

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИКТом 18 Выпуск 3

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-500-517

**МОДУЛЬ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТОВ
ДЛЯ ПАКЕТА FIDESIS**С. В. Шешенин¹**Аннотация**

С точки зрения вычислительной механики будущее развитие и конкурентная способность пакетов конечно-элементного анализа связано с реализацией в них сложных физико-механических и геометрических моделей механики деформируемого твердого тела. Имеются в виду связанные модели, физическая и геометрическая нелинейности, наличие в задачах малых параметров физической или геометрической природы.

Примером могут служить задачи для тонкостенных тел, деформирование при больших деформациях и искажения формы, задачи, в которых участвуют как твердые деформируемые тела, так и жидкости. Отдельное место занимает моделирование композиционных материалов, начиная с решения так называемых локальных задач и продолжая далее моделированием деформирования и разрушения элементов конструкций, а также технологические задачи механики композитов. Например, это задача затекания смолы с короткими включениями в матрицу сложной формы. Другой пример касается процесса полимеризации смолы с длинными волокнами в форме и проблемы коробления произведенного ламината. Пористая и трещиноватая среда, например, грунт и скальные породы, не являются композитами в стандартном понимании этого термина. Однако для их описания используются методы механики композитов. Здесь можно отметить достаточно сложную задачу фильтрации жидкости в пористой деформируемой среде испытывающей большие деформации.

Основным приемом механики композитов является многоуровневый подход, приводящий к так называемым локальным задачам в представительной области. В данной статье описываются конечно-элементные реализации локальных задач, разработанные под руководством автора статьи. Модели и вычислительные алгоритмы, реализованные в виде собственного программного кода, прошли тестирование и в перспективе могут использоваться совместно с пакетом конечно-элементного

¹Шешенин Сергей Владимирович, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, sheshenin@mech.math.msu.su

анализа FIDESES в виде отдельного модуля. Эти численные моделирования разрабатывались в рамках долгосрочного сотрудничества с техническим университетом Берлина, компанией Dr. Mirtsch GmbH, известным французским производителем шин компанией Michelin. Дальнейшее развитие модуля может быть связано с использованием многоуровневого подхода для моделирования деформирования и прогрессирующего разрушения ламинатов, течения смолы с короткими волокнами, технологических задач производства ламинатов.

Ключевые слова: асимптотический метод осреднения, осреднение пластин, теория Миндлина, моментная модель резинокорда, нелинейная модель резинокорда, моделирование композитов с короткими волокнами, локальные задачи.

Библиография: 24 названия.

THE COMPOSITE MECHANICS PACKAGE FOR FYDESIS SOFTWARE.

S. V. Sheshenin

Abstract

According to the recent development of the Computational Mechanics, the future development and competitive ability of finite element analysis software seems to be related with the implementation of complicated physical, mechanical and geometric models of solids and fluids. These are coupled models, problems that include physical and geometric nonlinearities, the models or boundary-value problems with small physical or geometric parameters.

Thin-walled solids, deformation with large strains and shape distortions, problems coupling solids and fluids supply well-known examples. The modeling of composite materials is another and quite important example nowadays. It begins with solving so-called cell problems and leads to modeling deforming and damaging of composite structural elements as well as to technological problems simulation. The latter type of problems is the problem of a resin with short fibers flow into a mold of complex shape. Another example concerns the process of a resin with long fibers polymerization in a mold followed by the problem of laminate warping. Porous ground and fractured rock are not composites in the commonly used meaning of the term. However, Compositional Mechanics methods are used for their analysis. It is reasonable to mention rather complicated problem of fluid filtration in a porous media experiencing large strains.

It seems that a multi scale approach is the most general technique of composite mechanics. It results in so-called local problems in the representative volume element. This paper shows finite-element implementations of local problems developed by the author. Mechanical models and computational algorithms were implemented as home-made computer code.

The code has been thoroughly tested and can be used together with FIDESES finite element analysis software as third party package. I may be noted that the developed numerical simulations were elaborated during long term cooperation with the Technical University of Berlin, Dr. Mirtsch GmbH and famous French tire maker Michelin. Further development of the package can be associated with the use of a multi scale approach aiming composite structural elements deformation and progressive damaging modeling, resin with short fibers flow simulation as well as numerical simulation of laminate production process.

Keywords: asymptotic method of averaging, averaging of plates, Mindlin theory, moment model of rubber cord, nonlinear model of rubber cord, modeling of short fiber composite, cell problems.

Bibliography: 24 titles.

1. Введение

Вычислительная механика композитов затрагивает следующие области [2,3]: построение модели и экспериментальную идентификацию параметров, постановку краевой задачи и конечно-элементную (или другую) дискретизацию, многоуровневый численный алгоритм решения, экспериментальную верификацию. Взаимосвязь расчетов с экспериментами контрастно отличает вычислительную механику от вычислительной математики.

Сведение практических задач техники, строительства и др. к решению обыкновенных дифференциальных уравнений позволило эффективно получать и анализировать напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций в «докомпьютерную» эпоху, что обусловило процветание сопротивления материалов. Прогресс вычислительной техники привел к интенсивному развитию конечно-элементных схем. Это открыло возможность эффективного решения двух- и трехмерных краевых задач. С этого и началось развитие вычислительной механики деформируемого твердого тела. Однако для развития вычислительной механики композитов потребовался еще один шаг в развитии, который был сделан с привлечением многоуровневого подхода, в частности, на основе асимптотического «метода осреднения» [4,5]. Развитие методов вычислений и, в частности, параллельных вычислений также способствует прогрессу вычислительной механики [6].

2. Вычисление эффективных свойств

Чередование компонентов композита происходит очень часто. Даже в резинокордном композите кордные нити расположены на расстоянии около 1 мм друг от друга. Отсюда возникает необходимость использования нескольких (обычно двух) уровней моделирования. Вначале эта идея использовалась в наиболее простом виде: микроуровень использовался для вычисления эффективных свойств композита на представительном элементе структуры

(RVE — representative volume element), а макроуровень — для вычисления НДС на основе эффективных свойств во всем элементе конструкции. Поскольку часто рассматривались композиты с длинными волокнами, то последующее вычисление напряжений в волокнах не вызывало затруднений. Для более сложной структуры по решению, найденному для материала с эффективными (однородными) свойствами, найти НДС в компонентах композита сложнее. Строгую математическую основу дал асимптотический метод осреднения [4]. Именно частое расположение корда позволяет использовать асимптотическое решение, причем почти всегда первые два члена асимптотического ряда дают хорошее приближение.

Метод осреднения одновременно дает определение эффективных свойств, совпадающее с общим определением [7]. Поэтому методика осреднения является математической основой в механике композитов. С другой стороны она предлагает и вычислительную процедуру решения линейных и нелинейных (в сочетании с линеаризацией) краевых задач механики композитов.

Метод осреднения позволяет находить эффективные свойства и так называемые локальные функции путем решения локальных краевых задач в представительной области (RVE) с помощью метода конечных элементов. Под представительной областью обычно понималась ячейка периодичности. Одной из первых работ такого типа является [8]. Метод осреднения для непериодической среды и пример конечно-элементного решения локальных задач с непериодическими граничными условиями приведены в [9, 10]. При этом в работах [10, 11, 12] предложена итерационная процедура связывания микро и макро уровней, по своей идее похожая на метод СН-ЭВМ [13, 14]. Аналогом опытов с макро образцами теперь служит решение локальных задач. Построение собственно эффективных свойств для нелинейных материалов намного сложнее, чем для линейных. Отметим работы [15, 16] в этом направлении.

3. Осреднение пластин

Одной из областей применения метода осреднения является моделирование неоднородных по форме и свойствам тонкостенных тел [17], т. е. пластин, оболочек, стержней. Сложность определяется тем, что помимо традиционного для метода осреднения малого параметра еще появляется малый параметр, определяемый толщиной пластины или диаметром стержня. При рассмотрении материала, имеющего структуру периодическую по всем направлениям обычно осредняются только уравнения равновесия. При осреднении тонкостенных тел пограничный слой пронизывает всю толщину тонкого тела. Следовательно, необходимо применять асимптотическое разложение и для граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела.

Идея метода двух масштабов для пластин состоит в том, что искомые функции, например, перемещения, считаются функциями двух медленных координат в плане тонкого тела и трех быстрых координат, описывающих трехмерную ячейку периодичности (в более общем случае, представительный

элемент): $\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^b$, где

$$u_i^e = v_i(x_1, x_2) + \sum_{m=1} \varepsilon^m N_{iPQ_0 \dots Q_{m-1}}^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P, Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_I^b &= -\varepsilon \xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \sum_{m=2} \varepsilon^m N_{IPQ_0 \dots Q_{m-2}}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_{m-2}}(x_1, x_2) \\ u_3^b &= w(x_1, x_2) + \sum_{m=2} \varepsilon^m N_{3PQ_0 \dots Q_{m-2}}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_{m-2}}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (2)$$

$v = \{v_1, v_2, 0\}$ — гладкая составляющая перемещения в плоскости пластины, w — гладкая составляющая прогиба. Локальные функции, отмеченные индексом «е», соответствуют состоянию растяжения в плоскости пластины (extension) в отличие от локальных функций изгиба, которые отмечены индексом «б» (bending). Ряды (1), (2) не являются, вообще говоря, сходящимися и обычно используются несколько первых членов.

Например, потому, что использование большего числа членов может быть полезным только для толстых пластин, для которых описание трехмерной теорией упругости, вероятно, будет более эффективным. Здесь и далее индексы, обозначенные большими буквами, принимают значения 1, 2.

В (1), (2) обычно в деталях рассматривались только первые члены

$$u_i^{ext} = v_i(x_1, x_2) + \varepsilon N_{iPQ}^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P,Q}(x_1, x_2) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_I^{bend} &= -\varepsilon \xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \varepsilon^2 N_{IPQ}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ} \\ u_3^{bend} &= w(x_1, x_2) + \varepsilon^2 N_{3PQ}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия теории пластин относительно усилий и моментов имеют вид

$$T_{IJ,J} = 0, \quad M_{IJ,J} + Q_I = 0, \quad Q_{I,I} + \varepsilon^3 p(\mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

где p — суть поперечная нагрузка, а усилия, моменты и поперечные силы определяются в виде средних по объему ячейки периодичности [17]

$$T_{IJ} = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} \sigma_{IJ} dV, \quad M_{IJ} = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} x_3 \sigma_{IJ} dV, \quad Q_I = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} \sigma_{I3} dV \quad (6)$$

Здесь V^{cell} — трехмерная область ячейки периодичности или представительного элемента, а Σ^{cell} — двумерная область, являющейся проекцией V^{cell} на отсчетную поверхность пластины.

Эффективные определяющие соотношения осредненной пластины следуют из (6) и закона Гука [17]

$$T_{IJ} = A_{IJPQ}e_{PQ} + B_{IJPQ}^{(I)}k_{PQ}, \quad M_{IJ} = B_{IJPQ}^{(II)}e_{PQ} + D_{IJPQ}k_{PQ} \quad (7)$$

где A_{IJPQ} — эффективные жесткости на растяжение, D_{IJPQ} — на изгиб, а $B_{IJPQ}^{(I)}$ и $B_{IJPQ}^{(II)}$ — жесткости взаимного влияния. В общем случае первого приближения система уравнений равновесия относительно перемещений v и прогиба w , как следует из (5), (7) имеет вид

$$A_{IJPQ}v_{P,QJ} - B_{IJPQ}^{(I)}w_{,PQJ} = 0, \quad -B_{IJPQ}^{(II)}v_{P,QIJ} + D_{IJPQ}w_{,PQIJ} = \varepsilon^3 p \quad (8)$$

т. е. такой же, как для слоистых пластин [18]. В случае пластины, имеющей плоскость симметрии, уравнения (2) разделяются, и получается классическое уравнение изгиба

$$D_{IJPQ}w_{,IJPQ} = \varepsilon^3 p(x)$$

Локальные функции $\mathbf{N}^e$ и $\mathbf{N}^b$ находятся из решения локальных задач в V^{cell}

$$\begin{aligned} P_{ijPQ,j} &= 0 \quad \xi \in V_{\xi}^{\text{cell}}, \quad P_{ijPQ}n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \\ Q_{ijPQ,j} &= 0, \quad \xi \in V_{\xi}^{\text{cell}}, \quad Q_{ijPQ}n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \end{aligned} \quad (9)$$

Приведем пример расчета эффективных жесткостей гофрированной пластины, изображенной на рис. 1.



Рис. 1: Гофрированная пластина, производимая компанией Mirtsch GmbH

Решение локальных задач по собственной программе и с помощью коммерческого конечно-элементного пакета показали хорошее совпадение результатов. Сравнение приведено в таблице 1. В строке, помеченной цифрой 1, приведены жесткости, вычисленные с помощью собственной программы. Данные, вычисленные при помощи коммерческой конечно-элементной программы, даны в строке, отмеченной цифрой 2. Как видно совпадение весьма хорошее.

Таблица 1

	A_{1111}	A_{1122}	A_{2211}	A_{2222}	B_{11}	B_{1122}	B_{1221}	B_{2222}
1	$1.44 \cdot 10^{-2}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$5.52 \cdot 10^{-3}$	$5.58 \cdot 10^{-5}$	$6.51 \cdot 10^{-5}$	$-1.80 \cdot 10^{-6}$	$2.79 \cdot 10^{-5}$
2	$1.44 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$5.60 \cdot 10^{-3}$	$5.50 \cdot 10^{-5}$	$6.50 \cdot 10^{-5}$	$-1.00 \cdot 10^{-6}$	$2.60 \cdot 10^{-5}$

Локальные задачи для нахождения функций $\mathbf{N}^e$ и $\mathbf{N}^b$ приведены в (9) с условиями периодичности на ее боковых гранях $\xi_I = \pm l_I/2$. Здесь $\mathbf{n}(\xi)$ — вектор нормали к верхней или нижней поверхностям ячейки периодичности V^{cell} .

В случае гофрированной пластины осуществляется совместное состояние растяжения и изгиба. При этом жесткости отличаются на четыре порядка, что доставляет существенную вычислительную сложность, типичную для композитов. Использование двух масштабов в том числе нужно, для ее преодоления. Сравнение цилиндрических жесткостей $\tilde{D}_{11} = D_{11} - \frac{B_{11}^{(1)}B_{11}^{(2)}}{E_{11}}$ и $\tilde{D}_{22} = D_{22} - \frac{B_{22}^{(1)}B_{22}^{(2)}}{E_{22}}$ с жесткостями, измеренными в эксперименте на цилиндрический изгиб, проведенном в компании Mirtsch GmbH показало хорошее совпадение. Пластина оказалась не точно изотропной. Поскольку для идеальной пластины с шестиугольной ячейкой эффективные жесткости являются изотропными, то следует сделать важный вывод о сильном влиянии малых искажений формы шестиугольной ячейки на эффективные изгибные жесткости.

В случае изгиба балки, например, в плоскости x_1, x_2 , имеем соотношения, которые, исходя из (3) — (8), можно почти автоматически записать в виде

$$u_i^{\text{ext}} = v_i(x_1) + \varepsilon N_i^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{dv}{dx_1}(x_1) + \dots, \quad i = 1, 2, 3$$

$$u_1^{\text{bend}} = -\varepsilon \xi_2 \frac{dw}{dx_1}(x_1) + \varepsilon^2 N_1^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{d^2w}{dx_1^2} + \dots,$$

$$u_2^{\text{bend}} = w(x_1) + \varepsilon^2 N_2^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{d^2w}{dx_1^2}(x_1, x_2) + \dots,$$

$$u_3^{\text{bend}} = \varepsilon^2 N_3^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \dots, \quad v = \{v, 0, 0\}.$$

Напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e &= P_{ij} \frac{dv}{dx_1}, \quad P_{ij} = C_{ij11} + C_{ijkl} N_{k,l}^e \\ \sigma_{ij}^b &= \varepsilon Q_{ij} \frac{d^2w}{dx_1^2}, \quad Q_{ij} = -\xi_2 C_{ij11} + C_{ijkl} N_{k,l}^b \end{aligned}$$

Продольное усилие, изгибающий момент и поперечная сила теперь определяются как

$$T = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} \sigma_{11} dV, \quad M = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} x_2 \sigma_{11} dV, \quad Q = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} \sigma_{12} dV$$

а определяющие соотношения имеют вид

$$T = Ae + B^{(I)}k, \quad M = B^{(II)}e + Dk$$

где A — эффективная жесткость на растяжение, D — на изгиб, $B^{(I)}$ и $B^{(II)}$ — жесткости взаимного влияния растяжения и изгиба.

Локальные задачи записываются в виде, аналогичном (9)

$$\begin{aligned} P_{ij,j} = 0 \quad \xi \in V_{\xi}^{\text{cell}}, \quad P_{ij}n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \\ Q_{ij,j} = 0, \quad \xi \in V_{\xi}^{\text{cell}}, \quad Q_{ij}n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \end{aligned} \quad (10)$$

с условиями периодичности при $\xi_1 = \pm l/2$, $\mathbf{n}(\xi)$ — вектор нормали к боковой поверхности.

Алгоритм решения задач (9), (10) реализован автором в виде собственного программного кода. Интеграция с FIDESYS позволит охватить широкий круг задач, связанных с вычислением жесткостей неоднородных пластин и стержней.

В [17] изучены кроме первого еще два приближения. Для слоистой пластины каждое приближение уточняет решение так же, как и для однородной пластины, согласно таблице 2.

Таблица 2

	1	2	3
σ_{11}	+	—	+
σ_{12}	+	—	+
σ_{13}	—	+	—
σ_{22}	+	—	+
σ_{23}	—	+	—
σ_{33}	—	—	+

Из таблицы видно, что три члена ряда позволяют найти все компоненты тензора напряжения. Исследование четвертого члена остается открытым, хотя уже три члена обеспечивают достаточную точность для толстых пластин [19, 20]. В [20, 21] показано, что для слоистой пластины асимптотическим является уравнение

$$w_{,IIJJ} = \frac{p}{D} + \frac{p_{,II}}{\gamma\mu h}$$

Теория Миндлина приводит к такому же уравнению, в котором часто используются значения коэффициента $\gamma = 5/6$ и $\gamma = 4/5$. В асимптотическом методе множитель κ находится из локальной задачи пятого приближения и имеет выражение $\gamma = \frac{5}{6} + \frac{29}{6} \frac{\nu}{12-7\nu}$. Несмотря на совпадение уравнений для прогиба, теория Миндлина даёт другие распределения деформаций (и, соответственно, напряжений) по толщине пластины, чем асимптотическое решение [21].

4. Линейная модель резинокорда

Описанную выше методику осреднения можно применить к резинокордной пластине. Обычно принято считать, что структура резинокорда имеет плоскость симметрии. Следовательно, асимптотический анализ приводит к несвязанным определяющим уравнениям вида (7)

$$T_{IJ} = A_{IJPQ} \cdot \varepsilon_{PQ}, \quad M_{IJ} = D_{IJPQ} \cdot k_{PQ}, \quad I, J, P, Q = 1, 2 \quad (11)$$

где $\varepsilon_{PQ} = \frac{1}{2}(u_{P,Q} + u_{Q,P})$, $k_{PQ} = w_{,PQ}$. В (11) жесткости на изгиб и растяжение являются независимыми друг от друга. Их можно вычислить из решений локальных задач, но точнее измерить экспериментально. Будем считать что соотношения (11) адекватно описывают двумерные свойства резинокорда в рамках модели эффективного слоя.

С другой стороны двумерные определяющие соотношения (11) неудобно использовать в трехмерной модели пневматической шины [22]. Разрешить противоречие можно, если резинокордный слой описывается уравнениями трехмерной моментной теории упругости. Свойства такого упругого материала можно определить из условия, что при стремлении толщины пластины к нулю предельными являются соотношения (11). Другой подход, непосредственно ориентированный на конечно-элементную реализацию, состоит в приравнивании энергии трехмерной моментной упругой среды к энергии деформации, соответствующей соотношениям (11). Для них удельная энергия выражается в виде

$$\varphi^{in-plane} = \frac{1}{2} (T_{IJ} \varepsilon_{IJ} + M_{IJ} k_{IJ}) = \frac{1}{2} (A_{IJPQ} \varepsilon_{IJ} \varepsilon_{PQ} + D_{IJPQ} k_{IJ} k_{PQ}). \quad (12)$$

Нужно отметить, что соотношения (11) определяют только двумерные свойства эффективного слоя. Соотношения трехмерной моментной среды в обозначениях из [23] имеют выражение

$$\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu_{ij} \kappa_{ij}) dx_3, \quad \varepsilon_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{kij} \omega_k, \quad \kappa_{ij} = \omega_{j,i}, \quad ij = 1, 2, 3,$$

где ω — вектор собственного поворота материальной точки. Нас интересует частный случай моментной теории, описываемый далее. Энергия представляется в виде $\varphi = \varphi^{in-plane} + \varphi^{out-plane}$, где

$$\begin{aligned}\varphi^{out-plane} &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{I3}\varepsilon_{I3} + \sigma_{3I}\varepsilon_{3I} + \sigma_{33}\varepsilon_{33})dx_3 = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} (C_{I3J3}\varepsilon_{I3}\varepsilon_{J3} + C_{I33J}\varepsilon_{I3}\varepsilon_{3J} + C_{3333}\varepsilon_{33}\varepsilon_{33})dx_3 \quad (13)\end{aligned}$$

$$\varphi^{in-plane} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{IJ}\varepsilon_{IJ} + \mu_{IJ}\omega_{J,I})dx_3 \quad (14)$$

Поперечные касательные напряжения σ_{I3} и σ_{3I} вызваны как сдвигом так и изгибом. Будем считать, что несимметричность этих напряжений вызвана только изгибным состоянием. Поскольку поперечные касательные напряжения вследствие изгиба в $1/h$ раз меньше напряжений растяжений сжатия, то в теории первого приближения относительно h ею можно пренебречь и в (13) считать, что $C_{I3J3} = C_{I33J}$, $\varepsilon_{I3} = \varepsilon_{3I}$, а вектор поворота выражается через перемещения $\omega_k = \epsilon_{kij}\omega_{ij}$, $\omega_{ij} = 1/2(u_{i,j} - u_{j,i})$. Второе слагаемое в подынтегральном выражении можно переписать, используя обозначения моментов и кривизн такие же, как в (11) $\mu_{IJ}\omega_{J,I} = m_{IJ}k_{I,J}$, где

$$\begin{aligned}\mu_{12} &= m_{11}, \mu_{21} = m_{22}, \mu_{11} = m_{22}, \mu_{22} = m_{12}, \quad k_{11} = 1/2(u_{3,1} - u_{1,3})_{,1}, \\ k_{22} &= 1/2(u_{3,2} - u_{2,3})_{,2}, k_{21} = 1/2(u_{3,2} - u_{2,3})_{,1}, \quad k_{12} = 1/2(u_{3,1} - u_{1,3})_{,2}.\end{aligned}$$

Поскольку в теории первого приближения поперечные деформации сдвига считаются нулевыми, то формулы для кривизн можно преобразовать

$$k_{11} = u_{3,11}, \quad k_{22} = u_{3,22}, \quad k_{21} = k_{12} = u_{3,21}.$$

Таким образом, формулы приобретают вид аналогичный, используемому в теории пластин.

Чтобы энергии в (12) и (14) приближенно совпадали, положим

$$\sigma_{IJ} = a_{IJKL}\varepsilon_{KL}, \quad \mu_{IJ} = d_{IJKL}k_{KL}, \quad a_{IJKL} = 1/h A_{IJKL}, \quad d_{IJKL} = 1/h D_{IJKL}.$$

Для описанной моментной модели аспирантом А. Романовым реализована конечно-элементная реализация, в которой вычисление поворотов осуществлено с помощью разностных производных $\omega_I = \frac{1}{h}(u_I^+ - u_I^-)$. В этой формуле значения продольных перемещений с плюсом и минусом берутся на верхней и нижней лицевых поверхностях, как пояснено на рис. 2.

Пример влияния модифицированных изгибных свойств на прогиб пластины показан в таблице 3. Расчеты проведены с использованием трехмерной

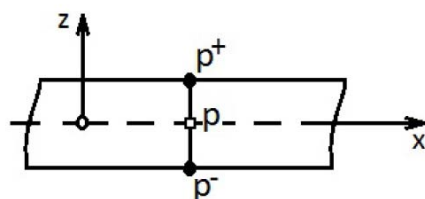


Рис. 2: Пояснение к вычислению поворотов

моментной теории упругости для цилиндрического изгиба при отношении толщины к длине пластины равному 1, что вполне адекватно для резинокорда.

В первом столбце приведены отношения заданных в трех расчетах цилиндрических жесткостей пластины к значениям стандартной цилиндрической жесткости, соответствующей обычной теории упругости. Как видно, отношение прогибов достаточно точно повторяет отношение жесткостей и доказывает работоспособность построенной теории. Заметим, что предлагаемая моментная модель резинокорда представляется подходящей для описания слоев брекера, имеющих металлические волокна.

Таблица 3

1.1	1.09
1.2	1.18
1.4	1.35

5. Нелинейная модель резинокорда

Для описания резинокордного слоя с текстильными волокнами моментные свойства менее важны, поскольку изгибная жесткость мала. Однако интерес может представлять деформирование при деформациях до 15 – 20%. Ниже описывается модель анизотропного гиперупругого монослоя и решение локальных задач для вычисления параметров потенциала.

Для гиперупругого материала напряжения определяются как $S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \cdot (\mathbf{C})$. Здесь S_{ij} есть компоненты 2-го тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, W — гиперупругий потенциал, C_{ij} — компонента меры деформаций Коши–Грина. Для изотропных материалов потенциал является функцией от трех инвариантов ортогональных преобразований. Например, $W = W(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}))$ или $W = W(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), J)$, где $I_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C})$, $I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2))$, $I_3(\mathbf{C}) = J^2$, $J = \det \mathbf{F}$, а $\mathbf{F}$ — градиент деформации. С помощью девиатора меры деформаций можно разделить свойства на сдвиг и объемное деформирование: $\bar{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}$. Тогда $\bar{I}_1 = I_1(\bar{\mathbf{C}}) = J^{-\frac{2}{3}} I_1$, $\bar{I}_2 = I_2(\bar{\mathbf{C}}) = J^{-\frac{4}{3}} I_2$, а потенциал представить как $W_{iso} = W_{shear}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) +$

$+W_{vol}(J)$.

Материал матрицы при деформациях, не превышающих 20%, может быть хорошо описан потенциалом Муни $W_{shear} = W_m = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3)$. «Объемная» составляющая потенциала часто принимается в виде квадратичного потенциала $W_{vol}(J) = \frac{K}{2}(J - 1)^2$, где K — модуль объемного сжатия.

Моделирование упругой анизотропной среды при больших деформациях может быть основано на использовании инвариантов, соответствующих типу анизотропии. Число алгебраически независимых инвариантов для трансверсально-изотропной среды равно пяти, а для ортотропной — шести. Наборы независимых инвариантов могут быть выбраны по-разному. Если принять, что ось трансверсальной изотропии направлена вдоль оси 3 декартовой системы координат, то можно выбрать следующий набор независимых инвариантов для трансверсальной изотропии:

$$I_1(\underline{C}) = C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad I_2(\underline{C}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_1(C^2)), \quad I_3(\underline{C}) = J$$

$$I_4(\underline{C}) = \sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}, \quad I_5(\underline{C}) = C_{33}$$

Эти инварианты сохраняют свои значения в любой системе координат, полученной с помощью преобразований трансверсальной изотропии. Можно записать инварианты $I_4(\underline{C})$, $I_5(\underline{C})$ в виде, инвариантном, относительно любых преобразований, а не только преобразований из группы трансверсальной изотропии. Инвариант $I_5(\underline{C})$ может быть представлен в виде $I_4(\underline{C}) = \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}_3$, где $\mathbf{k}_3$ — единичный вектор, направленный вдоль оси 3. Инвариант $I_4(\underline{C})$ может быть записан как $I_4(\mathbf{C}) = \sqrt{I_5(\mathbf{C}^2) - I_5^2(\mathbf{C})}$.

Поскольку резинокорд состоит из изотропной резины и волокон, то представим потенциал в виде суммы изотропной части и дополнительных членов, учитывающих наличие волокон [24]

$$W = W_{iso} + W_{tr_sh}(I_4) + W_L(I_5)$$

Учитывая что, деформации сдвига и растяжения вдоль волокон малы, можно принять $W_{tr_sh}(I_4) = \frac{a}{2}I_4^2$, $W_L(I_5) = \frac{1}{2}b(I_5 - 1)^2$.

Для волокнистого материала, выбранная выше форма потенциала соответствует представлению всей энергии деформации в виде суммы энергии, аккумулированной в матрице, и энергии, запасенной в волокнах без учета взаимного влияния друг на друга.

Аналогичные представления для ортотропной модели резинокордного слоя имеют вид

$$I_1(\mathbf{C}) = C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_1(\mathbf{C}^2)), \quad I_3(\mathbf{C}) = J^2, \\ I_4(\mathbf{C}) = C_{13}^2, \quad I_5(\mathbf{C}) = C_{33}, \quad I_6(\mathbf{C}) = C_{23}^2$$

и соответственно

$$W = W_{iso} + W_{13}(I_4) + W_L(I_5) + W_{23}(I_6)$$

Поскольку резинокорд можно с достаточной точностью имеет периодическую структуру, то определение материальных параметров используются решения локальных задач, причем вычисления на ячейке можно рассматривать как численную замену реального теста. Нагружая ячейку периодически различными типами нагрузки можно получить эффективные диаграммы нагружения, связывающие средние напряжения и деформации для каждого вида нагружения. Аппроксимируя вычисленную (или экспериментальную) диаграмму нагружения кривой, полученной исходя из упругого потенциала, можно получить соотношение для определения неизвестных материальных параметров. Для приведенных потенциалов построен набор нагружений, позволяющих вычислить все материальные параметры.

6. Локальные задачи для композита с короткими волокнами

При решении локальных задач с короткими волокнами существует вычислительная проблема, не имеющая места для композита с длинными волокнами. Именно, в представительной области возникают конечно-элементные задачи, не поддающиеся решению. Даже построение сетки вызывает затруднения. Однако оказалось, что вычисление эффективных свойств на прямоугольной сетке с грубой аппроксимацией межфазных границ может давать достаточную точность для эффективных модулей. Интересно заметить, что известный пакет Digimat позволяет использовать такой же подход.

Моделирование структуры композита с короткими волокнами может осуществляться двумя способами. В случае, когда волокно моделируется одномерным конечным элементом, построение сетки вызывает не столь большие трудности, но такая модель дает приемлемые результаты только для небольшой концентрации волокон. В случае, когда волокно моделировалось цилиндром, попытки построить сетку и решить конечно-элементную задачу не приводят к успеху. Для того, чтобы обойти возникшую проблему может использоваться старый метод построения сетки. Представительная область в виде куба или параллелепипеда разбивается на большое число равных конечных элементов по форме аналогичной форме области, после чего каждому конечному элементу присваивается номер материала, который оказался в его геометрическом центре элемента. Конечно, такое построение сетки ведет к грубому решению задачи на микроуровне, однако при вычислении осредненных напряжений и деформаций получаются результаты, хорошо совпадающие с экспериментальными значениями.

В подтверждение приведем пример вычисления модуля Юнга среды с равномерно распределенными волокнами, у которых отношение длины к диаметру равнялось 100. Объемная доля волокон в материале составляла 7.25%, 15% и 32%. Модуль Юнга волокон равнялся 240 ГПа, матрицы — 5.4 ГПа. Коэффициент Пуассона волокна 0.2, матрицы — 0.36. В таблице 4 приведено сравнение вычисленных значений модуля Юнга с экспериментально измерен-

ными значениями. В этой таблице в первой колонке приведены концентрации, во второй — значения модуля Юнга (ГПа) вычисленные, когда волокна (не менее 200 волокон) моделировались одномерными конечными элементами. Результаты в третьей (50 волокон, 125000 конечных элементов) и четвертой (50 волокон, 1000000 элементов) колонках соответствуют случаю, когда волокна моделировались цилиндрами. Т. е. аппроксимацией цилиндров на кубической сетке. В последней колонке приведены экспериментальные значения.

Таблица 4: Модули Юнга, полученные численно

0.075	7.14	8.53	8.7	9.1
0.15	9.88	13.43	12.73	11
0.32	16.25	26.4	24.53	22

Из Таблицы 4 можно заметить, что значения модуля Юнга, полученные при моделировании волокна одномерными элементами, дают не слишком хорошее совпадение с экспериментальными результатами. Результаты, полученные при моделировании волокон на кубической сетке, дают явно лучшее совпадение для концентрации 32% при значительном числе элементов.

7. Заключение

В работе описаны некоторые примеры численного моделирования в механике композитов, которые могут представлять интерес для разработчиков пакета FIDESYS. При написании статьи использовалась финансовая поддержка РФФИ: грант № 15-01-05887-а.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015 — 400 с.
2. Победря Б.Е. Принципы вычислительной механики композитов // Механика композитных материалов. 1996. т.32. №6.
3. Победря Б.Е., Шешенин С.В. Некоторые приложения вычислительной механики композитов // В сборнике «Современные проблемы математики и механики», изд- во МГУ. 2009.
4. Бахвалов Н.С. , Панасенко Г.П. Осреднение структур с периодической структурой. М.: Наука, 1984.
5. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984.

6. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Под общ. ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2015. – 544 с
7. Хилл Р. Упругие свойства составных сред: некоторые теоретические принципы // Механика. Сб. переводов. 1964. № 5. С. 127-143.
8. Шешенин С.В. Осредненные модули одного композита // Вестник МГУ. 1980. №6. С. 79-83
9. Brandmair, Mueller W., Savenkova M., Sheshenin S. A multi-scale homogenization technique applied to the elastic properties of solders // Technische Mechanik. — 2011. — Vol. 31, no. 2. — P. 156–170.
10. Шешенин С., Савенкова М. Осреднение нелинейных задач в механике композитов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2012. № 5. С. 58–62.
11. Савенкова М.И., Шешенин С.В., Закалюкина И.М. Применение метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины // Вестник МГСУ. 2012, №9. – С. 156-164.
12. Шешенин С.В., Савенкова М.И., Об осреднении композитов при наличии нелинейности // Упругость и неупругость: дополнительные материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. – М.: Издательство Московского университета, 2012. – С. 260-269.
13. Ильюшин А.А. Пластичность. М. Наука. 1963.
14. Васин Р.А., Колтин Г.П., Шешенин С.В. О решении плоской задачи пластичности в случае сложного нагружения//Вестник Моск. Ун-та. №1.1986.
15. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях.// Известия АН. Механика твердого тела. 1997, № 4. - С.45-50.
16. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении.// Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. – С. 482–487.
17. Шешенин С. В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин// Известия Российской академии наук. МТТ.2006. №6. С.
18. Jones R.M. Mechanics of Composite Materials, 2nd ed. Philadelphia. L.:Taylor&Francis, 1998.

19. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический анализ слоистых пластин и пологих оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 161-171
20. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический метод получения уравнений теории пластин Рейсснера-Миндлина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2013. № 2, с. 65-67
21. Шешенин С.В., Скопцов К.А. Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений // Математическое моделирование и численные методы. № 2. С. 49-61.
22. Шешенин С.В. Трехмерное моделирование шины // МТТ.2007.3.
23. Новацкий В. Теория упругости. Мир. 1975.
24. Шешенин С.В., Закалюкина И.М., Скопцов К.А. Упругий потенциал резинородного монослоя // Вестник МГСУ. 2013. Том 11, с. 100-106.

REFERENCES

1. Morozov, E.M., Levin, V.A. & Vershinin, A.V. (2015), *Prochnostnoy analiz. FIDESIS v rukakh inzhenera* [Strength Analysis. FIDESIS in the Hands of an Engineer], URSS, Moscow, Russia.
2. Pobedrya, B.E. (1996), "Principles of Computational Mechanics of Composites", *Mechanics of Composite Materials*, vol. 32, no. 6, pp. 720-746.
3. Pobedrya B.E. & Sheshenin S.V. (2009), "Some Applications of Computational Composite Mechanics", *Sovremennyye problemy matematiki i mekhaniki* [Modern Problems of Mathematics and Mechanics], Izd. Moscow. Univ., Moscow, Vol. 2, Issue 2, pp. 3-10.
4. Bakhvalov, N.S. & Panasenko, G.P. (1984), *Osredneniye Sred s Periodicheskoy Strukturoy* [Homogenization of Media with Periodic Structure], Science Moscow, Russia.
5. Pobedrya, B.E. (1984), *Mekhanika kompozitsionnykh materialov*, [Mechanics of composite materials], Lomonosov Moscow Univ. Press, Moscow, Russia.
6. Levin, V.A. & sVershinin, A.V. (2015), "Nonlinear Computational Mechanics of Strength", *in Chislennyye metody. Parallel'nyye vychisleniya na EVM* [Numerical methods. Parallel computing], ed. V.A. Levin, Fizmatlit, Moscow, Russia.
7. Hill, R. (1964), "Elastic Properties of Composite Media: some theoretical principles", *Mechanics*, no. 5, pp. 127-143.

8. Sheshenin, S.V. (1980), “Averaged Modules of One Composite”, *Vestn. Moskovsk. univ. Ser. 1. Matem. mekhan* [Moscow Univ. Mech. Bulletin], no. 6, pp. 78-83.
9. Brandmair, A., Mueller, W., Savenkova, M.I. & Sheshenin, S.V. (2011), “A Multi-scale Homogenization Technique Applied to the Elastic Properties of Solders”, *Technische Mechanik*, vol. 31, no. 2, pp. 156–170.
10. Sheshenin, S.V. & Savenkova, M.I. (2012), “Homogenization of Nonlinear Problems in Composite Mechanics”, *Vestn. Moskovsk. univ. Ser. 1. Matem. Mekhan.* [Moscow Univ. Mech. Bulletin], no. 5. pp. 58-62.
11. Savenkova, M.I., Sheshenin, S.V., & Zakalyukina I.M. (2012), “Application of the Averaging Method to the Problem of Elastoplastic Plate Bending” , *Vestnik MGSU*, no. 9, pp. 156-164.
12. Sheshenin, S.V. & Savenkova M.I. (2012), “Averaging of the Nonlinear Composites”, *Elasticity and inelasticity, Additional materials*, Proc. of the Int. Sci. Symp. on the Problems of Solid Mech. dedicated to the 100th Anniv. of A.A. Ilyushin, Izd. Moscow. Univ., Moscow, pp. 260-269.
13. Ilyushin, A.A. (1963), *Plasticity*, Publ. House of the USSR Acad. of Sci., Moscow, USSR.
14. Vasin, R.A., Coltin, G.P. & Sheshenin, S.V. (1986), “On the Solution of the Plane Plasticity Problem in the Case of Complex Loading”, *Vestn. Moskovsk. univ. Ser. 1. Matem. Mekhan.* [Moscow Univ. Mech. Bulletin], No. 2, pp. 60-63.
15. Levin, V.A., Lokhin, V.V. & Zingerman, K.M. (1997), “On the Method for Estimating Effective Properties of Porous Solids at Large Strains” [Ob odnom sposobe otsenki effektivnykh kharakteristik poristyykh tel pri konechnykh deformatsiyakh], *Izvestiya RAN, MTT* [Mechanics of Solids], no. 4, pp.45-50.
16. Levin, V.A., Zingerman, K.M. (2002), “On the Construction of Effective Constitutive Laws for Porous Elastic Materials for Large Strains and their Imposition”, *Dokl. Acad. Nauk*, vol. 382, no. 4, pp. 482-487.
17. Sheshenin, S.V. (2006), “Asymptotic Analysis of the In-plane Periodic Plates”, *Izvestiya RAN. MTT* [Mechanics of Solids], no. 6, pp. 71-79.
18. Jones, R.M. (1998), *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., Taylor & Francis, Philadelphia, US.
19. Skoptsov, K.A. & Sheshenin, S.V. (2011), “Asymptotic Analysis of Laminated Plates and Shallow Shells”, *Izvestiya RAN. MTT* [Mechanics of Solids], no. 1, pp. 161-171.

20. Skoptsov, K.A. & Sheshenin, S.V. (2013), "Asymptotic Method for Deriving Equations of the Reissner-Mindlin Plate Theory", *Vestn. Moskovsk. univ. Ser. 1. Matem. Mekhan.* [Moscow Univ. Mech. Bulletin], no. 2, pp. 65-67.
21. Sheshenin, S.V. & Skoptsov, K.A. (2014), "The Theory of Plates Based on the Method of Asymptotic Expansions", *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metod* [Mathematical modeling and numerical methods], No. 2, pp. 49-61.
22. Sheshenin, S.V. (2007), "Three-Dimensional Modeling of the Tire" *Izvestiya RAN. MTT* [Mechanics of Solids], no. 3, pp. 13-21.
23. Novatsky, V. (1975), *Theory of Elasticity* [Teoria Sprezystoscy], Translated by B.E. Pobedria, Mir, Moscow, USSR.
24. Sheshenin, S.V., Zakalyukina, I.M. & Skoptsov, K.A. (2013), "Elastic Potential of Rubbercord Ply", *Vestnik MGSU*, no. 11. pp. 100-106.

Получено 22.05.2017

принято в печать 14.09.2017