

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 3

УДК 531

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-377-389

О ТЕОРИИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ
Я. ФРЕНКЕЛЯ И А. ГРИФФИТСАВ. М. Маркочев¹, М. И. Алымов² (г. Москва)

Аннотация

Дан анализ теории хрупкого разрушения Френкеля. Для анализа использован аппарат теории катастроф. Посредством замены переменных уравнение потенциальной энергии Френкеля приведено к каноническому виду уравнения катастрофы складки. Переменной состояния в полученном уравнении складки является длина трещины. Приравняв нулю первую и вторую производные от энергии по длине трещины, получили критическое значение силы и критическое значение длины трещины. Критическая длина трещины и критическая нагрузка по Френкелю не зависят друг от друга. Их значения зависят только от внутренних управляющих параметров системы – от модуля упругости, поверхностной энергии и раскрытия кончика трещины.

Показано, что длина исходной трещины растет в процессе приближения к критическому состоянию. Получено уравнение, связывающее длину стабильно растущей трещины с внешней нагрузкой и управляющими параметрами системы.

Предпринята попытка модернизации теории хрупкого разрушения Гриффитса на основе идей Френкеля. Для этого в известное уравнение энергии по Гриффитсу введен третий член. Энергия этого члена обратно пропорциональна длине трещины. Приравняв нулю первую и вторую производные по длине трещины, получили систему уравнений. Решив эту систему уравнений, получили формулы для критической длины трещины и критического напряжения. Дана оценка постоянной, входящей в третий член модернизированного уравнения Гриффитса. Длина критической трещины по модернизированному уравнению на 20 % меньше длины трещины по классическому уравнению Гриффитса.

Стабильной длине трещины по Френкелю и по модернизированному уравнению Гриффитса соответствует локальный минимум потенциальной энергии. Это обстоятельство фактически устраняет сингулярность при нулевой длине трещины.

¹Маркочев Виктор Михайлович, заведующий кафедрой физики прочности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, VMMark@yandex.ru

²Алымов Михаил Иванович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института структурной макрокинетики РАН, director@ism.ac.ru

Третий член в уравнении Френкеля можно интерпретировать как энергию раскрытия трещины. Тем самым Я.И. Френкель соединил силовой и деформационный походы современной механики разрушения. Уравнение Френкеля, описывающее критическое состояние твердого тела с трещиной, предшествует появлению современной теории катастроф вообще и применительно к механике хрупкого разрушения в частности.

Ключевые слова: трещина, хрупкое разрушение, теория Гриффитса, теория Френкеля, механика разрушения, теория катастроф.

Библиография: 5 названий.

ON THE BRITTLE FRACTURE THEORY BY YA. FRENKEL AND A. GRIFFITH.

V. M. Markochev, M. I. Alymov

Abstract

The analysis of the theory of brittle fracture Frenkel. The analysis is based on the theory of catastrophes. By replacing the variables in the equation of potential energy Frenkel of the canonical reduced form of the equation of catastrophe folds. A state variable in the resulting equation of the fold is the crack length. Equating to zero first and second derivatives of the energy on the crack length, obtained critical force and critical length of crack. Critical crack length and critical load at Frenkel are independent from each other. Their values depend only on the internal of the system operating parameters – modulus of elasticity, surface energy and opening of the crack tip.

It is shown that the length of the initial crack grows in the process of approach to the critical state. The resulting equation linking the length of a steadily growing crack with the external load and control parameters of the system.

An attempt of modernization theories of brittle fracture Griffith based on the ideas of Frenkel. To do this in a well-known energy equation in Griffiths introduced the third member. The energy of this member is inversely proportional to the crack length. Equating to zero first and second derivatives on the crack length, obtained a system of equations. Solving this system of equations, obtained formulae for critical crack length and critical stress

The estimation of permanent member, the third member of the modernized equations Griffiths. The length of the critical crack for upgrade equation is 20% smaller than the crack length according to the classical equation of Griffith.

The stable crack length in Frenkel and modernized Griffiths equation corresponds to the local minimum of potential energy. This fact virtually eliminates the singularity at zero crack length.

The third member in the Frenkel equation can be interpreted as the energy of the crack opening. Thus Frankel joined the force and deformation criteria modern fracture mechanics. The Frenkel equation, which describes the critical state of a solid body with a crack that precedes the appearance of modern catastrophe theory in general and in relation to the mechanics of brittle fracture, in particular.

Keywords: fracture, brittle fracture, Griffiths theory, the theory of Frenkel, fracture mechanics, the theory of catastrophes.

Bibliography: 5 titles.

1. Введение

В 1952 году вышла статья Я.И. Френкеля [1], описывающее критическое состояние твердого тела с трещиной. Эта статья прошла практически незамеченной, за исключением монографии Б.А. Дроздовского и Я.Б. Фридмана [2], где частично пересказано ее содержание. Г.П. Черепанов [3] поместил ссылку на статью [1] в список литературы, однако в тексте своей книги отозвался кратко и невразумительно. Целью данной статьи является анализ работы Я.И. Френкеля с современных позиций теории катастроф и попытка модернизации энергетической теории хрупкого разрушения А. Гриффитса [4].

2. Анализ теории Я. И. Френкеля

Я. И. Френкелем записано следующее уравнение для изменения потенциальной энергии U пластины с боковой трещиной x

$$U = -\frac{F^2 x^3}{EI} + 2\gamma x b + \frac{F^2 \delta}{E b x}, \quad (1)$$

где F — сила, приложенная к пластине, E — модуль упругости материала пластины, I — осевой момент инерции поперечного сечения балки, моделирующей изгиб края пластины, γ — поверхностная энергия, δ — раскрытие кончика трещины. В уравнение (1) нами введена толщина пластины b , что необходимо для получения единой размерности всех членов уравнения.

В соответствии с теорией катастроф [5-11] длина трещины x — это параметр состояния тел с трещиной, напряжение (нагрузка F) — внешний управляющий параметр, модуль упругости E и поверхностная энергия γ — внутренние управляющие параметры. Предположим, что критическая длина трещины равна a . Заменим переменную x на

$$x = y + a, \quad (2)$$

и разложим множитель $1/(y + a)$ в степенной ряд в окрестности длины a .

$$\frac{1}{y + a} \approx \frac{1}{2a} - \frac{y - a}{4a^2} + \frac{(y - a)^2}{8a^3}. \quad (3)$$

Для иллюстрации ограничимся двумя первыми членами ряда. Теперь уравнение (1) примет следующий вид

$$U = \frac{F^2(a+y)^3}{EI} + 2\gamma b(a+y) - \frac{F^2\delta(a+y)}{4Eba^2} + \frac{F^2\delta}{Eba}. \quad (4)$$

Заметим, что при такой замене мы занижаем роль множителя $1/(y+a)$. Продолжив замену переменных.

$$V = \frac{EI}{3F^2} \left(U - \frac{F^2\delta}{Eba} \right), \quad (5)$$

$$z = a + y, \quad (6)$$

$$A = \frac{2\gamma EbI}{3F^2} - \frac{\delta I}{12ba^2}, \quad (7)$$

преобразуем уравнение (4) к виду (8), который имеет каноническое уравнение катастрофы складки [4, 5]

$$V = \frac{z^3}{3} + z, \quad (8)$$

В соответствии с теорией, для возникновения катастрофы складки необходимо, чтобы одновременно удовлетворялись два уравнения

$$z = 0, \quad (9)$$

и

$$A = 0. \quad (10)$$

Из уравнения (9) следует, с учетом (2) и (6) что длина прироста трещины

$$x = 0. \quad (11)$$

Из уравнений (10) и (7) следует, что критическая сила F_f , необходимая, чтобы трещина длиной a стала критической, равна

$$F_f = 2\sqrt{2}ab\sqrt{\frac{\gamma E}{\delta}}. \quad (12)$$

Итак, уравнение (1) Я. И. Френкеля — это уравнение катастрофы хрупкого разрушения.

В соответствии с теорией катастроф для возникновения катастрофы необходимо, чтобы первая и вторая производные от энергии по переменной состояния одновременно обращались в нуль. По достижении этого состояния переменная состояния x должна резко увеличиваться. Это доказывается построением семейства кривых для потенциальной энергии системы в зависимости от длины трещины при различных значениях внешнего управляющего параметра — напряжения или силы. Исследуем уравнение (1) этим методом.

Записав уравнения для первой и второй производной и приравняв их нулю, получаем систему уравнений

$$-\frac{3F^2x^2}{EI} + 2\gamma b - \frac{F^2\delta}{Ebx^2} = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{3x}{I} + \frac{\delta}{bx^3} = 0. \quad (14)$$

Решение этой системы уравнений дает формулы для критической длины трещины

$$x_f = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt[4]{\frac{3\delta I}{b}}, \quad (15)$$

для критической силы

$$F_f = \frac{b\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{\gamma E}{\delta}} \sqrt[4]{\frac{3\delta I}{b}}, \quad (16)$$

а также соотношение между критической силой F_f и критической длиной трещины x_f .

$$F_f = x_f b \sqrt{\frac{\gamma E}{\delta}}. \quad (17)$$

Существенно, что критическая длина трещины и критическая нагрузка определяются независимо друг от друга и зависят только от внутренних управляющих параметров E , γ , δ и I .

Эта независимость критической длины и критического напряжения в некоторой мере поясняет, почему хрупкие разрушения происходят внезапно, но сравнительно редко. И это происходит потому, что одновременно удовлетворить двум условиям (15) и (16) в реальных условиях эксплуатации практически невозможно — вероятность этого события мала. В лабораторных условиях, при нагружении образца с трещиной, исследователь постепенно приближается к критическим условиям, и они наступают со 100% вероятностью. Но такие условия при эксплуатации отсутствуют.

Для получения численных оценок примем, что $E = 105$ МПа, $F = 5$ Н, $\gamma = 1$ Н/м, $I = 0,083$ мм⁴, $b = 1$ мм. При этих условиях $x_f = 0,23$ мм, $F_f = 7,26$ Н.

На рис. 1 приведено семейство кривых, рассчитанных по формуле (1).

Рис. 1 полностью подтверждает справедливость расчетов критических параметров по формулам (15) и (16). Он также показывает, что исходная трещина стабильно подрастает вплоть до ее критического значения 0,23 мм. Вместе с тем следует отметить, что рис. 1 качественно не соответствует рис. 6 на стр. 1865 работы Я. И. Френкеля [1]. В соответствии с этим рисунком, рост нагрузки F приводит к снижению потенциальной энергии и уменьшению длины равновесной трещины, что противоречит рис. 1.

Зависимость длины равновесной (стабильной) трещины x_{st} от нагрузки F получаем, решив уравнение (13) относительно длины трещины x .

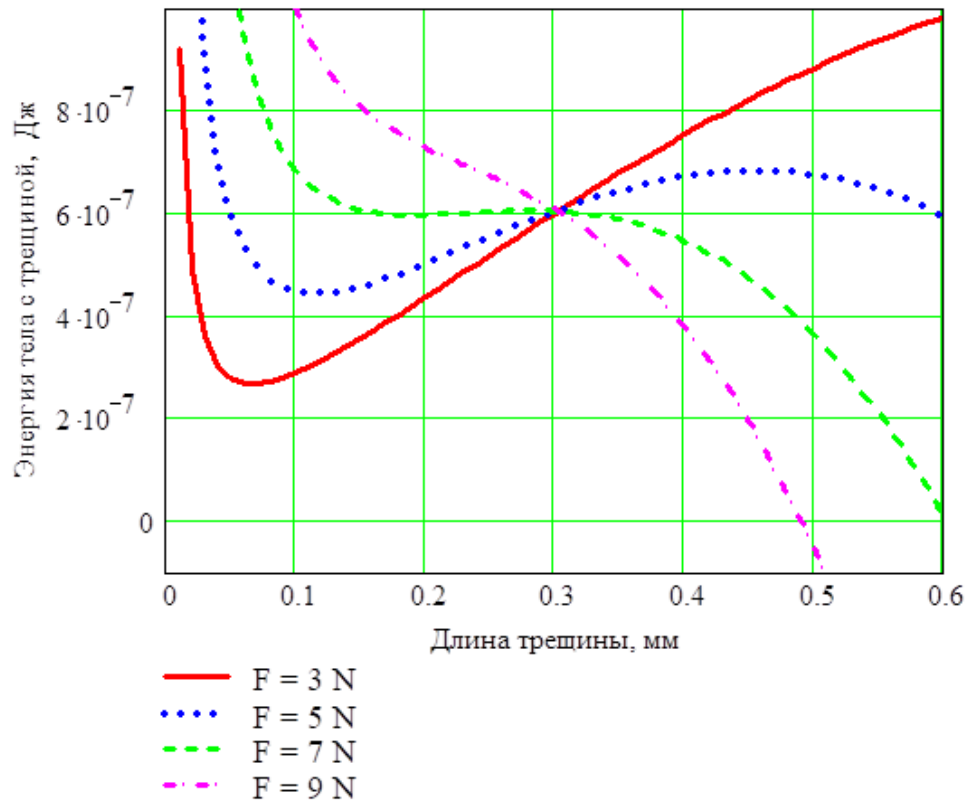


Рис. 1: Семейство кривых, описывающих зависимость потенциальной энергии пластины с трещиной от нагрузки по Френкелю

$$x_{st} = \frac{\sqrt{12\gamma EbI}}{6F} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{3F^4\delta}{\gamma^2 E^2 b^3 I}}} \quad (18)$$

Эта зависимость показана на рис. 2.

Рис. 1 показывает, что все кривые на этом рисунке пересекаются в одной точке. Анализ показывает, что абсцисса этой точки равна

$$x_s = \frac{\sqrt[4]{\delta Ib^3}}{b}. \quad (19)$$

Численное значение абсциссы для данного примера равно $x_s = 0,302$ мм.

Ординату U_s точки пересечения получаем, подставив x_s в уравнение для энергии (1), а именно

$$U_s = -\frac{F^2 x_s}{EI} + 2\gamma x_s b + \frac{F^2 \delta}{Eb x_s}. \quad (20)$$

Численное значение ординаты для данного примера равно $U_s = 6,043 \cdot 10^{-7}$ Дж.

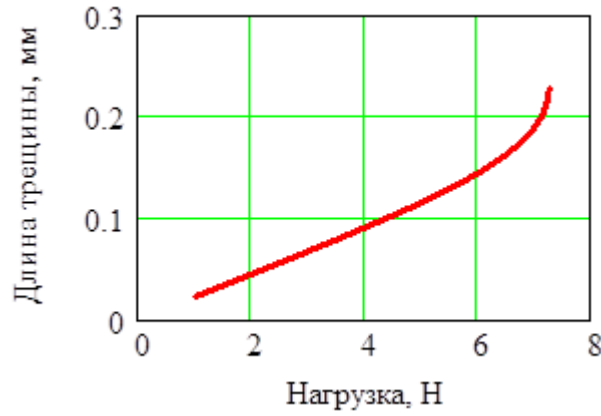


Рис. 2: Зависимость длины стабильной трещины от нагрузки

3. Модернизация теории А. Гриффитса

А. Гриффитс [3] заложил основы механики разрушения, добавив к теории упругости еще одну постоянную — поверхностную энергию γ . Его уравнение для энергии U_g бесконечной пластины с трещиной $2x$ имеет следующий вид

$$U_g = -\frac{\pi\sigma^2 x^2 b}{E} + 4\gamma bx \quad (21)$$

откуда следует формула для критической длины трещины x_g

$$x_g = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}. \quad (22)$$

При $\sigma = 10$ МПа, и принятых ранее значениях γ и E , $x_g = 0,637$ мм.

Вводя в (21), по аналогии с Я. И. Френкелем, дополнительный член D/x , где D имеет размерность энергии, мы фиксируем сам факт существования трещины. Поэтому, изменяя ее длину, получаем возможность исследования степени ее стабильности. Итак,

$$U_{gf} = -\frac{\pi\sigma^2 x^2}{E} + 4\gamma x + \frac{D}{x}. \quad (23)$$

Дважды продифференцировав уравнение (23) и приравняв первую и вторую производные по длине трещины x , получаем систему уравнений

$$-\frac{D}{x^2} - \frac{2\pi\sigma^2 x}{E} + 4\gamma = 0, \quad (24)$$

$$\frac{D}{x^3} - \frac{\pi\sigma^2}{E} = 0. \quad (25)$$

Решив эту систему уравнений относительно x и σ , получаем формулы для критической длины трещины x_c и критического напряжения σ_c .

$$x_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{D}{\gamma}}, \quad (26)$$

$$\sigma_c = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{E\gamma^2 \sqrt{3}}{\pi D} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{\gamma}}}, \quad (27)$$

а также уравнение, связывающее σ_c и x_c :

$$\sigma_c = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{E\gamma^2 x_c}{\pi D}} \quad (28)$$

Приняв, что $D = 10^{-7}$ Дж, получаем оценки σ_c и x_c : $x_c = 0,274$ мм, $\sigma_c = 12,449$ МПа.

На рис. 3 приведено семейство кривых, рассчитанных по уравнению (23), где параметром служит напряжение σ . Видно исчезновение минимума функции U_{gf} при вычисленных значениях σ_c и x_c , которое сопровождается стабильным приростом трещины (см.рис. 2).

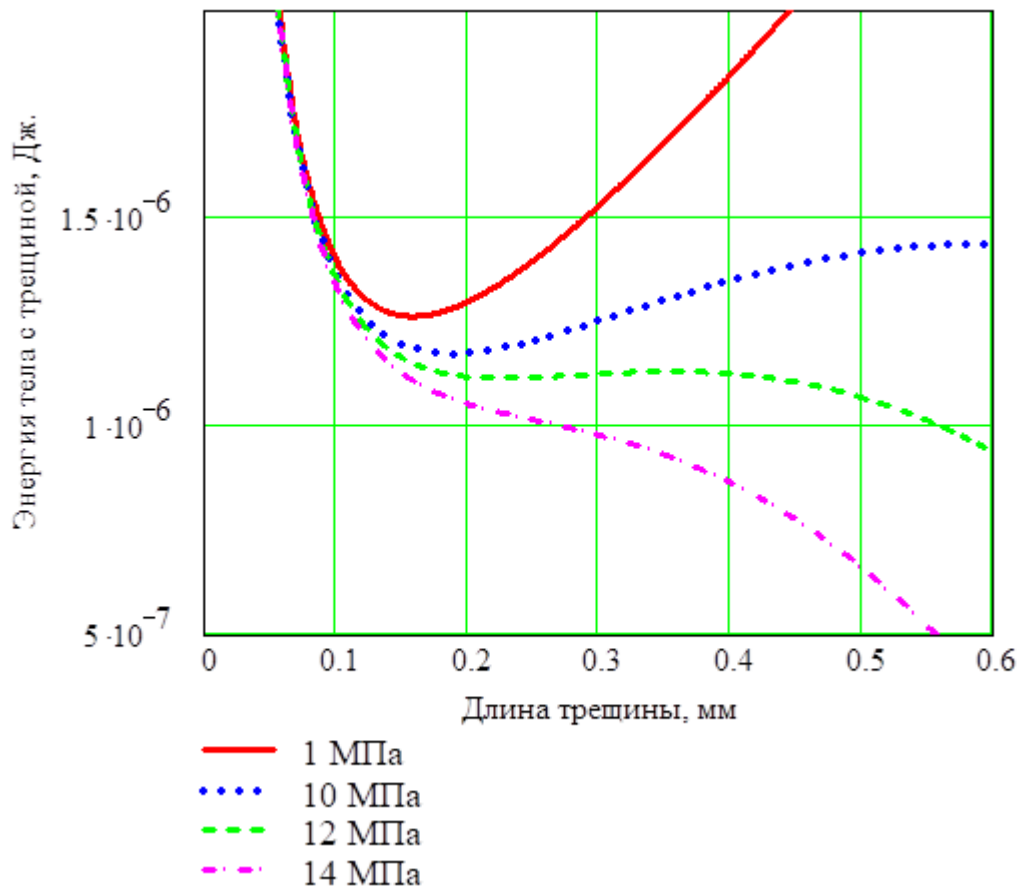


Рис. 3: Семейство кривых, описывающих зависимость потенциальной энергии пластины с трещиной от нагрузки по Гриффитсу–Френкелю

Приравняв значения критических длин трещин по (22) и (26) получаем формулу для D_g :

$$D_g = \frac{16}{3\pi^2} \frac{\gamma^3 E^2}{\sigma^4} \quad (29)$$

При принятых значениях входящих величин значение $D_g = 5,404 \cdot 10^{-7}$ Дж. Отметим, что комбинация $(E^2\gamma^3)/\sigma^4$ имеет размерность D и может служить его заменой. При использовании D_g вместо D и при замене σ на σ_0 в последнем члене уравнения (23) получаем

$$U_{gf} = -\frac{\pi\sigma^2x^2}{E} + 4\gamma x + \frac{16E^2\gamma^3}{3\pi^2\sigma_0^2x} \quad (30)$$

В этом случае критическая длина трещины x_{cc} и критическое напряжение σ_{cc} будут равны

$$x_{cc} = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma_0^2}, \quad (31)$$

$$\sigma_{cc} = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (32)$$

Численно эти критические параметры при $\sigma_0 = 10$ МПа будут равны $x_{cc} = 0,637$ мм, $\sigma_{cc} = 8,165$ МПа.

На рис. 4 сопоставлены кривые, относящиеся как к исходной теории А. Гриффитса, так и ее модификации по Я. Френкелю при $\sigma_0 = 10$ МПа.

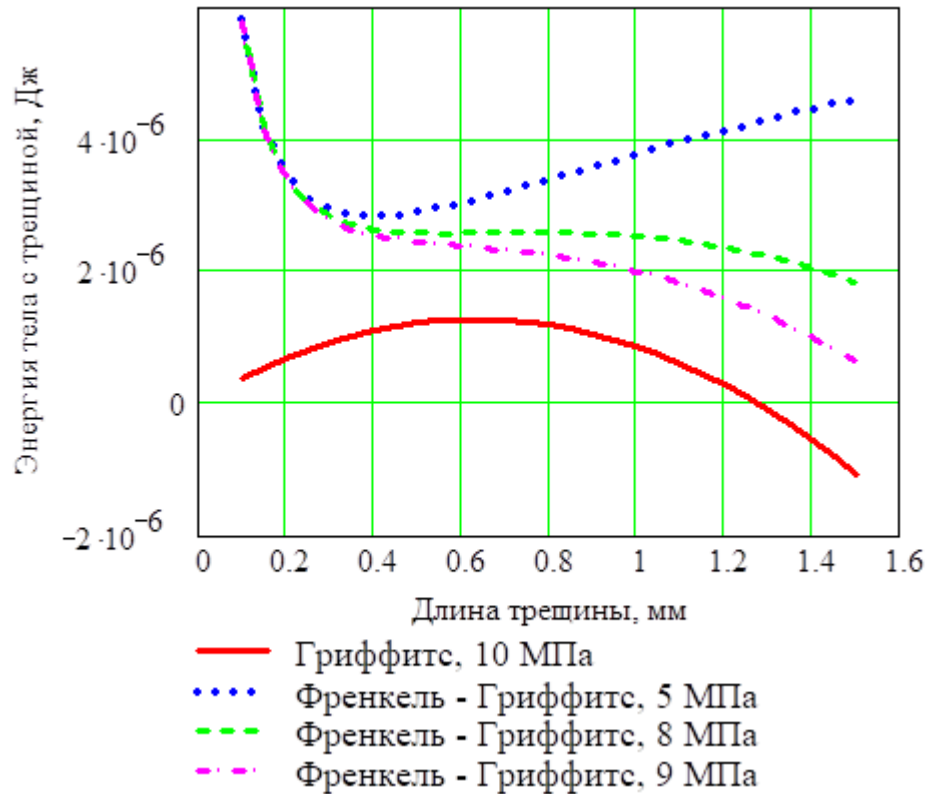


Рис. 4: Семейство кривых уравнения (30) на фоне классической кривой А. Гриффитса

Отметим, что в данном случае критическое напряжение составляет $\sqrt{2/3}$ напряжения по теории А. Гриффитса.

4. Обсуждение полученных результатов

Последний (третий) член уравнения (1) представляет особый интерес. Его можно, с точностью до множителя, интерпретировать как работу, совершаемую силой F при растяжении стержня длиной δ и площадью поперечного сечения bx , или как работу раскрытия трещины. Тем самым Я. И. Френкелем осуществлена попытка, на модельном уровне, связать воедино силовой и локально деформационный подход теории разрушения.

Существенно, что использование идей Я. И. Френкеля позволило объяснить существование не залечивающихся трещин как отвечающих локальному минимуму потенциальной энергии. Более того, критическое состояние к которому приближается трещина под действием внешних сил, определяется физическими свойствами твердого тела. Входящий в уравнения (26) и (27) параметр D , имеет размерность работы. Поэтому третий член уравнения (23) можно рассматривать как работу разрыва межатомных связей, отнесенную к единице длины трещины. Следовательно, упругая энергия должна затрачиваться как на разрыв связей, так и на образование поверхностного натяжения.

Классическое решение А. Гриффитса (22) приводит к бесконечной прочности при нулевой длине трещины. Я. И. Френкель в своей работе [1] указал путь решения этой проблемы — модернизация последнего члена в (1) или в (23) посредством использования в качестве этого члена произведения линейной и экспоненциальной функции. В этом случае уравнение (23) принимает следующий вид

$$U = -\frac{\pi b \sigma^2 x^2}{E} + 4\gamma bx + Sxb \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \quad (33)$$

где параметр S можно рассматривать в качестве относительной работы разрыва межатомных связей. На рис. 5 показано семейство кривых, построенных по уравнению (33) при $S = 500$ Н/м, $\gamma = 5$ Н/м, $\delta = 1$ мм и $b = 1$ мм. Параметром семейства служит напряжение σ .

Рис. 5 определенно показывает наличие потенциального барьера между трещиной нулевой и конечной длины. Следовательно, природа должна иметь механизмы преодоления этого барьера. Видно также, что и бесконечность при нулевой длине отсутствует.

Нам не удалось получить аналитические выражения для критической длины трещины и для критического напряжения типа (26) и (27). Однако численное решение системы уравнений типа (24) и (25)

$$-\frac{2\pi\sigma^2 x}{E} + 4\gamma + S\left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 0, \quad (34)$$

$$-\frac{2\pi\sigma^2}{E} - \frac{S}{\delta}\left(2 - \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 0, \quad (35)$$

позволило получить численные значения для критической длины трещины x_{cf} и критического напряжения σ_{cf} : $x_{cf} = 6,9$ мм, $\sigma_{cf} = 6,27$ МПа.

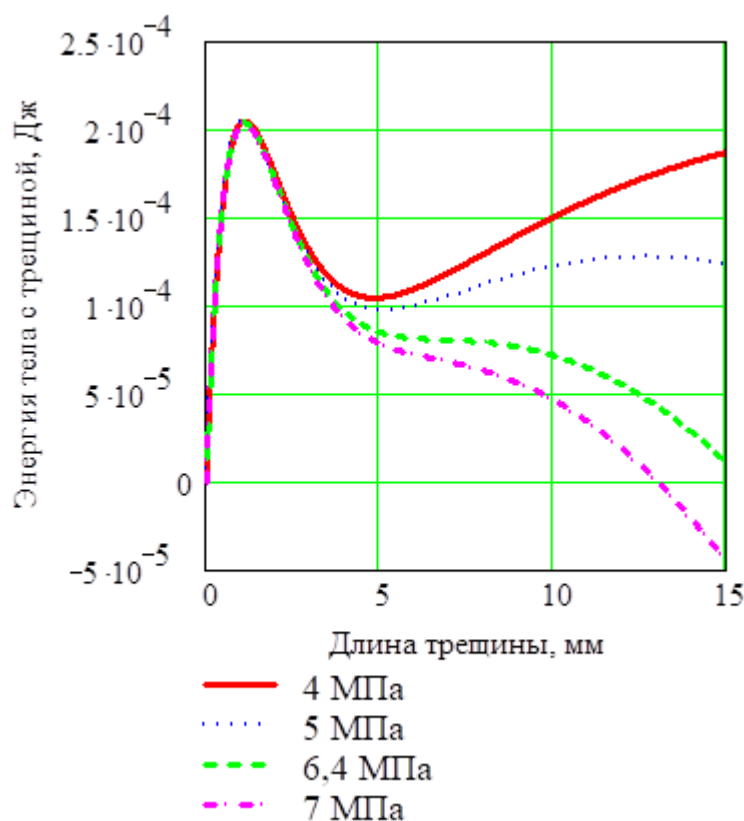


Рис. 5: Семейство кривых по уравнению (33)

Данная попытка модернизировать теорию А. Гриффитса на основе идей Я. И. Френкеля поставила ряд вопросов относительно интерпретации вновь введенных параметров, а также о допустимости использования постоянства такого параметра как поверхностная энергия. Полученные решения следует рассматривать как полученные в рамках сугубо модельных представлений. Возникает также вопрос о адекватности использованной модели твердого тела и ее ограничениях применительно к задачам механики разрушения.

5. Заключение

Ранее было замечено, что рис. 1 качественно не соответствует рис. 6 на стр. 1865 работы [1]. Из него следует, что критическое состояние разрушения достигается в результате уменьшения длины трещины. Скорее всего, этот рисунок сугубо качественный, и не является результатом расчетов. Но он совершенно явно демонстрирует наступление критического состояния как результат исчезновения локального минимума, что является основой современной теории катастроф. Поэтому к перечисленным в работе [6] предшественникам теории катастроф можно определенно причислить и Я. И. Френкеля, поскольку основные работы по современной теории катастроф относятся к 70-ым годам прошлого столетия.

Третий член в уравнении (1) предвосхитил появление в 60-х годах прошлого столетия деформационных критериев разрушения [12-15], базирующихся на понятии критического раскрытия трещины.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкель Я. И. Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах / Журнал технической физики, 1952, т. 22, № 11, С. 1857 – 1866.
2. Дроздовский Б. А., Фридман Я.Б. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей / М.: Металлургиздат, 1960. – 260 с.
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения - М.: Наука, 1974. – 640 с
4. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1921, Vol. 221, # 2, P. 163- 198. / В книге: Пестриков В. М., Морозов Е. М. Механика разрушения. Курс лекций. – СПб.: Профессия, 2012, Приложение 1, с. 435 – 461.
5. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / М.: Мир, 1980. – 607 с.
6. Арнольд В. И. Теория катастроф / М.: Наука, 1990. – 128 с.
7. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике - М.: Мир, 1985. – 254 с.
8. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. Кн.1 - М.: Мир, 1984. – 350 с. Кн. 2. М.: Мир, 1984. – 285 с.
9. Маркочев В.М. Теория катастроф и механика разрушения. / Проблемы прочности, 1985, № 7, С. 43-47.
10. Маркочев В.М. О роли энергии, запасенной при пластическом деформировании, в процессах разрушения / ФХММ, 1991, № 5, С. 53-56.
11. Маркочев В.М. Реологическая модель разрушающегося твердого тела / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2011, № 6, С. 44-47.
12. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
13. Аверин С.И., Алымов М.И., Гнедовец А.Г. Трещиностойкость топливных таблеток твело / Атомная энергия, 2011, т. 110, № 5, С. 295-297.
14. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения – М.: Наука, 1985. – 504 с.

15. Broek D. The Practical Use of Fracture Mechanics. – Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 1989.

REFERENCES

1. Frenkel Y. 1952, "Theory of reversible and irreversible cracks in solids", *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, is. 22, no. 11, pp. 1857–1866.
2. Drozdovskij B. A., Fridman YA. B. 1960, "Influence of cracks on the mechanical properties of structural steels", 260 p.
3. Cherepanov G.P. 1974, *Mechanics of brittle fracture*, Nauka, Moscow.
4. Griffith A. A. 1921, "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*. Vol. 221, no. 2, pp. 163–198.
5. Poston T. Styuart I. 1980, "Catastrophe theory and its applications", 607 p.
6. Arnold V. I. 1990, "Catastrophe theory", 128 p.
7. Thompson J.M.T. 1982, *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*, John Wiley & Sons, NY.
8. Gilmore R. 1981, *Catastrophe Theore for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, NY.
9. Markochev V.M. 1985, "Catastrophe theory and fracture mechanics", *Problemy prochnosti*, no 7, pp. 43-47.
10. Markochev V.M, 1991, " On the role of the energy stored during plastic deformation, in failure, " *Physico-chemical mechanics of materials*", no 5, pp. 53-56.
11. Markochev V.M. 2011, "The rheological model of the failing of a solid body", *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, no 6, pp. 44-47.
12. Panasyuk V.V. 1968, *Limit equilibrium of brittle bodies with cracks*, Nauk. Dumka, Kiev.
13. Averin S.I., Alymov M.I., Gnedovech A.G. 2011, "Crack resistance of fuel pellets in fuel elements", *Atomic Energy*. Vol. 110. no. 5. pp.360-363.
14. Parton V.Z., Morozov E.M. 1985, *Mechanics of elastic-plastic fracture*, Nauka, Moscow.
15. Broek D. 1989, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Получено 22.05.2017

принято в печать 14.09.2017