

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 3

УДК 519.63

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-423-438

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ
И ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ
В АРКТИЧЕСКОЙ ЗОНЕ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**И. Б. Петров¹**Аннотация**

В данной работе рассматриваются вопросы численного моделирования динамических задач Арктической зоны на высокопроизводительных вычислительных системах. Физические размеры области интегрирования в такого рода задачах могут достигать десятков и сотен километров. Для корректного моделирования распространения волновых возмущения на такие расстояния требуются высокоточные численные методы с учетом волновых свойств решаемых уравнений, а также возможностью моделирования сложных динамических процессов в неоднородных геологических средах с множеством контактных и свободных границ. В качестве такого численного метода в работе используется сеточно-характеристический метод [1] для численного решения систем уравнений механики деформируемого твердого тела. Данный метод позволяет использовать монотонные разностные схемы повышенного порядка точности [2], строить корректные численные алгоритмы на границах областей интегрирования и на контактных границах [3]. Для некоторых задач сейсмологии данный метод уже применялся в двумерном случае [4], в данной работе моделирование проводилось в трехмерной постановке. Отметим, что сеточно-характеристический метод был успешно опробован для численного решения задач в таких областях прикладной науки, как гидроаэродинамика, динамика плазмы, механика деформируемого твердого тела и разрушения, вычислительная медицина. Примеры его применения в различных приложениях описаны в работе [1].

Ключевые слова: численные методы, механика сплошных сред, механика льда, сейсморазведка, Арктика.

Библиография: 15 название.

¹Петров Игорь Борисович, член-корреспондент Российской академии наук, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики Московского физико-технического института, petrov@mipt.ru

NUMERICAL PROBLEMS OF THE MODELING OF NATURAL AND INDUSTRIAL PROCESSES IN THE ARCTIC ZONE OF THE RUSSIAN FEDERATION

I. B. Petrov (Moscow)

Abstract

In this work questions of numerical modeling of dynamic problems of the Arctic zone on high-performance computing systems are considered. The physical sizes of field of integration in such tasks can reach tens and hundreds of kilometers. For correct modeling of distribution wave indignations on such distances are required high-precision numerical methods taking into account wave properties of the solvable equations and also a possibility of modeling of difficult dynamic processes in non-uniform geological environments with a set of contact and free borders. As such numerical method in work the net and characteristic method [1] to the numerical solution of systems of the equations of mechanics of a deformable solid body is used. This method allows to use monotonous differential schemes of the raised order of accuracy [2], to build correct numerical algorithms on borders of fields of integration and on contact borders [3]. This method was already applied to some problems of seismicity in a two-dimensional case [4], in this work modeling was carried out in three-dimensional statement. We will mark that the grid and characteristic method was successfully tested for the numerical decision of tasks in such fields of applied science as hydroaerodynamics, dynamics of plasma, the mechanic of a deformable solid body and corrupting, computing medicine. Examples of its application are described in different appendices in operation [1].

Keywords: numerical methods, mechanics of continuous environments, mechanics of ice, seismic exploration, Arctic.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Для корректного задания больших областей моделирования, требуются использовать трехмерные расчетные сетки, с достаточным количеством узлов. Вычисления на таких сетках требуют больших затрат процессорного времени и ресурсов памяти ЭВМ, для ускорения процесса расчета в работе применена технология MPI [5], что позволяет работать программе на больших сетках (до 1 млрд. узлов).

Сформулируем основные уравнения линейной динамической теории упругости, которым подчиняется состояние бесконечно малого объема линейно-упругой среды. Рассмотрим нестационарные уравнения теории упругости для случая трех переменных, в некоторой ортонормированной системе координат (x_1, x_2, x_3) :

$$\begin{aligned}\rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij}, \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + F_{ij}.\end{aligned}\tag{1}$$

здесь ρ – плотность среды, v_i – компоненты вектора скорости смещения, σ_{ij} и ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений Коши и деформации, ∇_j – ковариантная производная по j -й координате, F_{ij} – добавочная правая часть. Вид компонент тензора q_{ijkl} 4-го порядка определяется реологией среды. Для линейно-упругого случая они имеют вид:

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

В этом соотношении, которое обобщает закон Гука, λ и μ – параметры Ляме, а δ_{ij} – символ Кронекера.

Первая строка в системе уравнений (1) представляет три уравнения движения, вторая — шесть реологических соотношений.

Вектор искоемых функций, состоящий из 9-ти компонент имеет вид:

$$\mathbf{u} = \{v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\}^T.$$

2. Основная часть

Перечисленные модели твердого тела допускают запись системы уравнений (1) динамики деформируемого твердого тела в матричном виде [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j},\tag{2}$$

где $\mathbf{A}_j$ – матрицы размера 9×9 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \\
\mathbf{A}_2 &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \\
\mathbf{A}_3 &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

Данная запись является канонической формой записи системы уравнений, принятой в вычислительной математике для построения сеточно-характеристических разностных схем. Система уравнений (2) является гиперболической, поэтому каждая из матриц $\mathbf{A}_j$ имеет девять вещественных собственных значений и базис из собственных векторов.

Для численного моделирования задач динамики деформируемого твердого тела широко применяется сеточно-характеристический метод [1, 6]. Вначале применяется методы расщепления по пространственным координатам, в результате чего имеем три одномерных системы:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Каждая из этих систем является гиперболической и обладает полным набором собственных векторов с действительными собственными значениями,

поэтому каждую из систем можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Omega_j^{-1} \Lambda_j \Omega_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j},$$

где матрица Ω_j — матрица составленная из собственных векторов, Λ_j — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения. Для всех координат матрица Λ имеет вид:

$$\Lambda = \text{diag} \{c_p, -c_p, c_s, -c_s, c_s, -c_s, 0, 0, 0\},$$

где $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — продольная скорость звука в среде, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ — поперечная скорость звука.

После замены переменных $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{u}$ каждая из систем (3) распадается на девять независимых скалярных уравнений переноса (индекс j далее опускается, где это возможно):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0.$$

Одномерные уравнения переноса решаются с помощью метода характеристик, либо обычными конечно-разностными схемами.

После того, как все компоненты $\mathbf{v}$ перенесены, восстанавливается само решение:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \Omega^{-1} \mathbf{v}^{n+1}.$$

В данной работе использовались TVD-разностные схемы [7] 2-го порядка точности. В программе реализовано 15 различных лимитеров [8], в расчетах в основном использовался ограничитель superbee, предложенный в [9]:

$$\varphi_{ab}(r) = \max [0, \min (2r, 1) \min (r, 2)].$$

Также использовались сеточно-характеристические монотонные разностные схемы, принцип построения которых описан в [2]. В программе реализованы схемы 2-4 порядка точности, большинство расчетов проводилось используя схему 4-го порядка точности.

Приведем ее для численного решения одномерного линейного уравнения упругости $u_t + \lambda u_x = 0, \sigma = \lambda \tau / h$:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_m^n - \sigma (\Delta_1 - \sigma (\Delta_2 - \sigma (\Delta_3 - \sigma \Delta_4))), \\ \Delta_1 &= \frac{1}{24} (-2u_{m+2}^n + 16u_{m+1}^n - 16u_{m-1}^n + 2u_{m-2}^n), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{24} (-u_{m+2}^n + 16u_{m+1}^n - 30u_m^n + 16u_{m-1}^n - u_{m-2}^n), \\ \Delta_3 &= \frac{1}{24} (2u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 4u_{m-1}^n + 4u_m^n - 2u_{m-2}^n), \\ \Delta_4 &= \frac{1}{24} (u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n - 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n). \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу о соударении стальной и ледовой пластин. Толщина ударника 0.1, толщина пластины 1, скорость ударника 0.003, нижняя граница — свободная (безразмерные единицы). Из экспериментов известен эффект тыльного откола: при ударе по плите с одной стороны, происходит откол материала с обратной. С физической точки зрения, откол происходит, когда

фронт отраженной от задней границы волны встречается с задним фронтом падающей волны. Таким образом, толщина откольной тарелки равняется половине длины волны. При такой конфигурации удара длина волны составляет удвоенную ширину ударника. Следовательно, толщина откола должна в точности совпадать с шириной ударника. Этот эффект используется для тестирования метода расчета разрушений. Как видно из рис. 1,2, результаты численного моделирования хорошо соотносятся с экспериментальными данными.



Рис. 1: Нормальный удар пластины в разные моменты времени. Черными линиями отмечены образовавшиеся трещины, белыми — изолинии скоростей. Насыщенность цвета соответствует также модулям скоростей.

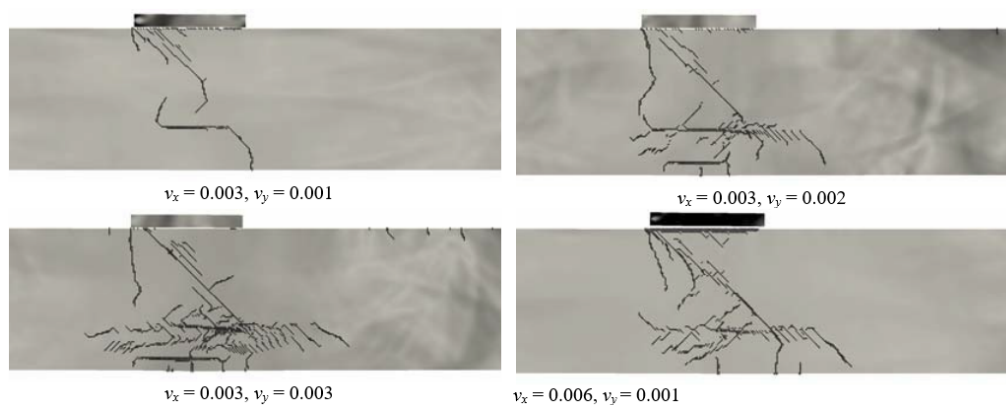


Рис. 2: Удар с различными скоростями и под различными углами. Компоненты скоростей ударника подписаны к каждому рисунку. Динамический контакт — условие слипания.

Некоторые параметры моделей механики сплошных сред, описывающей прочностные характеристики льда, затруднительно установить из натурных экспериментов непосредственным образом. Однако, проведя численный эксперимент, их можно связать с макроскопическими параметрами, поддающимися измерению. Одним из таких макроскопических параметров является

прочность льда на одноосное сжатие, по факту определяемая такими микроскопическими параметрами, как предел текучести, предел прочности на растяжение и деформация разрушения. Для численного моделирования эксперимента по измерению прочности льда на одноосное сжатие выбрана постановка со сдавливанием ледяного куба с постоянной скоростью движения плиты пресса, где измеряется зависимость приложенной нагрузки от осевого смещения, а также характер разрушения образца. В качестве исходных физико-механических параметров льда взяты данные из таблицы. Геометрия ледяного образца представляет собой куб со стороной 15 см, параллельные плитам пресса, грани которого сжимаются с постоянной скоростью 10 см/с. Данная задача решается как в двумерной, так и в трехмерной постановке, поскольку в двумерной постановке оказывается нагляднее сравнивать картину разрушений, а в трехмерной – численные значения получающихся нагрузок. В результате моделирования получаются следующие характерные картины разрушений (см. рис. 3).

В то время как внешняя картина разрушений достаточно наглядна и легко поддается качественному сравнению с натурным экспериментом, картина внутренних разрушений достаточно сложна и более подробно ее структуру можно видеть в разрезе (рис. 4).

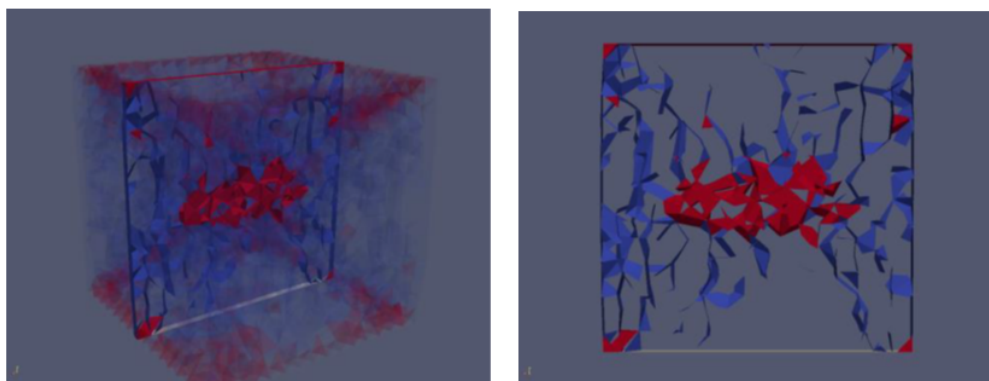


Рис. 3: Сечение картины разрушений ледяного образца.

Полученную картину разрушений можно качественно сравнить с натурными экспериментами, проведенными в аналогичных условиях (рис. 4).

Стоит отметить, что, несмотря на существенно отличающиеся картины разрушения в натурных экспериментах даже при, казалось бы, схожих начальных условиях, в них наблюдаются общие характерные черты, качественно согласующиеся с характером трещин в численных экспериментах:

- снаружи преобладают вертикальные трещины, образовавшиеся в результате локальных растяжений;
- наименее подвержены разрушению конические области, находящиеся в непосредственном контакте с прессом;
- внутри образца преобладает объемное разрушение, в результате чего лед крошится в мелкую крошку [10].



Рис. 4: Картины разрушения ледяного образца в натуральных экспериментах.

Задача соударения льдины с неподвижной опорой является важной практической задачей. В данной работе исследована зависимость глобальной нагрузки на неподвижную опору от физико-механических параметров льда. Это важно, так как физико-механические характеристики льда могут меняться в зависимости от температуры, солёности и других параметров. Поскольку для такого анализа необходимо провести большое количество численных экспериментов, варьируя различные параметры, и, следовательно, такое исследование может быть ресурсозатратным, была выбрана двумерная постановка. Характер глобальной нагрузки в трехмерной постановке останется тем же [11] (рис 5).

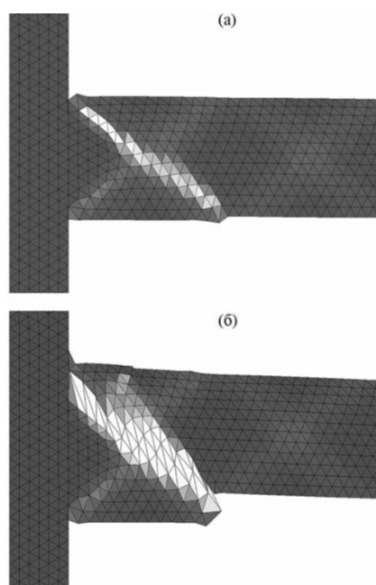


Рис. 5: Характерные картины разрушений ледяного образования. Цветом показана величина работы пластической деформации.

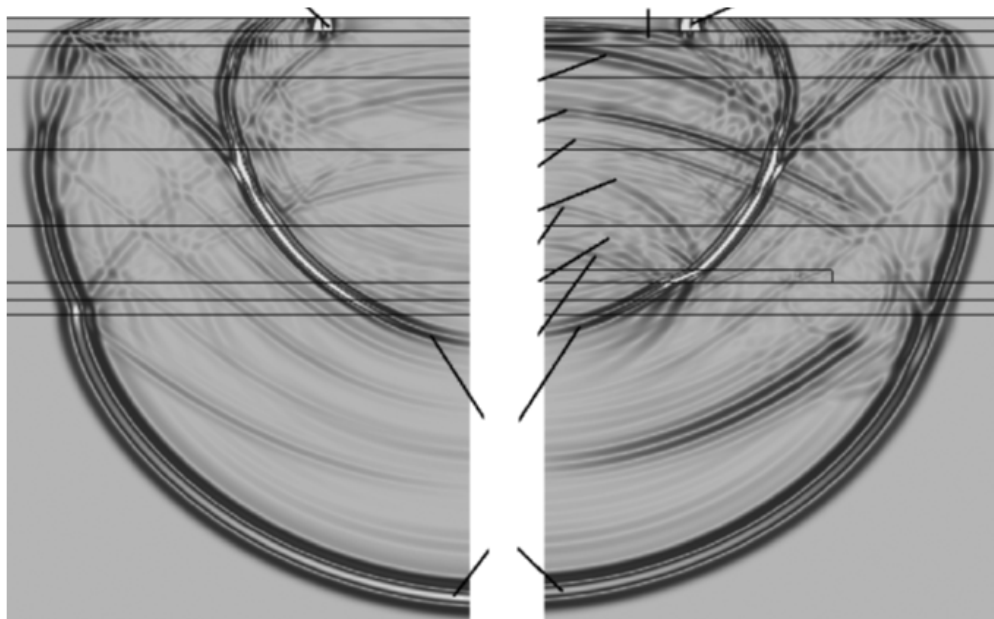


Рис. 6: Волновые картины в момент времени 0.6438 с. Отражение продольной и поперечной волн от резервуара: слева – без резервуара (постановка 2), справа – с резервуаром (постановка 1).

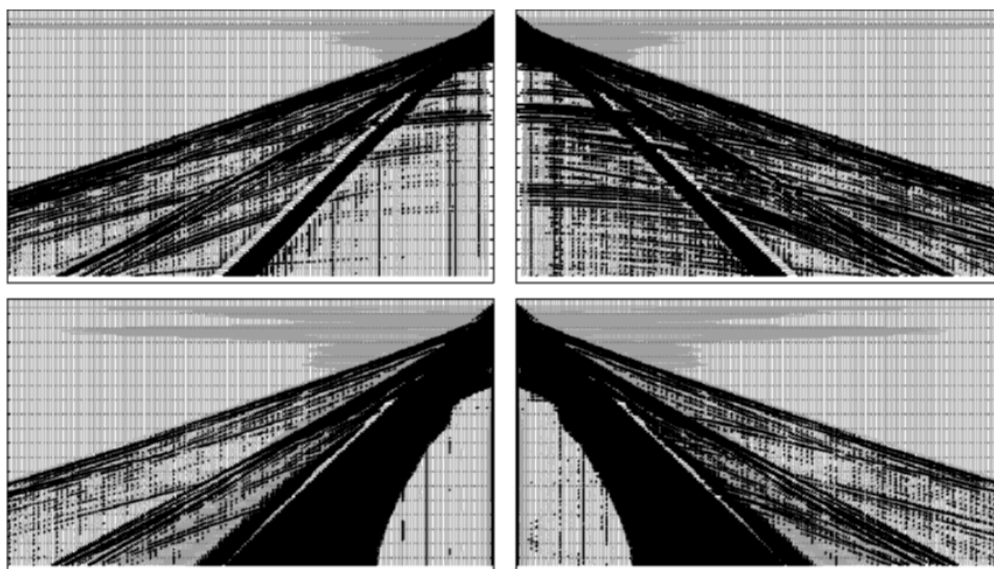


Рис. 7: Сейсмограммы, изображающие вертикальную (вверху) и горизонтальную (внизу) компоненты скорости. Слева – без резервуара (постановка 2), справа – с резервуаром (постановка 1).

На рис. 6,7 приведены волновые картины в моменты времени 0.6438, 0.8991 и 1.332 с соответственно, градацией серого показан модуль скорости (решается прямая задача сейсморазведки в условиях Арктики). Слева на рис. 6,7 показан регион из левой части области интегрирования для второй поста-

новки (без резервуара), справа – регион из правой части области интегрирования для первой постановки. На рис. 7 вверху приведены сейсмограммы, изображающие вертикальную компоненту скорости, внизу – горизонтальную. На рис. 7 слева изображены сейсмограммы, построенные по данным с приемников, расположенных левее источника для второй постановки (без резервуара), справа – с приемников, расположенных правее для первой постановки. На рис. 1 буквой Р отмечены продольные волны от источника, St – волны Стоунли, S – поперечные волны, возникающие при распространении продольных волн Р в геологических породах, буквами PP1, PP2 – отраженные от кровли и подошвы резервуара PP\$волны, PS1, PS2 – отраженные от кровли и подошвы резервуара обменные PSS-волны, SP1, SP2 – отраженные от кровли и подошвы резервуара обменные SP\$волны, SS1, SS2 – отраженные от кровли и подошвы резервуара SS\$волны. На рис. 2 rPS1, rPS2 – отклики от волн PS1, PS2 в толще воды, на рис. 3 rSS1, rSS2 – отклики от волн SS1, SS2 в толще воды.

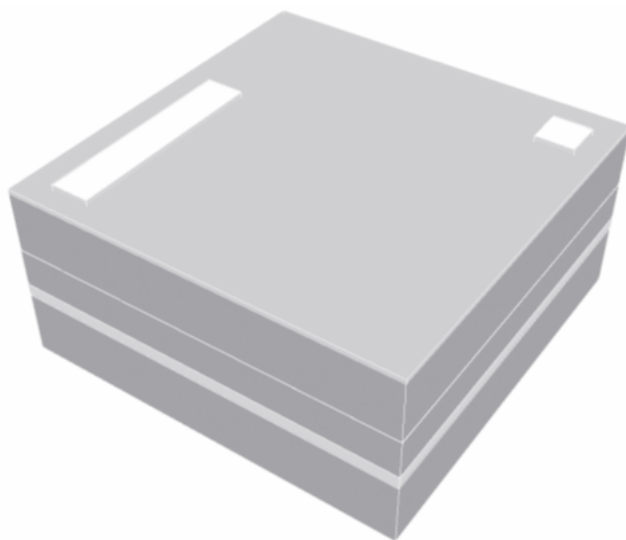


Рис. 8: Постановка задачи.

Рассматривается область интегрирования, представляющая собой параллелепипед шириной 120 м, глубиной 60 м и длиной 120 м. Моделируемая среда является многослойной системой, состоящей из водной толщи, в которой находятся два айсберга, и донного грунта с углеводородосодержащим слоем [12]. Далее решается задача морской сейсморазведки при наличии крупных ледовых образований (айсбергов).

Расчет проводился на прямоугольной сетке, содержащей 5.4×10^7 узлов. Начальное точечное возмущение моделировалось импульсом Риккера частотой 42.85 Гц. На боковых границах области интегрирования поставлены неотражающие граничные условия. Было выполнено 15000 шагов по времени, шаг по времени составлял 3×10^{-5} сек. Шаг по координате брался равным 0.4 м. Рассматривались два айсберга размером 12 на 64 на 12 м и 12 на 12 на 12 м соответственно, заглубленные на 12 м и выступающие над поверхностью

воды на 1 м с плотностью 917 кг/м³, скорость продольных волн полагалась равной 394 м/сек, поперечных – 2491 м/сек.

На выступающих поверхностях айсбергов, плотностью внешней силы, равной нулю, на верхней поверхности воды ставилось условие с заданным давлением, равным нулю.

Слой воды имел следующие характеристики: толщину 20 м, плотность 1000 кг/м³ и скорость звука 1500 м/сек. Для грунта плотности 2500 кг/м³ скорости продольных и поперечных волн брались равными соответственно 6500 м/сек и 3700 м/сек. Плотность включения была взята равной 2000 кг/м³. Скорость распространения волны составляла 4000 м/сек и 1250 м/сек. Постановка задачи изображена на рис. 8. На рис. 9 представлена волновая картина в момент времени 0.195 сек.

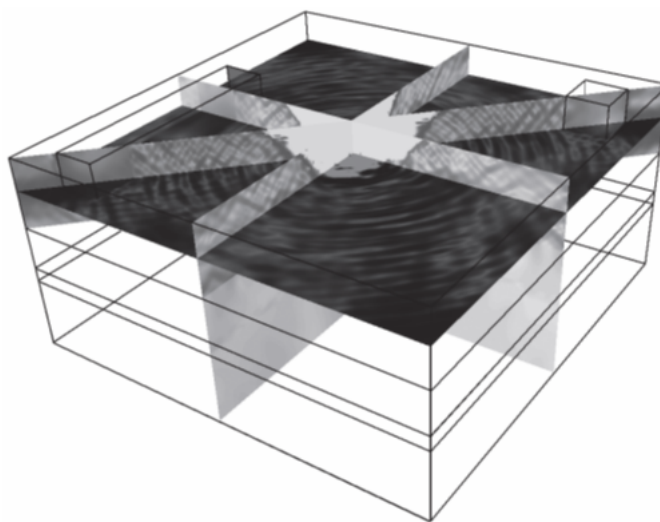


Рис. 9: Волны в воде, отраженные от айсбергов.

Актуальной проблемой для безопасности сооружений нефтегазовой индустрии является сейсмическая активность в Арктической зоне Российской Федерации, влияющая на стойкость стационарных ледостойких платформ и искусственных ледовых островов, находящихся в контакте с ледовыми полями с толщиной до 2,5 м. Эта задача может численно решаться двумя путями: в первом случае данные для ее решения могут браться из показаний сейсмотачиков, установленных на донных станциях либо на платформах, во втором — расчет проводится с измельчением сетки вдали от очага землетрясения. В последнем случае численно моделируются процессы, происходящие в эпицентре, затем решается вычислительно трудоемкая пространственная задача о распространения волн в толще Земли от эпицентра до морского дна, после чего проводится измельчение расчетной сетки (используются иерархические сетки), вследствие большой разницы в характерных размерах исследуемых объектов. Примеры таких расчетов приведены на рис. 11.

На рис.11а изображены сейсмические волны, распространяющиеся от очага землетрясения, в момент времени 0.3 с. Можно видеть сформированные

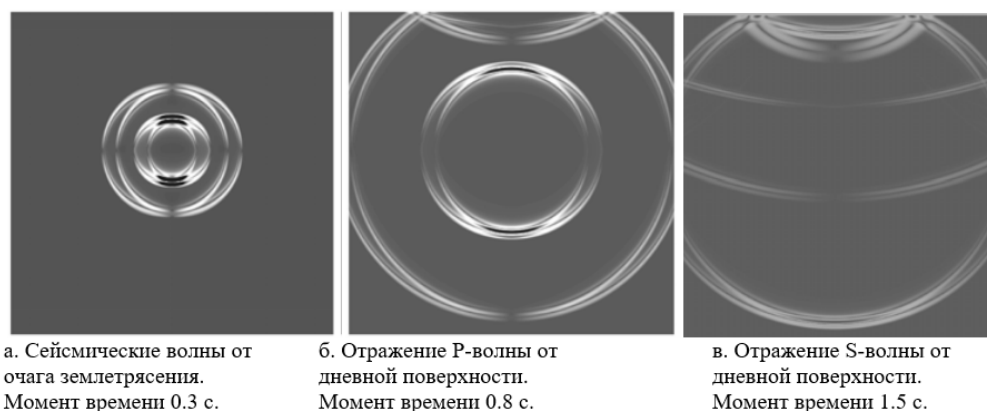


Рис. 10: Распространение сейсмических волн.

Р-волну (продольную волну) и S-волну (поперечную волну). На рис.11б приведена волновая картина в момент времени 0.8 с, Р-волна отражается от дневной поверхности и формируются обменные РР-волна (продольная волна, возникающая при отражении Р-волны) и PS-волна (поперечная волна, возникающая при отражении Р-волны). А на рис.11в видно отражение S-волны от дневной поверхности в момент времени 1.5 с и формирование обменных SP-волны (продольной волны, возникающей при отражении S-волны) и SS-волны (поперечной волны, возникающей при отражении S-волны).

Картина прорезания стойкой платформ ледового поля и его разрушения, при его движении по направлению к ней показана на рис. 12. Расчет выполнялся с помощью разрывного метода Галёркина с учетом разрушения ледового поля. Решение этой задачи важно для предсказания последствий взаимодействия ледового поля и ледостойкой платформы в зоне шельфа, а также для проектирования самих платформ и обеспечения их безопасности. Разрушения в этом процессе имеют сдвиговой характер. На рис.12 видна картина разрушений ледового поля при его взаимодействии со стойкой ледостойкой платформы. Темная зона вблизи стойки соответствует сдвиговым разрушениям (дробление льда), трещины, обусловленные откольными разрушениями, распространения от углов стойки, имеющей 8 углов. На рисунке 12 показан характер разрушения ледовой пластины при ее наезде на стойку ледостойкой платформы. Отметим, что для численного решения этого класса задач использовались также подходы, разработанные в работах [13-15].

3. Заключение

К наиболее актуальным задачам, моделирующим природные и промышленные процессы в шельфовой зоне Арктики относятся: прямые и обратные задачи сейсморазведки, безопасности стационарных и якорных платформ, движения крупных ледовых образований, их взаимодействия с шельфовыми конструкциями, движение судов ледового класса во льдах, расчет механиче-

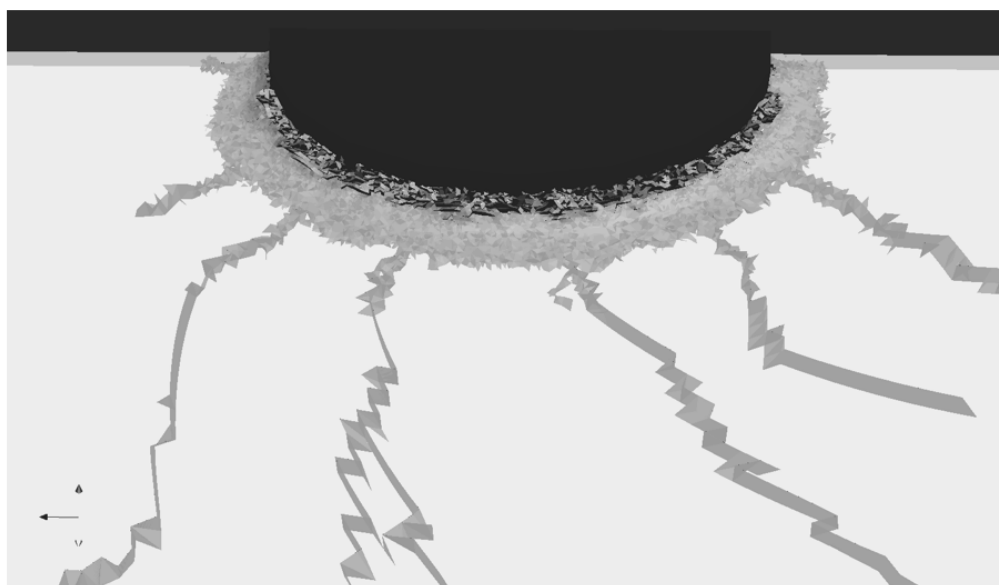


Рис. 11: Разрушения ледовой пластины.

ских свойств ледовых образований. В представленной работе показана возможность численного моделирования указанных процессов и явлений с помощью сеточно-характеристического метода и разрывного метода Галёркина. Следует отметить, что численное моделирование Арктических процессов намного дешевле проведения натурных испытаний, что необходимо учитывать при проектировании шельфовых сооружений и судов ледового класса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магомедов, К.М., Холодов, А.С. Сеточно-характеристические методы. — М., 1988 г., 288 с.
2. Петров, И.Б., Холодов, А.С. О регуляризации численных решений уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики (ЖВМ и МФ). 1984. Т. 24. №8. С. 1346-1358.
3. Петров, И.Б., Тормасов, А.Г., Холодов, А.С. О численном изучении нестационарных процессов в деформируемых средах многослойной структуры // Известия АНССР. Серия Механика твердого тела. 1989. №4. С. 89-85.
4. Квасов, И.Е., Панкратов, С.А., Петров, И.Б. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. №9. С. 13-21.
5. MPI Forum. Message passing Interface (MPI) Forum Page. <http://www.mpi-forum>. 2009.

6. Петров, И.Б., Холодов, А.С. Численное исследование некоторых задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. т. 24. Вып. 5. С. 722-739.
7. Ami Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comp. Phys. 1997. V. 135 (2). PP. 260-278.
8. Петров, И.Б., Хохлов, Н.И. Сравнение TVD-лимитеров для численного решения уравнений динамики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Математические модели и задачи управления: Сб. научных трудов МФТИ. 2011. С. 104-111.
9. Roe P.L. Characteristic-Based Schemes for Euler Equations // Annual Review Mechanics. 1986. №18. PP. 337-365.
10. Санников, А.В., Миряха, В.А., Петров И.Б. Численное моделирование экспериментов по исследованию прочностных свойств льда // Полярная механика. Материалы третьей международной научной конференции. 27-30 сентября 2016. Владивосток. Россия. ДВФУ. С. 14-50.
11. Бирюков, В.А., Миряха, В.А., Петров, И.Б. Анализ зависимости глобальной нагрузки от механических параметров льда при взаимодействии ледяного поля с конструкцией // Доклады Академии Наук. 2017. Т. 474. №6. С. 1-4.
12. Петров, Д.И., Петров, И.Б., Фаворская, А.В., Хохлов, Н.И. Численное решение задач сейсморазведки в условиях Арктики сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. №6. С. 1149-1163.
13. Левянт, В.Б., Петров, И.Б., Квасов, И.Е. Численное моделирование волнового отклика от субвертикальных макротрещин, вероятных флюидонасыщенных каналов // Технологии сейсморазведки. 2011. №4. С. 41-61.
14. Квасов, И.Е., Панкратов, С.А., Петров, И.Б. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. №9. С. 12-21.
15. Муратов, М.В., Петров, И.Б., Фаворская, А.В. Сеточно-характеристический метод на неструктурированных тетраэдральных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Том 54. №5. С. 85-96.

REFERENCES

1. Magomedov, K.M., Kholodov, A.S. 1988, "Grid-characteristic methods", *Moscow*, 288p.
2. Petrov, I.B., Kholodov, A.S. 1984, "Regularization of numerical solutions of hyperbolic equations", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoy phisiki*, vol. 24, no. 8, pp. 1346 – 1358
3. Petrov, I.B., Tormasov, A.G., Kholodov, A.S. 1989, "Numerical investigation of nonstationary processes in the layered continuous medium", *Izvestiya ANSSR. Seria mekhanika tverdogo tela*, no. 4, pp. 85-89
4. Kvasov, I.E., Pankratov, S.A., Petrov, I.B. 2010, "Computation modeling of seismic response in multilayered geologic medium by grid-characteristic method", *Matematicheskoe modelirovaniye*, vol. 22, no.9, pp. 13 – 21
5. MPI Forum (2009), Available at: <http://http://mpi-forum.org/docs> (accessed 4 September 2009)
6. Petrov, I.B., Kholodov, A.S. 1984, "Numerical solution of the solid problems with use of grid-characteristic method", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoy phisiki*, vol. 24., no. 5, pp. 722 – 739
7. Harten, A. 1997, "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *Journal of Computation Physics*, vol. 135 (2), pp. 260 – 278
8. Petrov, I.B., Khokhlov, N.I. 2011, "Comparison of TVD limiters for the numerical solution of the equations of dynamics of a deformable solid body by grid-characteristic method", *Sb. Trudov MFTI Matematicheskie modeli i zadachi upravleniya*, pp. 104 – 111
9. Roe, P.L. 1986, "Characteristic-Based Schemes for Euler Equations", *Annual Review Mechanics*, no. 18, pp. 337 – 365
10. Sannikov, A.V., Miryha, V.A., Petrov, I.B., 2016, "Numerical investigation of ice mechanical properties experiments", *Trudy 3 Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Polyarnaya mekhanika"* (Proc. 3th Int. Scien. Conf. "Polar mechanics"). Vladivostok, 2016, pp. 14 – 50
11. Birykov, V.A., Miryaha, V.A., Petrov, I.B. 2017, "Analysis of the Dependence of the Global Load on the Mechanical Parameters of Ice under Interaction between an Ice Field and Construction", *Doklady Akademii Nauk*, vol. 474, no. 6, pp. 1 – 4.
12. Petrov, D.I., Petrov, I.B., Favorskaya, A.V., Khokhlov, N.I. 2016, "Grid-Characteristic Method on Embedded Hierarchical Grids and Its Application in the Study of Seismic Waves", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoy phisiki*, vol. 56, no. 6, pp. 1149 – 1163.

13. Levyant, V.B., Petrov, I.B., Kvasov, I.E. 201, “Numerical modeling of wave response of subvertical crecs”, *Technologii seismorazvedki*, no. 4, pp. 41 – 61
14. Kvasov, I.E., Pankratov, S.A., Petrov, I.B. 2010, “Numerical investigation of dynamic processes in solid with creck by grid-characteristic method”, *Matematicheskoe modelirovenie*, vol. 22, no. 9, pp. 13 – 22
15. Muratov, M.V., Petrov, I.B., Sannikov, A.V., Favorskaya, A.V. 2014, “Grid-Characteristic method on nonstructure tetrahedral grids”, *Zhurnal vychislitelnoi matematiki I matematicheskoy phisiki*, vol. 54, no. 5, pp. 85 – 96.

Получено 22.05.2017

принято в печать 14.09.2017