting of the Moscow mathematical society", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 14, no. 2(86), pp. 227–230.

121. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

122. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

123. Korobov, N.M. 1961, "Application of number-theoretic nets to integral equations and interpolation formulas", Sbornik statej. Posvyashhaetsya akademiku Mikhailu Alekseevichu Lavrent'evu k ego shestidesyatiletiyu, Trudy MIAN SSSR, vol. 60, pp. 195–210.

124. Korobov, N.M. 1962, "On the application of number-theoretic grids", Vychislitel'nye metody i programmirovanie, pp. 80–102.

125. Korobov, N.M. 1963, O teoretiko-chislovykh metodakh v priblizhennom analize [On number-theoretic methods in approximate analysis], Mashgiz, Moscow, Russia.

126. Korobov, N.M., "On some problems of number theory arising from the needs of approximate analysis", Soobshhenie na IV matematicheskom s"ezde (ne opublikovano).

127. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

128. Korobov, N.M. 1967, "About some questions of the theory of Diophantine approximations", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 22, no. 3(135), pp. 83–118.

129. Korobov, N.M. 1982, "On the calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 267, no. 2, pp. 289–292.

130. Korobov, N.M. 1983, "About one assessment of A. O. Gelfond", Vestnik MGU. Seriya 1. Matematika, mekhanika, no. 3, pp. 3–7.

131. Korobov, N.M. 1983, "About some questions of the theory of Diophantine approximations", Tezisy dokladov vsesoyuznoj konferentsii "Teoriya transtsendentnykh chisel i ee prilozheniya", p. 62.

132. Korobov, N.M. 1989, Trigonometricheskie summy i ikh prilozheniya [Trigonometric sums and their applications], Nauka, Moscow, Russia.

133. Korobov, N.M. 1994, "Quadrature formulas with combined grids", Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

134. Korobov, N.M. 1994, "On numerical-theoretic methods of approximate integration", Istoriko-matematicheskie issledovaniya, no. XXXV, pp. 285–301.

135. Korobov, N.M. 1996, "Special polynomials and their applications", Diofantovy priblizheniya. Matematicheskie zapiski, vol. 2, pp. 77–89.

136. Korobov, N.M. 1998, "About the end of the chain fractions", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 52, no. 2, pp. 167–168.

137. Korobov, N.M. 2001, "On number-theoretic interpolation formulas", Istoriko-matematicheskie issledovaniya, no. 6(41), pp. 266–276.

138. Korobov, N.M. 2001, "On some properties of special polynomials", Trudy IV Mezhdunarodnoj konferentsii "Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya" Chebyshevskij sbornik (Proceedings of the IV international conference "Modern problems of number theory and its applications" Chebyshev collection), vol. 1, pp. 40–49.

139. Korobov, N.M. 2002, "About one estimation in the method of optimal coefficients", Tezisy IV Vserossijskoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki", pp. 39–40.

140. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

141. Kruglyak, YU. A., Gordadze, G. S., Podol'skaya, L. M., Tsinauri, S. B. & Sharashidze, G.B. 1971, Chislennyj raschet molekulyarnykh integralov s funktsiyami ot mezhehlektronnogo rasstoyaniya I-II [Numerical calculation of molecular integrals with functions from the interelectronic distance I-II], Izdatel'stvo Tbilisskogo universiteta, Tbilisi, SSSR.

142. Lev, V.F. 1990, "Diaphonia and standard deviations of the multidimensional grids", Matematicheskie zametki, vol. 47, no. 6, pp. 45–54.

143. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

144. Mit'kin, D. A. 1986, "On an elementary proof of A. Weyl's estimate for rational trigonometric sums with a simple denominator", Izvestiya vuzov. Matematika, vol. 6, pp. 14–17.

145. Nikitin, A.N., Rusakova, E.I., Parkhomenko, EH.I., Ivankina, T.I. & Dobrovol'skij, N.M. 1988, "On the reconstruction of the paleotectonic stress according to the piezoelectric texture of the rocks", Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli, no. 9, pp. 66–74.

146. Nikitin, A.N., Rusakova, E.I., Parkhomenko, EH.I., Ivankina, T.I. & Dobrovol'skij, N.M. 1988, "Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using. Data on Piezoelectric Texstures of Rocks", Izvestiya Earth Physics, vol 24, no 9. pp. 728–734.

147. Rebrov, E.D. 2013, Some number-theoretic methods of approximate calculations, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

148. Rebrova, I.YU. 1996, "Continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Tezisy dokladov III Mezhdunarodnoj konferentsii: Sovremennye problemy teorii chisel (Abstracts of the III international conference: modern problems of number theory), Tula, Russia, p. 119.

149. Rebrova, I.YU. 1998, "Continuity of the generalized hyperbolic lattice Zeta function and its analytic continuation", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.

150. Rebrova, I.YU. 1999, The space of lattices and functions on it, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

151. Rodionova, O. V. 2000, "First order recurrence formulas for power sums of fractional fractions", Vserossijskaya nauchnaya konferentsiya "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki", Tula, Russia, pp. 50–51.

152. Rodionova, O. V. 2000, Generalized parallelepipedal grids and their applications, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

153. Roshhenya, A.L. 1996, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross", Tezisy dokladov III Mezhdunarodnoj konferentsii: Sovremennye problemy teorii chisel (Abstracts of the III international conference: modern problems of number theory), Tula, Russia, p. 120.

154. Roshhenya, A.L. 1996, "A generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of a shifted lattice under hyperbole $x \cdot y = N$", Dep. v VINITI, no. 2743–B–96.

155. Roshhenya, A.L. 1997, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross", Dep. v VINITI, no. 2087–N–97.

156. Roshhenya, A.L. 1998, Analytic continuation of the hyperbolic Zeta function of lattices, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

157. Ryaben'kij, V.S. 1960, "On tables and interpolation of functions from a certain class", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 131, no. 5, pp. 1025–1027.

158. Ryaben'kij, V.S. 1961, "On a method for obtaining difference schemes and on the use of number-theoretic grids for solving the Cauchy problem by the finite difference method", Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova, vol. 60, pp. 232–237.

159. Ryaben'kij, V.S., "The economical choice of the grid for tabulation of features", Soobshhenie na IV Vsesoyuznom matematicheskom s"ezde.

160. Saltykov, A.I. 1963, "Tables for computing multiple integrals by method of optimal coefficients", Zhurnal vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fiziki, no. 1.

161. Skriganov, M.M. 1988, Reshyotki v polyakh algebraicheskikh chisel i ravnomernye raspredeleniya po *mod* 1 [Lattices in algebraic number fields and uniform distribution *mod* 1], LOMI, Leningrad, SSSR.

162. Skriganov, M.M. 1991, Ravnomernye raspredeleniya i geometriya chisel [Uniform distributions and geometry of numbers], LOMI, Leningrad, SSSR.

163. Skriganov, M.M. 1993, "On integer points in polygons", Ann. Inst. Fourier, vol. 43, no. 2, pp. 313–323.

164. Skriganov, M.M. 1995, "Constructions of uniform distributions in terms of geometry of numbers", St. Petersburg Mathematical Journal, pp. 635–664.

165. Skriganov, M.M. 1996, "Ergodic theory on homogeneous spaces and the lattice point counting for polyhedra", Doklady RAN.

166. Skriganov, M.M. 1995, "Anomalies in spectral asymptotics", Doklady RAN, vol. 340, no. 5., pp. 597–599.

167. Skriganov, M.M. 1996, "On the Littlwood-Paley theory for multi-dimensional, Fourier series. Zap. Nauchn. Semin. POMI, vol. 226, pp. 155–169.

168. Skubenko, B.F. 1981, "On the product of n linear forms in n variables", Trudy MIAN SSSR, no. 158, pp. 175–179.

169. Skubenko, B.F. 1988, "An isolation theorem for decomposable forms of purely real algebraic fields of degree $n \geqslant 3$", Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 4. Zap. nauch. seminara LOMI, no. 112, pp. 167–171.

170. Skubenko, B.F. 1988, "The minima of decomposable cubic form of three variables", Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 9. Zap. nauch. seminara LOMI, no. 168, pp. 125–139.

171. Skubenko, B.F. 1990, "The minima of decomposable forms of degree n of n variables with $n \geqslant 3$", Modulyarnye funktsii i kvadratichnye formy. 1. Zap. nauch. seminara LOMI, no. 183, pp. 142–154.

172. Smirnova, E. N., Pikhtil'kova, O. A., Dobrovol'skij, N.N. & Dobrovol'skij, N.M. 2017, "Algebraic lattice in a metric space lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 19, no. 4(64).

173. Smolyak, S.A. 1960, “ε - entropy of the $E_s^{\alpha,k}(B)$ and $W_s^{\alpha}(B)$ classes in the $l_2$metric”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 131, no. 1, pp. 30–31.

174. Smolyak, S.A. 1960, “Interpolation and quadrature formulas on classes W_s^{α} and E_s^{α}”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 131, no. 5, pp. 1028–1031.

175. Smolyak, S.A. 1963, “Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

176. Smolyak, S.A. 1966, On optimal recovery of functions and functionals from them, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, USSR.

177. Sobolev, S.L. 1974, Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul [Introduction to the theory of cubature formulas], Nauka, Moscow, USSR.

178. Sobol’, I.M. 1960, “An accurate error estimate for multidimensional quadrature formulae for functions of the class S_p”, Akademiya nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1041–1044.

179. Sobol’, I.M., “On the theory of multidimensional quadrature formulas”, Doklady na IV Vsesoyuznom s"ezde.

180. Sobol’, I.M. 1969, Mnogomernye kvadraturnye formuly i funktsii Khaara [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions], Nauka, Moscow, USSR.

181. Solodov, V.M. 1959, “Calculation of multiple integrals”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 127, no. 4, pp. 753–756.

182. Solodov, V.M. 1963, “On the error of numerical integration”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 2, pp. 284–287.

183. Solodov, V.M. 1968, “Integration in some areas other than a single cube”, Zhurnal vychislitel’noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 8, no. 6, pp.1334–1341.

184. Solodov, V.M. 1969, “Application of the method of optimal coefficients to numerical integration”, Zhurnal vychislitel’noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 9, no. 1, pp.14–29.

185. Stepanov, S.A. 1969, “On the number of points of a hyperelliptic curve over a simple finite field”, Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika, vol.33, pp. 1171–1181.

186. Temirgaliev, N. 1990, “Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of many variables ”, Matematicheskij sbornik, vol.181, no. 4, pp. 490–505.

187. Ustinov, A. V. 2001, “On summation and interpolation formulas”, Trudy IV Mezhdunarodnoj konferentsii “Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya”, Chebyshevskij sbornik (Proceedings of the IV international conference "Modern problems of number theory and its applications Chebyshev collection), vol. 2, pp. 52-71.

188. Ustinov, A. V. 2002, “The discrete analogue of the summation formula of Euler”, Matematicheskie zametki, vol.71, no. 6, pp. 931–936.

189. Frolov, K.K. 1976, “Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

190. Frolov, K.K. 1977, “About the connection of the quadrature formulas and sublattices of the lattice of integer vectors”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 232, no. 1, pp. 40–43.

191. Frolov, K.K. 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel'nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

192. Frolov, K.K. 1980, "The upper bound of discrepancy in the L_2 - metric", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 252, no. 4, pp. 805–807.

193. Chentsov, N. N. 1961, "On quadrature formulae for functions of an infinitely large number of variables", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 1, no. 3, pp. 418–424

194. Chentsov, N. N. 1969, The General theory of statistical inference, D. Sc. Thesis, Institut prikladnoj matematiki AN SSSR, Moscow, USSR.

195. Chentsov, N. N. 2001, Izbrannye trudy: Matematika, [Selected works: Mathematics], FIZMATLIT, Moscow, Russia, p. 400.

196. Sharygin, I.F. 1960, "On application of number-theoretic integration methods in the case of non-periodic functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 1, pp. 71–74.

197. Sharygin, I.F. 1963, "Lower bounds for the error of quadrature formulas on function classes", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 7, no. 4, pp. 784–802.

198. Sharygin, I.F. 1977, "The lower bound of the error of the formulas of approximate summation of the class $E_{s,p}(C)$", Matematicheskie zametki, vol.21, no. 3, pp. 371–375.

199. Shakhov, YU. N. 1959, "On the approximate solution of the Volterra equation of type II by the method of iterations", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 128, no. 6, pp. 1136–1139.

200. Shakhov, YU. N. 1961, "On the approximate solution of the Volterra equation of type II by the method of iterations", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 136, no. 6, pp. 1302–1306.

201. Shakhov, YU. N., "On the numerical solution of multidimensional linear Volterra equations of the II kind by iteration method", The message at the IV Congress of mathematical.

202. Shakhov, YU. N. 1961, On the numerical solution of multidimensional linear Volterra equations of the II kind by iteration method, Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow, USSR.

203. Shakhov, YU. N. 1965, "Calculation of integrals of increasing multiplicity", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 5, no. 5, pp. 911–916.

204. Shakhov, YU. N. 1964, "On the approximate solution of multidimensional linear Volterra equations of the II kind by iteration method", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 4, no. 4, pp. 75–100.

205. Shakhov, YU. N. 1963, "On the calculation of eigenvalues of a multidimensional symmetric kernel using number-theoretic grids", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 3, no. 6, pp. 988–997.

206. Shakhov, YU. N. 1974, "On the error of recovery of functions from a certain class on parallelepipedal grids", Matematicheskie zametki, vol.15, no. 5, pp. 749–756.

207. Aardenne-Ehrenfest 1949, "On the impossibility of a just distribution", Indagationes Math., vol. 11, no. 4 pp. 264–269.

208. Zaremba, S. K. (ed) 1972, Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Academic Press, New York, USA.

209. Baker, A.C. 1965, “On some diophantine inequalities involving the exponential function”, Canadian Journal of Mathematics vol. 17, no. 4, pp.616–626.

210. Bohl, P. 1909, “A in the theory of secular disturbances occurring Problem”, Journal for pure and applied mathematics, vol. 135, pp. 189–283.

211. Chaix, H. & Fauere, H. 1990, “Diskrepance and diaphonie des suites de van der Corput generalisees”, C.r.Acad.sci.Ser.1, no. 2(311), pp. 65–68.

212. Chen, W.W.L. 1980, “On irregularities of distribution II”, Mathematika, vol. 27, no. 2. P. 153–170.

213. Chen, W.W.L. 1983, “On irregularities of distribution II”, Quart. J.Math. Oxford (2). 34, pp. 257–279.

214. Van der Corput, J. G. 1935, Verteilungsfunktionen I–VIII, Proc. Kon. Ned. Acad. Wetensch. Amsterdam, vol. 38, no. 8, pp. 813–821.

215. Davenport, H. 1956, “Note on irregularities of distribution”, Mathematika, vol. 3, pp. 131–135.

216. Osgood, Ch. F. (ed) 1973, Diophantine Approximation and its Applications, Academic Press, New York, USA.

217. Faure, H. 1982, “Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s)”, Acta Arith, vol. 41, pp. 337–351.

218. Halton, J. H. 1960, “On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals”, Numerische Math, vol. 27, no. 2, pp. 84–90.

219. Hammersley, J.M. 1960, “Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems”, Ann. New York Acad. Sci., vol. 86, 844–874.

220. Hammersley, J.M. & Handscomb, D. 1964, Monte-Carlo methods, Chapman and Hall, London.

221. Hlawka, E. 1962, “For approximate calculation of multiple integrals”, Monthly Bulletin of mathematics, vol. 66, no. 2. pp. 140–151.

222. Hlawka, E., Firneis, F. & Zinterhof, P. 1981, Zablentheoretiscbe methods in numerical mathematics, R. Oldenbourg Verlag, Wien.

223. Hua Loo Keng & Wang Yuan 1981, Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Springer-Verlag Berlin.

224. Kuiper, L. & Niederreiter H. 1974, Uniform distribution of sequences, London, Sidney, Toronto.

225. Larcher, G. Niederreiter 1989, “Optional coefficients modulo prime powers in the three-dimensional case”, Ann.mat.pura ed appl., no. 155, pp. 299–315.

226. Proinov, P. & Atanassov, E. 1988, “On the distibution of the van der Corput generalized sequences”, C.r.Acad.Sci.Ser.1, no.18(307), pp. 895–900.

227. Proinov, P. & Grozdanov, V.S. 1987, “Symmetrization of the van der Corput–Halton sequence”, Dokl. Bolg. AN, no. 8(40), pp. 5–8.

228. Proinov, P. & Grozdanov, V.S. 1988, “On the diaphony of the van der Corput-Halton sequence”, J. Number Theory, no. 1(30), pp. 94–104.

229. Roth, K.F. 1954, “On irregularities of distribution”, Mathematika, 1, pp. 73–79.

230. Roth, K.F. 1980, “On irregularities of distribution - IV”, Acta Arithm, 37. pp. 65–75.

231. Schmidt Wolfgang, M. 1972, “Irregularities of distribution -VII”, Acfa Arithm, 21, pp. 45–50.

232. Schmidt Wolfgang M. 1977, “Irregularities of distribution - X”, Number Theory and Algebra (H.Zassenhaus ed.), pp. 311–329.

233. Sierpinski, W. 1910, — Krakua. Akad. Anz., math.-naturwiss. Kl. (A), 1910, Jan., S. 9.

234. Wang Yuan 1962, “On methods of approximate integration”, Trudy instituta matematicheskoj Akademii nauk KNR.

235. Weil, A. 1948, “On some exponentional sums”, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 34, no.5, pp. 204–207.

236. Weyl, H. 1910, “On the Gibbs phenomenon and related congruence phenomena”, Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 30, pp.377-407

237. Weyl H. 1916, “On the uniform distribution of Numbers mod. one”, Math. Ann., vol. 77, pp. 313–352.

238. Zinterhof, P. 1976, “About some of the Timates for the Approximation of functions with the same distribution methods”, Sb. Osterr. Akad. Wiss. Math. Kl., no. 185, pp. 121–132.

Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет
Институт экономики и управления
Оренбургский государственный университет
Поступило 23.11.2017