ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511.9, 511.336

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИМИТИВНЫХ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ [1]

О. А. Горкуша (г. Хабаровск)

Аннотация

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — произвольная выпуклая область. Точка $(0,0)$ лежит внутри области или на границе. Граница $\partial\Omega$ области задана в полярных координатах функцией $r_\Omega(\theta)$ из C^3. Для произвольного $R \geqslant 1$ определим область $\Omega_R = \{(Rx, Ry)|(x,y) \in \Omega\}$ и множество

$$\mathcal{F}(\Omega, R) = \{A \in \Omega_R \cap \mathbf{Z}^2 | A = (x,y), \text{НОД}(x,y) = 1\}$$

— множество примитивных точек решетки $\mathbf{Z}^2$, лежащих в Ω_R. В работе мы изучаем совместное распределение длин отрезков, соединяющих начало координат и точки из $\mathcal{F}(\Omega, R)$. Мы получили асимптотическую формулу

$$\frac{\#\Phi(R)}{\#\mathcal{F}(\Omega,R)} = 2\int_0^\beta\!\!\int_0^\alpha [\alpha' + \beta' \geqslant 1] d\alpha' d\beta' + O\big(R^{-\frac{1}{3}}\log^{\frac{2}{3}} R\big),$$

где $[A] = 1$, если A — истинно, и $[A] = 0$, если A — ложно и для $\alpha, \beta \in [0,1]$ величина $\#\Phi(R)$ равна числу фундаментальных параллелограммов решетки $\mathbf{Z}^2$, у которых длины d_1, d_2 сторон не превосходят $\alpha \cdot R \cdot r_\Omega(\theta_1)$, $\beta \cdot R \cdot r_\Omega(\theta_2)$.

Ключевые слова: примитивные точки решетки, совместное распределение.

Библиография: 4 названия.

SIMULTANEOUS DISTRIBUTION OF PRIMITIVE LATTICE POINTS IN CONVEX PLANAR DOMAIN

O. A. Gorkusha (Khabarovsk)

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, (грант 14-01-90002 Бел-а).

Abstract

Let Ω denote a compact convex subset of R^2 which contains the origin as an inner point. Suppose that Ω is bounded by the curve $\partial\Omega$, parametrized by $x = r_\Omega(\theta)\cos\theta$, $y = r_\Omega(\theta)\sin\theta$, where r_Ω is continuous and piecewise C^3 on $[0, \pi/4]$. For each real $R \geqslant 1$ we consider the domain $\Omega_R = \{(Rx, Ry)|(x, y) \in \Omega\}$ and we consider $\mathcal{F}(\Omega, R) = \{A \in \Omega_R \cap \mathbf{Z}^2 | A = (x, y), \text{НОД}(x, y) = 1\}$ — integer lattice points from Q_R, which are visible from the origin. In this paper we study the simultaneous distribution for the lengths of the segments connecting the origin and a primitive lattice points from $\mathcal{F}(\Omega, R)$. Actually, we give an asymptotic formula

$$\frac{\#\Phi(R)}{\#\mathcal{F}(\Omega, R)} = 2\int_0^\beta\int_0^\alpha [\alpha' + \beta' \geqslant 1] d\alpha' d\beta' + O\big(R^{-\frac{1}{3}} \log^{\frac{2}{3}} R\big),$$

where $[A] = 1$, if A is true, $[A] = 0$, if A is false and for $\alpha, \beta \in [0, 1]$ the value $\#\Phi(R)$ is equal to the number of fundamental parallelograms of the lattice $\mathbf{Z}^2$ for which the lengths d_1, d_2 of the segments do not exceed $\alpha \cdot R \cdot r_\Omega(\theta_1)$, $\beta \cdot R \cdot r_\Omega(\theta_2)$.

Keywords: primitive lattice points, simultaneous distribution.

Bibliography: 4 titles.

1. Введение

Пусть на плоскости задана область Ω в полярных координатах

$$\Omega = \{(r, \varphi)|\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi/4\} \tag{1}$$

с непрерывной границей. Для любого вещественного числа $R \geqslant 1$ рассмотрим

$$\Omega_R = \{(Rx, Ry)|(x, y) \in \Omega\}$$

— гомотетию области Ω в R раз. Обозначим через $\mathcal{F}(\Omega, R)$ — множество примитивных целых точек из Ω_R и упорядочим элементы из этого множества таким образом, чтобы последовательность $\{\theta_j\}$ углов $\theta_j = \operatorname{arctg}(y_j/x_j)$, где (x_j, y_j) — элемент из $\mathcal{F}(\Omega, R)$, была возрастающей. Таким образом

$$\mathcal{F}(\Omega, R) = \left\{ A_j \in \Omega_R \cap \mathbf{Z}^2 \left| \begin{array}{l} A_j = (x_j, y_j), \text{НОД}(x_j, y_j) = 1, \\ \theta_j < \theta_{j+1}, 1 \leqslant j < N \end{array} \right.\right\}, \tag{2}$$

где N — число элементов множества $\mathcal{F}(\Omega, R)$. Точки A_j, A_{j+1} называются соседними, и лучи с началом в точке $(0, 0)$, проходящие через точки A_j, A_{j+1} также называют соседними.

В работе [1], опубликованной в 2000 году, решена задача о распределении элементов

$$\frac{N}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1), \ldots, \frac{N}{2\pi}(\theta_N - \theta_{N-1}). \tag{3}$$

Авторы доказали, что существует предельное распределение указанных элементов и получили явное представление этой величины. В 2009 году в статье [2, с. 176] автор заметил, что вопрос о распределении элементов (3) легко решается, если известно совместное распределение длин отрезков d_j, d_{j+1} $(1 \leqslant j < N)$, где $d_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$. Основной результат работы [2] — исследование совместного распределения d_j, d_{j+1} $(1 \leqslant j < N)$ в случае треугольной области:

Теорема 1. *Пусть Ω — треугольник, задаваемый равенством (1) с $r(\varphi) = \frac{1}{\cos(\varphi)}$. Тогда при любых вещественных числах $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\varphi_0 \in [0, \pi/4]$, $R \geqslant 2$ справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{\#\Phi(R)}{N_{\varphi_0}(R)} = \mathcal{I}(\alpha,\beta) + O\big(R^{-\frac{1}{2}}\log^3 R\big).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Phi(R) = \ & \Phi(R;\varphi_0,\alpha,\beta) = \\ = & \left\{ (A_j, A_{j+1}) \in \mathcal{F}^2(\Omega, R) \;\middle|\; \begin{array}{l} A_j = (x_j, y_j), 0 < j < \#\mathcal{F}(\Omega, R) \\ d_j \leqslant \alpha R r(\theta_j),\ d_{j+1} \leqslant \beta R r(\theta_{j+1}), \\ \theta_{j+1} \leqslant \varphi_0 \end{array} \right\},\end{aligned} \tag{4}$$

$$N_{\varphi_0}(R) = \sum_{j=0}^{N-1} [\theta_{j+1} \leqslant \varphi_0], \tag{5}$$

$$\mathcal{I}(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\beta}\int_0^{\alpha} [\alpha' + \beta' \geqslant 1] d\alpha' d\beta'. \tag{6}$$

Здесь и далее для некоторого утверждения A : $[A] = 1$, если A истинно, и $[A] = 0$ в противном случае.

Цель нашей работы — на основе подхода, предложенного в статье [2], доказать асимптотическую формулу о совместном распределении длин отрезков d_j, d_{j+1} $(1 \leqslant j < N)$ для области Ω, обладающей более слабыми ограничениями.

Пусть область Ω задается соотношением (1), функция $r(\varphi)$ — трижды дифференцируема на $[0, \varphi_0]$ и на этом интервале соответствующие ей функции

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$$

монотонны с условиями $x'(\varphi) \leqslant 0, y'(\varphi) \geqslant 0,\ |x'(\varphi)|, y'(\varphi) < \infty$, и функция $\Psi(\varphi)$, определяемая как

$$\Psi(\varphi) = x''(\varphi) - 2x'(\varphi)\tan\varphi, \tag{7}$$

такова, что $\Psi(\varphi), \Psi'(\varphi)$ одновременно не обращаются в нуль на $[0, \varphi_0]$. Тогда справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. *При указанных выше ограничениях на область Ω справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{\#\Phi(R)}{N_{\varphi_0}(R)} = \mathcal{I}(\alpha,\beta) + O\big(R^{-\frac{1}{3}}\log^{\frac{2}{3}} R\big),$$

где $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\varphi_0 \in [0,\pi/4], R \geqslant 2$ — произвольные вещественные числа и величины $\Phi(R), N_{\varphi_0}(R), \mathcal{I}(\alpha,\beta)$ определены соотношениями (4) – (6).

Замечание 1. *В частном случае, когда функция $\Psi(\varphi)$ не обращается в нуль на интервале $[0,\varphi_0]$, теорема 2 дает лучшую оценку остаточного члена — $O(R^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})$.*

Не упоминая каждый раз, будем считать дальше, что граница области Ω удовлетворяет условиям теоремы 2.

2. Нахождение $\#\Phi(R)$

Прежде рассмотрим другое описание множества $\Phi(R)$.

Утверждение 2. *Для любых соседних точек $A_j = (x_j, y_j)$ и $A_{j+1} = (x_{j+1}, y_{j+1})$ из $\mathcal{F}(\Omega, R)$ точка $(x_j + x_{j+1}, y_j + y_{j+1})$ не лежит в области Ω_R.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определения соседних точек из множества $\mathcal{F}(\Omega, R)$. $\square$

Утверждение 3. *Если $\alpha + \beta < 1$, то $\#\Phi(R) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha + \beta < 1$ и $\#\Phi(R) > 0$. Тогда для некоторых вещественных чисел $\alpha' \in (0,\alpha)$ и $\beta' \in (0,\beta)$ найдется пара точек $A_j = (x_j, y_j)$, $A_{j+1} = (x_{j+1}, y_{j+1})$ из $\mathcal{F}(\Omega, R)$ с условиями

$$\begin{aligned} x_j &= \alpha' R r(\theta_j)\cos\theta_j \quad , \quad x_{j+1} = \beta' R r(\theta_{j+1})\cos\theta_{j+1}, \\ y_j &= \alpha' R r(\theta_j)\sin\theta_j \quad , \quad y_{j+1} = \beta' R r(\theta_{j+1})\sin\theta_{j+1}. \end{aligned}$$

Положим $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y_j + y_{j+1}}{x_j + x_{j+1}}$. Из утверждения 1 следует неравенство

$$r(\theta) \leqslant \alpha r(\theta_j) + \beta r(\theta_{j+1}),$$

при этом $r(\theta) > \max\{r(\theta_j), r(\theta_{j+1})\}$. Эти ограничения выполняются только в случае $\alpha + \beta \geqslant 1$, что противоречит условию утверждения. $\square$

Определим множества $\mathcal{T}_+(R)$, $\mathcal{T}_-(R)$, $\mathcal{T}(R)$, состоящие из четверок неотрицательных чисел, следующим образом:

$$\mathcal{T}_+(R)=\left\{(P,P',Q,Q')\;\middle|\;\begin{array}{l} P'Q-PQ'=1,\ Q\leqslant Q',\ P'\leqslant Q'\tan\varphi_0,\\ (Q,P)\in\Omega_{\alpha R},\ (Q',P')\in\Omega_{\beta R},\\ (Q+Q',P+P')\notin\Omega_R\end{array}\right\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{T}_-(R)=\left\{(P,P',Q,Q')\;\middle|\;\begin{array}{l} P'Q-PQ'=-1,\ Q\leqslant Q',\ P\leqslant Q\tan\varphi_0,\\ (Q,P)\in\Omega_{\beta R},\ (Q',P')\in\Omega_{\alpha R},\\ (Q+Q',P+P')\notin\Omega_R\end{array}\right\}, \quad (9)$$

$$\mathcal{T}(R)=\mathcal{T}_-(R)\bigcup\mathcal{T}_+(R). \quad (10)$$

Лемма 1. $\#\Phi(R)=\#\mathcal{T}(R)$.

Доказательство. Сразу заметим, что из определений (8), (9) следует, что множества $\mathcal{T}_-(R)$, $\mathcal{T}_+(R)$ не пересекаются.

Пусть $A_j=(x_j,y_j)$, $A_{j+1}=(x_{j+1},y_{j+1})$ — соседние точки из множества $\mathcal{F}(\Omega,R)$ с $(A_j,A_{j+1})\in\Phi(R)$. Положим

$$(P,P',Q,Q')=\begin{cases}(y_j,y_{j+1},x_j,x_{j+1}), & \text{если } x_j\leqslant x_{j+1},\\ (y_{j+1},y_j,x_{j+1},x_j), & \text{если } x_j>x_{j+1}.\end{cases}$$

Из (1), (2), (4) и утверждения 1 следует, что $(P,P',Q,Q')\in\mathcal{T}(R)$, следовательно, $\#\Phi(R)\leqslant\#\mathcal{T}(R)$. С другой стороны, положив

$$(y_j,y_{j+1},x_j,x_{j+1})=\begin{cases}(P,P',Q,Q'), & \text{если } (P,P',Q,Q')\in\mathcal{T}_+(R),\\ (P',P,Q',Q), & \text{если } (P,P',Q,Q')\in\mathcal{T}_-(R),\end{cases}$$

получаем, что $A_j=(x_j,y_j)$, $A_{j+1}=(x_{j+1},y_{j+1})$ — соседние точки из $\mathcal{F}(\Omega,R)$ и пара (A_j,A_{j+1}) принадлежит $\Phi(R)$. Поэтому $\#\Phi(R)\geqslant\#\mathcal{T}(R)$. Лемма 1 доказана. □

Вычислим $\#\mathcal{T}_+(R)$. Предварительно сделаем замену переменных $q=Q'$, $u=P'$, $v=Q$ и следуя определению (8) множества $\mathcal{T}_+(R)$, получаем

$$\#\mathcal{T}_+(R)=\sum_{q<R}\sum_{u,v=1}^{q}\delta_q(uv-1), \quad (11)$$

где

$$\delta_q(uv-1)=\begin{cases}1, & \text{если } uv\equiv 1(\mod q),\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

— характеристическая функция делимости на q и

$$u\leqslant q\tan(\varphi_0),\ (q,u)\in\Omega_{\beta R},\ (vq,uv-1)\in\Omega_{\alpha qR},\ (q(q+v),u(q+v)-1)\notin\Omega_{qR}.$$

Так как область $\{(u,v)|(vq,uv-1)\in\Omega_{\alpha qR},\ (q(q+v),u(q+v)-1)\notin\Omega_{qR}\}$ ограничена линиями

$$\begin{aligned}\{(u,f_1(u))\}=&\quad\{(u,v)|v=\alpha Rx(t),\ u=q\tan(t)+\frac{1}{\alpha Rx(t)},\ t\in[0,\varphi_0]\},\\ \{(u,f_2(u))\}=&\quad\{(u,v)|v=Rx(t)-q,\ u=q\tan(t)+\frac{1}{Rx(t)},\ t\in[0,\varphi_0]\},\end{aligned}$$

то (11) перепишется следующим образом:

$$\#\mathcal{T}_+(R)=\sum_{q<R}\sum_{(q,u)\in\Omega_{\beta R}}\sum_{f_2(u)<v\leqslant\min\{q,f_1(u)\}}\delta_q(uv-1).$$

А если вместо функций $f_1(u),f_2(u)$ использовать функции $g_1(u,\alpha),g_2(u)$, определяемые как

$$\{(u,g_1(u,\alpha))\}=\quad\{(u,v)|v=\alpha Rx(t),\ u=q\tan(t),\ t\in[0,\varphi_0]\},\tag{12}$$

$$\{(u,g_2(u))\}=\quad\{(u,v)|v=Rx(t)-q,\ u=q\tan(t),\ t\in[0,\varphi_0]\},\tag{13}$$

то ошибка, получившаяся от этой замены, не превзойдет единицы. Поэтому

$$\begin{aligned}\#\mathcal{T}_+(R)&=S(R,\alpha,\beta)+O(1),\qquad(14)\\ S(R,\alpha,\beta)&=\sum_{q<R}\sum_{u\in I(q,\beta)}\sum_{g_2(u)<v\leqslant\min\{q,g_1(u,\alpha)\}}\delta_q(uv-1),\\ I(q,\beta)&=\{u\in(0,q]|\ (q,u)\in\Omega_{\beta R}\}.\end{aligned}$$

Для нахождения этой суммы нам потребуется оценка числа решений сравнения $uv\equiv 1(\mod q)$ в области $\{(u,v)|u\in(X_1,X_2],v\in(0,f(u)]\}$.

Лемма 2. *Пусть X_1,X_2,Y — вещественные неотрицательные числа, не превосходящие q. Тогда*

$$\sum_{u\in(X_1,X_2]}\sum_{v\in(0,Y]}\delta_q(uv\pm 1)=\frac{Y}{q}\sum_{\substack{u\in(X_1,X_2]\\ \text{НОД}(q,u)=1}}1+O(R_1[q]),$$

где

$$R_1[q]\ll\sigma(q)\log^2(q+1)\sqrt{q},$$

$\sigma(q)=\sum_{d|q}1$ *— сумма делителей числа q.*

Лемма 3. *Пусть на отрезке $[X_1,X_2]$ $(0\leqslant X_1,X_2\leqslant q)$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ имеет две производные и для некоторых $A>0,w\geqslant 1$*

$$\frac{1}{A}\ll|f''(x)|\ll\frac{w}{A}.$$

Тогда

$$\sum_{u\in(X_1,X_2]}\sum_{0<v\leqslant f(u)}\delta_q(uv\pm 1)=\frac{1}{q}\sum_{\substack{u\in(X_1,X_2]\\ \text{НОД}(q,u)=1}}f(u)+O(R_2[q,A,X_2-X_1]),$$

где

$$R_2[q,A,X]\ll_w \sigma^{\frac{2}{3}}(q)XA^{-\frac{1}{3}}+X^{\varepsilon}(\sqrt{A}+\sqrt{q}).$$

Доказательство. Доказательство леммы 2 и леммы 3 см. в [3]. □

Теперь обратимся к (14). Запишем $S(R,\alpha,\beta)$ в виде

$$S(R,\alpha,\beta)=S_1'(R,\alpha,\beta)+S_1''(R,\alpha,\beta)-S_2(R,\alpha,\beta), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
S_1'(R,\alpha,\beta) &= \sum_{q\leqslant R}\sum_{u\in I'(q,\alpha,\beta)}\sum_{v\in(0,q]}\delta_q(uv-1),\\
S_1''(R,\alpha,\beta) &= \sum_{q\leqslant R}\sum_{u\in I''(q,\alpha,\beta)}\sum_{v\in(0,g_1(u,\alpha)]}\delta_q(uv-1),\\
S_2(R,\alpha,\beta) &= \sum_{q\leqslant R}\sum_{u\in I'(q,\alpha,\beta)\cup I''(q,\alpha,\beta)}\sum_{v\in(0,g_2(u)]}\delta_q(uv-1).
\end{aligned}$$

Здесь отрезки $I'(q,\alpha,\beta), I''(q,\alpha,\beta)$ определяются так:

$$\begin{aligned}
I'(q,\alpha,\beta) &= \{u\in I(q,\beta)|g_2(u)<q\leqslant g_1(u,\alpha)\},\\
I''(q,\alpha,\beta) &= \{u\in I(q,\beta)|g_2(u)<g_1(u,\alpha)\leqslant q\}.
\end{aligned}$$

Используя лемму 2 и оценку $\sum_{q<R}\sigma(q)\ll R\log R$, вычислим

$$S_1'(R,\alpha,\beta)=\sum_{q<R}\frac{1}{q}\sum_{\substack{u\in I'(q,\alpha,\beta)\\ \text{НОД}(q,u)=1}}q+O\big(R^{\frac{3}{2}}\log^3 R\big). \tag{16}$$

Относительно исследования двух других сумм $S_1''(R,\alpha,\beta)$ и $S_2(R,\alpha,\beta)$ мы должны принять во внимание то, что для фиксированного натурального числа q вторые производные функций $g_1(u,\alpha)$ и $g_2(u)$ могут обращаться в нуль в интервалах суммирования $I''(q,\alpha,\beta)$ и $I'(q,\alpha,\beta)\cup I''(q,\alpha,\beta)$.

Лемма 4. *Для сумм $S_1''(R,\alpha,\beta)$ и $S_2(R,\alpha,\beta)$ справедливы асимптотические формулы*

$$\begin{aligned}
S_1''(R,\alpha,\beta) &= \sum_{q<R}\frac{1}{q}\sum_{\substack{u\in I''(q,\alpha,\beta)\\ \text{НОД}(q,u)=1}}g_1(u,\alpha)+O\big(R^{2-\frac{1}{3}}\log^{\frac{2}{3}}R\big),\\
S_2(R,\alpha,\beta) &= \sum_{q<R}\frac{1}{q}\sum_{\substack{u\in I'(q,\alpha,\beta)\cup I''(q,\alpha,\beta)\\ \text{НОД}(q,u)=1}}g_2(u,\alpha)+O\big(R^{2-\frac{1}{3}}\log^{\frac{2}{3}}R\big).
\end{aligned}$$

Доказательство. Мы докажем утверждение для $S_1''(R,\alpha,\beta)$, поскольку для $S_2(R,\alpha,\beta)$ доказательство проводится так же.

Из (12) следует, что

$$g_1''(u,\alpha)=\frac{\alpha R}{q^2}\cos^4(t)\Psi(t),\ t=\operatorname{arctg}\big(\frac{u}{q}\big),$$

где функция $\Psi(t)$ определена соотношением (7). $\Psi(t)$ может обращаться в нуль только в конечном числе точек. Для простоты будем считать, что равенство $\Psi(t)=0$ выполняется только в одной точке — обозначим эту точку через t_0, а соответствующее значение переменной u через u_0.

Если $t_0\notin(0,\varphi_0]$, то к внутренним двум суммам по переменным u и v величины $S_1''(R,\alpha,\beta)$ можно применить лемму 3 с $A=\frac{q^2}{R}$. Следовательно,

$$S_1''(R,\alpha,\beta)=\sum_{q<R}\frac{1}{q}\sum_{\substack{u\in I''(q,\alpha,\beta)\\ \text{НОД}(q,u)=1}} g_1(u,\alpha)+O\big(R^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\big), \tag{17}$$

так как

$$\sum_{q<R}R_2\bigg[q,\frac{q^2}{R},q\bigg]\ll R^{\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

Для этого случая лемма доказана.

Пусть теперь $t_0\in(0,\varphi_0]$. Положим

$$u_{max}=\max_{u\in I''(q,\alpha,\beta)}\{u\},\ k=[\log_2 u_{max}],$$
$$S(q,J)=\sum_{\substack{u\in J\\ u\in I''(q,\alpha,\beta)}}\ \sum_{v\in(0,g_1(u,\alpha)]}\delta_q(uv-1),$$

где J — интервал изменения переменной u.

Разделим интервал $(0,u_{max}]$ на интервал

$$J^{(0)}=(u_0-\Delta q,u_0+\Delta q]\bigcap I''(q,\alpha,\beta),$$

который может быть пустым и на интервалы J_i $(1\leqslant i\leqslant k+1)$ вида

$$J_i=\begin{cases}(2^{i-1},2^i]\bigcap I''(q,\alpha,\beta), & \text{если } J^{(0)}=\emptyset,\\ (2^{i-1},2^i]\bigcap I''(q,\alpha,\beta)\backslash(J^{(0)}\bigcap(2^{i-1},2^i]), & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

часть из которых также могут быть пустыми. При этом $0<\Delta<1$ — пока любое вещественное число, не зависящее от q. С учетом этого представим сумму $S_1''(R,\alpha,\beta)$ в виде

$$S_1''(R,\alpha,\beta)\ =\ \sum_{q<R}\sum_{1\leqslant i\leqslant k+1}S(q,J_i)+\sum_{q<R}S(q,J^{(0)}).$$

Из множества интервалов $\{J_i\}_{i=1}^{k+1}$ выделим интервалы, которые граничат с $J^{(0)}$, таковые обозначим через $J^{(1)}, J^{(2)}$. К $S(q, J^{(0)})$ применим лемму 2, заменив функцию $g_1(u,\alpha)$ на отрезке суммирования по переменной u константой, равной $g_1(u_0 - \Delta q, \alpha)$, и учтем ошибку, полученную при такой замене, не превосходящую $R\Delta^2$. К остальным суммам применим лемму 3, полагая

$$A = \frac{q^2}{R}\begin{cases} \Delta^{-1} & \text{— для } J^{(1)}), J^{(2)}, \\ q \cdot 2^{-i} & \text{— для } J_i, \text{ не совпадающего с } J^{(1)}, J^{(2)}. \end{cases}$$

В результате мы получим

$$S_1''(R,\alpha,\beta) = \sum_{q<R} \frac{1}{q} \sum_{\substack{u \in I''(q,\alpha,\beta) \\ \text{НОД}(q,u)=1}} g_1(u,\alpha) + O(R''),$$

где

$$R'' = R_1'' + R_2'', \tag{18}$$

$$R_1'' \ll \sum_{q<R} R_1[q] + \sum_{q<R} R\Delta^2, \tag{19}$$

$$R_2'' \ll \sum_{q<R}\sum_{i<\log q} R_2\left[q, \frac{q^3}{R\cdot 2^i}, 2^i\right] + \sum_{q<R} R_2\left[q, \frac{q^2}{R\Delta}, \Delta\right]. \tag{20}$$

Первое слагаемое в правой части (19) равно $O(R^{\frac{3}{2}} \log^3 R)$, а второе — $O(R^2\Delta^2)$. Оценим R_2''. Используя лемму 3, представим правую часть (20) как сумму трех слагаемых Σ_1, Σ_2, Σ_3 :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{q<R}\sum_{i<\log q} \sigma^{\frac{2}{3}}(q) 2^i \left(\frac{R\cdot 2^i}{q^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \sum_{q<R} \sigma^{\frac{2}{3}}(q)\Delta\left(\frac{R\Delta}{q^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \Sigma_2 &= \sum_{q<R}\sum_{i<\log q} 2^{\varepsilon i}\sqrt{\frac{q^3}{R\cdot 2^i}} + \sum_{q<R}\Delta^{\varepsilon}\sqrt{\frac{q^2}{R\Delta}}, \\ \Sigma_3 &= \sum_{q<R}\sum_{i<\log q} 2^{\varepsilon i}\sqrt{q} + \sum_{q<R}\Delta^{\varepsilon}\sqrt{q}, \end{aligned}$$

и последовательно вычислим каждое из них.

Сумму Σ_1 можно упростить на основании того, что второе слагаемое в ней меньше первого, поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\ll R^{\frac{1}{3}} \sum_{q<R} \sigma^{\frac{2}{3}}(q) q^{-1} \sum_{i<\log q} 2^{\frac{4}{3}i} \ll R^{\frac{1}{3}} \sum_{q<R} \sigma^{\frac{2}{3}}(q) q^{\frac{1}{3}} \ll \\ &\ll R^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{q<R}\sigma(q)\right)^{\frac{2}{3}} \left(\sum_{q<R} q\right)^{\frac{1}{3}} \ll R^{1+\frac{2}{3}} \log^{\frac{2}{3}} R. \end{aligned}$$

По этой же причине в сумме Σ_2 достаточно рассмотреть только первое слагаемое, при этом суммировать по тем индексам q и i, для которых $\frac{q^3}{R\cdot 2^i} \geqslant 1$. Поскольку на всех полуинтервалах J_i с $1 \leqslant i \leqslant k+1$ имеет место ограничение $g''(u) \gg \frac{R\cdot\Delta}{q^2}$, то $\frac{R\cdot 2^i}{q^3} \gg \frac{R\cdot\Delta}{q^2}$. Отсюда

$$\Sigma_2 \ll \sum_{q<R}\sum_{i<\log q} 2^{\varepsilon i}\sqrt{\frac{q^3}{R\cdot 2^i}} \ll \sum_{q<R}\sum_{i<\log q} 2^{\varepsilon i}\sqrt{\frac{q^2}{R\cdot\Delta}} \ll$$
$$\ll R^{-\frac12}\Delta^{-\frac12}\sum_{q<R} q^{1+\varepsilon} \ll R^{\frac32+\varepsilon}\Delta^{-\frac12}.$$

Так как $\Sigma_3 \ll R^{\frac32+\varepsilon}$, то мы заключаем, что $R_2'' \ll R^{1+\frac23}\log^{\frac23} R + R^{\frac32+\varepsilon}\Delta^{-\frac12}$, и возвращаясь к (18), получаем оценку остаточного члена для $S_1''(R,\alpha,\beta)$:

$$R'' \ll R^{\frac32}\log^3 R + R^2\Delta^2 + R^{1+\frac23}\log^{\frac23} R + R^{\frac32+\varepsilon}\Delta^{-\frac12}.$$

Выберем теперь Δ так, чтобы $R^2\Delta^2 \asymp R^{\frac32+\varepsilon}\Delta^{-\frac12}$, то есть $\Delta = R^{-\frac{1-2\varepsilon}{5}}$. Тогда $R'' \ll R^{1+\frac23}\log^{\frac23} R$, из чего следует утверждение леммы. $\square$

Обозначим $F(u,q,\alpha) = \min\{q, g_1(u,\alpha)\} - g_2(u)$. Согласно (15), (16) и лемме 4, сумма $S(R,\alpha,\beta)$ имеет вид

$$S(R,\alpha,\beta) = \sum_{q<R}\frac1q \sum_{\substack{u\in I(q,\beta)\\ \text{НОД}(q,u)=1}} F(u,q,\alpha) + O\big(R^{2-\frac13}\log^{\frac23} R\big). \tag{21}$$

Из (12), (13) следует равенство

$$\frac1q \sum_{\substack{u\in I(q,\beta)\\ \text{НОД}(q,u)=1}} F(u,q,\alpha) = \frac1q\sum_{\delta|q}\mu(\delta)\sum_{\substack{u\in I(q,\beta)\\ \delta|u}} F(u,q,\alpha),$$

где $\mu(\delta)$ — функция Мёбиуса. А так как

$$\sum_{\substack{u\in I(q,\beta)\\ \delta|u}} F(u,q,\alpha) = \frac1\delta\int_0^q [u\in I(q,\beta)]F(u,q,\alpha)du + O(q),$$

и согласно определений (12), (13)

$$\int_0^q [u\in I(q,\beta)]F(u,q,\alpha)du =$$
$$= q^2\int_0^1\int_0^1\left[t\leqslant \min\{t_q,\varphi_0\}, v\in\left(\frac Rq x(t)-1, \alpha\frac Rq x(t)\right]\right]dv\,d\tan(t),$$

где величина t_q задается соотношением $q = \beta R x(t_q)$, то главный член в (21), который мы обозначим через $S^*(R,\alpha,\beta)$ можно написать в виде

$$S^*(R,\alpha,\beta) = \sum_{\delta<R}\mu(\delta)S'\left(\frac R\delta\right), \tag{22}$$

где

$$S'(R) = \sum_{q<R} q \int_0^1 \int_0^1 \left[t \leqslant t_q, t \leqslant \varphi_0, \frac{R}{q}x(t) - 1 < v \leqslant \alpha \frac{R}{q}x(t) \right] dv d\tan(t).$$

Здесь мы учли, что остаток $\sum_{q<R} \frac{1}{q} \sum_{\delta|q} q \ll R \log R$ меньше остаточного члена в (21).

При вычислении $S'(R)$ изменим порядок суммирования и интегрирования, затем полученную внутреннюю сумму заменим интегралом. От такой замены возникает ошибка самое большее R. В итоге находим

$$S'(R) =$$
$$= R^2 \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} x^2(t) d\tan(t) \int_0^1 \left[\frac{1}{\beta} - 1 < v < \frac{\alpha}{1-\alpha} \right] \left(\min\left\{ \frac{\alpha^2}{v^2}, \beta^2 \right\} - \frac{1}{(v+1)^2} \right) dv +$$
$$+ O(R).$$

Интегрируя с учетом утверждения 2, получаем $S'(R) = R^2 S_\Omega \cdot I(\alpha, \beta) + O(R)$, где

$$I(\alpha, \beta) = [\alpha + \beta \geqslant 1] \cdot [\beta \geqslant 1/2] \cdot \begin{cases} (\alpha + \beta - 1)^2, & \text{если } \alpha \leqslant 1/2, \\ 2(\beta - 1/2)^2 - (\alpha - \beta)^2, & \text{если } 1/2 < \alpha \leqslant \beta, \\ 2(\beta - 1/2)^2, & \text{если } \alpha > \beta, \end{cases}$$

и S_Ω — площадь области Ω. Отсюда и из (14), (21), (22) следует асимптотическая формула для $\#\mathcal{T}_+(R)$:

$$\#\mathcal{T}_+(R) = \frac{R^2}{\zeta(2)} S_\Omega \cdot I(\alpha, \beta) + O\big(R^{2-\frac{1}{3}} \log^{\frac{2}{3}} R\big),$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Для нахождения асимптотической формулы для $\#\mathcal{T}_-(R)$, применим соотношение, подобное (11). В результате получим

$$\#\mathcal{T}_-(R) = \sum_{q<R} \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv + 1),$$

при этом

$$u \leqslant q\tan(\varphi_0) - 1/v, \ (q, u) \in \Omega_{\alpha R}, \ (vq, uv - 1) \in \Omega_{\beta q R}, \ (q(q+v), u(q+v) - 1) \notin \Omega_{qR}.$$

Согласно (12)—(14) $T_-(R) = S(R, \beta, \alpha) + O(R)$, из чего следует, что

$$\#T_-(R) = \frac{R^2}{\zeta(2)} S_\Omega \cdot I(\beta, \alpha) + O\big(R^{2-\frac{1}{3}} \log^{\frac{2}{3}} R\big).$$

И последнее, замечая равенство $I(\alpha, \beta) + I(\beta, \alpha) = \mathcal{I}(\alpha, \beta)$ и учитывая лемму 1, получаем соотношение для $\#\Phi(R)$:

$$\#\Phi(R) = \frac{R^2}{\zeta(2)} S_\Omega \cdot \mathcal{I}(\alpha, \beta) + O\big(R^{2-\frac{1}{3}} \log^{\frac{2}{3}} R\big). \tag{23}$$

3. Доказательство теоремы 2

Теорема следует из (23) и из асимптотической формулы для $\#\mathcal{F}(\Omega, R)$:

$$\begin{aligned}
\#\mathcal{F}(\Omega, R) &= \sum_{\substack{(x,y)\in F(\Omega,R)\\ \text{НОД}(x,y)=1}} 1 = \sum_{(x,y)\in F(\Omega,R)} \sum_{\delta|\text{НОД}(x,y)} \mu(\delta) = \\
&= \sum_{\delta<R} \mu(\delta) \sum_{(x,y)\in F(\Omega,R/\delta)} 1 = \\
&= R^2 \cdot S_\Omega \sum_{\delta<R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} + O(R\log(R)) = \frac{R^2}{\zeta(2)} \cdot S_\Omega + O(R\log(R)).
\end{aligned}$$

4. Заключение

В основе результата работы лежат асимптотические свойства решений уравнения $PQ' - P'Q = 1$. Наличие оценок на суммы Клостермана (см. обзор [4]) позволяет находить асимптотические формулы для сумм вида (11). Важным продолжением этой работы может послужить нахождение асимптотических формул для среднего числа подходящих дробей различных классов непрерывных дробей, связанных с областью Ω.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boca F. P., Cobeli C., Zaharescu A. Distribution of lattice points visible from the origin // Comm. Math. Phys. 2000. Vol. 20. P. 433–470.

2. А. В. Устинов О распределении точек целочисленной решетки // Дальневосточный математический журнал. 2009. Т. 9, № 1–2. С. 176–181.

3. А. В. Устинов О числе решений сравнения $xy \equiv l(modq)$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 5. С. 186–216.

4. D Heath-Brown. Arithmetic applications of Klosterman sums. *Neiuw Arch. Wiskd., 5/1,2000, 380–384*

REFERENCES

1. Boca, F. P., Cobeli, C. & Zaharescu, A. 2000, "Distribution of lattice points visible from the origin." , *Comm. Math. Phys.*, Vol. 20, p. 433–470.

2. Ustinov, A., 2009, "On the distribution of integer points." , *Far Eastern Mathematical Journal.* Vol. 9, № 1–2, *Khabarovsk*, p. 176–181.

3. Ustinov, A., 2009, "On the number of solutions of the congruence $xy = l(modq)$." , *St. Petersburg Mathematical Journal*. Vol. 20, no. 5, *St. Petersburg*, p. 813–836.

4. D Heath-Brown. Arithmetic applications of Klosterman sums. *Neiuw Arch. Wiskd., 5/1,2000, 380–384*

Хабаровское отделение ИПМ ДВО РАН
Поступило 25.02.2015