

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 3

УДК 539.4, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-316-329

О ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ CAE FIDESYS¹

Д. А. Коновалов², М. Я. Яковлев³ (Москва)

Аннотация

Одной из основных задач механики композитов является оценка эффективных характеристик композиционного материала. В данной работе описывается методика численной оценки эффективных нелинейно-упругих характеристик применительно к эластомерным композитам (наполненным резинам), при конечных деформациях. Методика основана на численном решении краевых задач нелинейной теории упругости на представительном объеме эластомерного композита. К представительному объёму последовательно прикладываются различные граничные условия: непериодические (в виде жёстко заданных перемещений каждой точки границы) либо периодические (в виде связей, наложенных на перемещения точек противоположных граней представительного объёма, проекции которых на эти грани совпадают). После решения краевой задачи упругости полученное поле напряжений осредняется по объёму. Эффективные свойства оцениваются в виде квадратичной зависимости второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа от тензора деформаций Грина. В статье представлены результаты численной оценки эффективных упругих характеристик наполненных резин при конечных деформациях. Численные расчёты проводились с помощью программного модуля Fidesys Composite, входящего в состав

¹Исследования для данной работы были выполнены в ООО «Фидесис» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии №14.579.21.0112, уникальный идентификатор ПНИЭР: RFMEFI57915X0112).

²Коновалов Дмитрий Андреевич, директор департамента разработки ПО, ООО "Фидесис" konovalov@cae-fidesys.com

³Яковлев Максим Яковлевич, руководитель сектора анализа свойств композиционных и пористых материалов, ООО "Фидесис" yakovlev@cae-fidesys.com

отечественной CAE-системы Fidesys, с использованием метода конечных элементов и метода спектральных элементов. Метод спектральных элементов является более современной и эффективной версией метода конечных элементов. В нём в качестве базисных функций используются кусочно-полиномиальные функции высоких порядков. При работе с моделью у пользователя отсутствует необходимость перестроения и измельчения сетки для проверки сеточной сходимости полученного решения, поскольку сетка может оставаться изначальной, а изменяться только порядок элементов. Исследовались зависимости эффективных свойств наполненного эластомера от пространственной ориентации частиц наполнителя и от степени наполнения. Графики этих зависимостей приведены в статье. Полученные результаты свидетельствуют о применимости метода спектральных элементов к численному решению задачи оценки эффективных свойств композитов. Также полученные результаты позволяют оценить влияние нелинейных эффектов на механические свойства композита. Так, например, при одноосном растяжении величиной деформации порядка 15% поправка от учёта нелинейных эффектов для напряжения в направлении той же оси составит примерно 25%.

Ключевые слова: Механика деформируемого твёрдого тела, механика композитов, эффективные свойства, конечные деформации, эластомерные композиты, метод спектральных элементов.

Библиография: 19 названий.

NUMERICAL ESTIMATION OF EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES OF ELASTOMER COMPOSITES UNDER FINITE STRAINS USING SPECTRAL ELEMENT METHOD WITH CAE FIDESYS

D. A. Konovalov, M. Ya. Yakovlev (Moscow)

Abstract

Estimation of effective properties of composite materials is one of the main problems for the composite mechanics. In this article, a method is developed by which the effective nonlinear elastic properties of elastomer composites (filled rubbers) are estimated under finite strains. The method is based on numerical solution of nonlinear elastic boundary-value problems for a representative volume element (RVE) of elastomer composite. Different boundary conditions are consequently applied to the RVE: nonperiodic (displacements of the RVE boundary) or periodic (restraints on displacements of corresponding points of opposite faces of RVE). An obtained stress field is averaged by volume after the solution of

an elastic boundary-value problem. Effective properties are estimated as a quadratic dependence of the second Piola-Kirchhoff stress tensor upon the Green strain tensor. This article presents the results of numerical estimation of effective elastic properties of filled rubbers under finite strains. Numerical calculations were performed with the help of Fidesys Composite program module, which is a part of the domestic Fidesys CAE-system, using the finite element method and the spectral element method. Spectral element method is one of the most effective and modern finite element method version. High order piecewise-polynomial functions are reference functions in SEM. There is no need to rebuild or refine mesh to check solution mesh convergence, as mesh is kept in initial state and only element orders are changed. The subject of investigation was the filled elastomer effective properties dependence upon the filler particles special orientation and the filling degree. Graphs of these dependencies are given in the article. The obtained results show that the spectral element method is suitable for numerical solution of the effective properties estimation problem for composite materials. In addition, the results allow to estimate the influence of non-linear effects upon the mechanical properties of the composite. The correction for stress from taking the non-linearity into account is about 25% under the strain 15% in the case of uniaxial tension.

Keywords: Solid mechanics, composite mechanics, effective properties, finite strains, elastomer composites, spectral element method.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

К эластомерным композитам относятся, в основном, наполненные резины [4]. Они представляют собой каучук, насыщенный мельчайшими частицами технического углерода (сажи). Наличие наполнителя в составе резины приводит к многократному повышению уровня различных эксплуатационных характеристик: прочности, износостойкости, усталостной выносливости и т.д. При разработке новых типов наполненных резин возникает задача прогнозирования их свойств в зависимости от свойств каучука и наполнителя, от степени наполнения, от размера и формы частиц наполнителя. В данной работе описывается один из вариантов оценки эффективных упругих свойств [10, 12] таких материалов в нелинейном виде, при конечных деформациях [2, 3], основанный на численном решении краевых задач теории упругости на представительном объёме наполненного эластомера [11, 13, 14, 15].

2. Методика численной оценки эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях

Поскольку речь идёт о расчётах на представительном объёме, необходимо сначала дать определение этого понятия. **Представительным объёмом** эластомерного композита называется минимальный объём этого материала, на котором могут быть проведены некоторые эксперименты или измерения, на основе результатов которых можно сделать выводы о поведении композиционного материала в целом. Представительный объём наполненного эластомера должен содержать достаточный объём каждого компонента, чтобы позволить осреднить свойства всего материала. Если же рассматривается упрощённая модель наполненного эластомера, имеющая регулярную (периодическую) структуру – тогда в роли представительного объёма может выступать ячейка периодичности.

Используя приведённое выше определение, опишем методику численной оценки эффективных упругих характеристик эластомерного композита в нелинейном виде, при конечных деформациях.

Для представительного объёма V_0 в начальном состоянии (до деформирования) решается определённое число *последовательностей* краевых задач *нелинейной* теории упругости [4]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \text{ или } \overset{0}{\nabla} \cdot \mathfrak{R} = 0 \quad (1)$$

с непериодическими граничными условиями в виде заданного вектора перемещений каждой точки границы

$$u|_{\Gamma_0} = r \cdot (\Psi^e - I) \quad (2)$$

либо с *периодическими* граничными условиями в виде связей на перемещения противоположных точек границы

$$\begin{aligned} u_i^1 - u_i^{-1} &= -2A(\psi_{1i} - \delta_{1i}) \\ u_i^2 - u_i^{-2} &= -2B(\psi_{2i} - \delta_{2i}) \\ u_i^3 - u_i^{-3} &= -2C(\psi_{3i} - \delta_{3i}) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ur – тензор истинных напряжений, $\mathfrak{R}$ – первый тензор напряжений Пиолы, ∇ – оператор градиента, r – радиус-вектор, Ψ^e – эффективный аффинор деформаций, ψ_{ji} – его компоненты, u – вектор перемещения точки. В периодических условиях:

1. пара (1; -1) – противоположные друг другу узлы на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси X ;
2. пара (2; -2) – противоположные друг другу узлы на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси Y ;

3. пара (3; -3) – противоположные друг другу узлы на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси Z .

Для представительного объёма решается 21 последовательность краевых задач теории упругости. Разные последовательности задач отличаются типом приложенных граничных условий (т.е. типом эффективного тензора деформаций на представительном объёме). Разные задачи в рамках одной последовательности различаются величиной деформации при одном и том же типе. Прикладываются деформации следующих типов:

1. растяжения/сжатия (вдоль каждой из координатных осей);
2. сдвиги (в каждой из координатных плоскостей);
3. композиции растяжений с растяжениями;
4. композиции растяжений со сдвигами;
5. композиции сдвигов со сдвигами.

В результате решения каждой краевой задачи упругости вычисляется распределение тензора истинных напряжений ur на представительном объёме (или ячейке периодичности). Тензор ur осредняется по объёму по формуле

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_V dV \quad (4)$$

И получается эффективный (средний) тензор напряжений σ^e .

Из известного эффективного аффинора деформаций, заданного в (2), вычисляется эффективный тензор деформаций Грина $\overset{0}{E}^e$ по формуле

$$\overset{0}{E}^e = \frac{1}{2}(\Psi^e \cdot \Psi^{e*} - I) \quad (5)$$

А из эффективного аффинора деформаций и вычисленного в (4) эффективного тензора напряжений вычисляется эффективный второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа $\overset{0}{E}^e$

$$\overset{0}{\Sigma}^e = (\det \Psi^e) (\Psi^e)^{* -1} \cdot \sigma^e \cdot (\Psi^e)^{-1} \quad (6)$$

Таким образом, для каждой задачи каждой последовательности фактически задаётся эффективный тензор деформаций Грина $\overset{0}{E}^e$, а вычисляется эффективный второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа $\overset{0}{\Sigma}^e$. Поскольку разные задачи в рамках одной последовательности различаются только величиной деформации, а тип деформации сохраняется – для каждой последовательности строится зависимость эффективного тензора Пиолы-Кирхгофа от характерной величины деформации q :

$$\Sigma_{ij}^e = \alpha_{ij}^0 q + \alpha_{ij}^1 q^2 \quad (7)$$

Коэффициенты α_{ij}^0 и α_{ij}^1 каждой из 21 зависимости вычисляются с помощью метода наименьших квадратов. Далее на основе этих зависимостей оцениваются эффективные упругие свойства материала в виде квадратичной зависимости тензора Пиолы-Кирхгофа Σ^e от тензора Грина E^e

$$\Sigma_{ij}^e = C_{ijkl}^{(0)} E_{kl}^e + C_{ijklmn}^{(1)} E_{kl}^e E_{mn}^e \quad (8)$$

Таким образом, оценка эффективных упругих свойств в нелинейном виде представляет собой вычисление коэффициентов $C_{ijkl}^{(0)}$ и $C_{ijklmn}^{(1)}$ из (8).

Следует заметить, что оценка эффективных упругих свойств в линейном виде (при малых деформациях) имеет схожую идею, но существенно более простую реализацию [5, 6].

Данная методика была ранее реализована в программном модуле Fidesys Composite отечественной САЕ-системы Fidesys [19], предназначенном для оценки эффективных механических и теплофизических характеристик неоднородных материалов (композиционных, пористых и т.п.), с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [17, 18]. В данной работе впервые реализован вариант методики, в котором решение краевых задач теории упругости в Fidesys Composite осуществляется с помощью более современного метода спектральных элементов (МСЭ) [9].

Одним из основных преимуществ МСЭ является высокая точность аппроксимации решения при небольшом числе сеточных элементов по сравнению с МКЭ. Погрешность численного решения оценивается при этом: $\|u_h\| \leq C(N)$, при этом $C(N) = K_1 h^N e^{-N}$ для МСЭ и $C(N) = K_2 h^N$ для МКЭ. K_1 и K_2 – константы, h – характерный размер сетки, N – порядок элемента, u_h – численное решение. Для интегрирования по элементам в МКЭ принято использовать квадратурные формулы Гаусса. Одной из отличительных особенностей МСЭ является использование для вычисления интегралов квадратурных формул Гаусса-Лобатто-Лежандра (ГЛЛ) [7]. Для аппроксимации решения u на гексаэдральных элементах (ГЕХ) используются полиномы Лагранжа степени N , построенные на тех же ГЛЛ-узлах, что необходимы для вычисления интегралов по элементам с помощью квадратурной формулы Гаусса-Лобатто-Лежандра. Для аппроксимации решения u на тетраэдральных элементах (ТЕТ) используются функции формы, строящиеся на полиномах Якоби степени не выше N и элементах матрицы Вандермонда, построенной на основе значений полиномов Якоби в узлах элемента [8]. Для интегрирования по тетраэдральным спектральным элементам необходимо выбирать симметричные квадратурные формулы с положительными весами, например, описанные Чангом [16].

3. Результаты численных расчётов

С помощью разработанного модуля Fidesys Composite были проведены две серии численных расчётов эффективных характеристик резины, наполненной техническим углеродом. Механические свойства углерода описывались законом Гука с модулем Юнга 20000 МПа и коэффициентом Пуассона 0.2. Каучук моделировался материалом Муни-Ривлина с константами $C_1 = -0.05709$ МПа, $C_2 = 1.05046$ МПа. В обеих сериях рассматривалась упрощённая модель структуры наполненного эластомера – периодическая структура.

Задача №1. Зависимость эффективных упругих свойств наполненного эластомера от ориентации эллипсоидальных частиц наполнителя

Изучалась зависимость эффективных упругих свойств наполненного эластомера с частицами наполнителя в виде эллипсоида от ориентации частиц наполнителя в пространстве. Рассматривалась упрощённая модель геометрии композита в виде периодической структуры. Ячейкой периодичности был единичный куб. Частица наполнителя имела форму эллипсоида вращения с соотношением осей 2:1:1. Степень наполнения составляла 6.7%. Большая ось эллипсоида находилась в плоскости XY, варьировался угол её наклона по отношению к оси X от 0 до 90°.

Расчёты показали, что для коэффициента $\overset{(0)}{C}_{1111}$, отвечающего за поведение материала при деформации вдоль оси X, максимальное значение составляет 54 МПа (достигается при нулевом угле), а минимальное значение 50 МПа (достигается при угле 45 градусов). Таким образом, максимальное и минимальное значения $\overset{(0)}{C}_{1111}$ разнятся на 8%. Для прочих коэффициентов различие между максимальной и минимальной величиной ещё меньше.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод, что при данной степени наполнения и при данной форме частиц наполнителя **пространственная ориентация частиц влияет на эффективные упругие характеристики достаточно слабо.**

Расчёты для этой задачи для всех углов проводились как на тетраэдральных конечных элементах второго порядка, так и на тетраэдральных спектральных элементах третьего порядка, но большего характерного размера, нежели конечные элементы. Количество элементов сетки для МСЭ было в 3.5 раза меньше, чем для МКЭ. Результаты расчётов показали, что практически всегда различие между соответствующими коэффициентами составляло не более 1%, в редких случаях доходя до 2%. При этом более крупная сетка из спектральных элементов позволила сократить время расчёта в полтора раза. Поскольку расчёты нелинейно-упругих эффективных свойств композитов при конечных деформациях ранее сравнивались с аналитическими решениями в работах [11, 13, 15] и показали хорошее совпадение, это позволяет сделать вывод, что **метод спектральных элементов (МСЭ) применим для численной оценки эффективных характеристик композиционных материалов и позволяет получить определённый выигрыш по времени (по сравнению с МКЭ) при сохранении точности.**

Задача №2. Зависимость эффективных упругих свойств наполненного эластомера от степени наполнения

Изучалась зависимость эффективных упругих свойств наполненного эластомера от степени наполнения. Рассматривалась упрощённая модель геометрии композита в виде периодической структуры. Ячейкой периодичности был единичный куб. Частица наполнителя имела форму шара. Степень наполнения варьировалась от 5% до 30%.

Поскольку решение предыдущей задачи показало совпадение результатов для МКЭ и МСЭ в пределах 2% – данная задача рассчитывалась только с помощью МСЭ, что позволило уменьшить время расчётов.

Приведём графики для линейных коэффициентов $C_{1111}^{(0)}$, $C_{1212}^{(0)}$ и $C_{1122}^{(0)}$. Исходя из физических соображений, на графиках использовалась линейная аппроксимация.

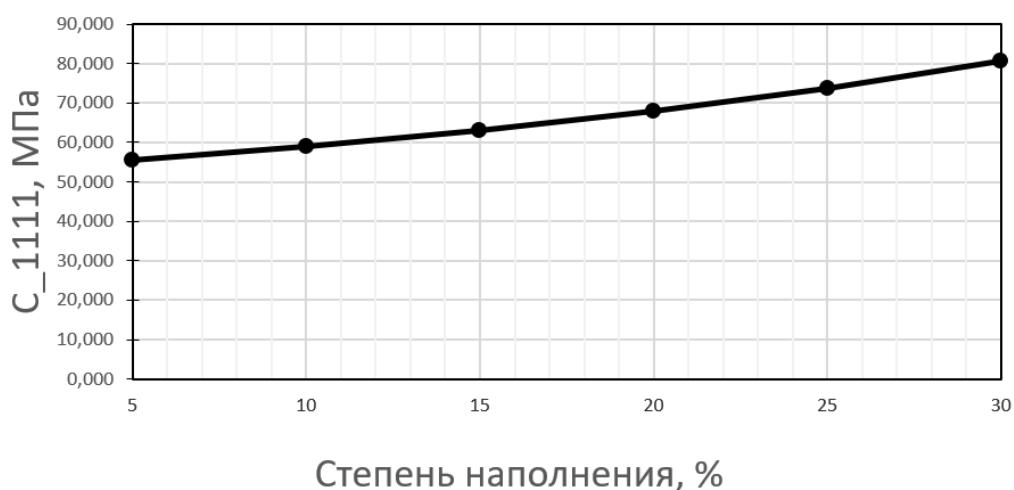


Рис. 1: Зависимость коэффициента $C_{1111}^{(0)}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

Как видно из графиков, коэффициент $C_{1111}^{(0)}$, определяющий поведение материала при растяжении/сжатии вдоль оси X, зависит от степени наполнения практически линейно (Рисунок 1): чем больше степень наполнения – тем больше $C_{1111}^{(0)}$. График для коэффициента $C_{2222}^{(0)}$ выглядит точно так же, поэтому здесь он не приведён. Аналогичный характер имеют зависимости от степени наполнения коэффициента $C_{1212}^{(0)}$ (Рисунок 2), определяющего поведение материала при сдвиговых деформациях, и коэффициента $C_{1122}^{(0)}$ (Рисунок 3).

Можно отметить, что коэффициент $C_{1212}^{(0)}$ в 20-30 раз меньше $C_{1111}^{(0)}$ – особенность структуры наполненного эластомера такова, что материал ощутимо

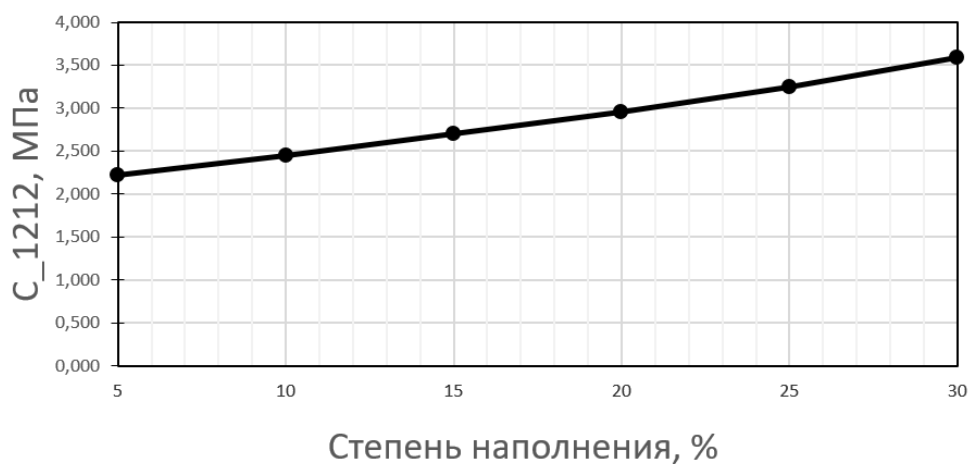


Рис. 2: Зависимость коэффициента $C_{1212}^{(0)}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

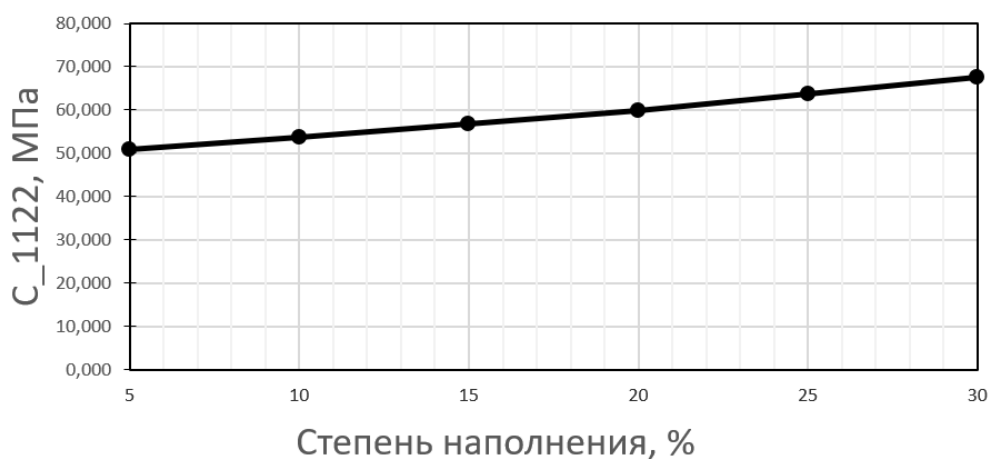


Рис. 3: Зависимость коэффициента $C_{1122}^{(0)}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

легче поддаётся сдвиговым деформациям, чем растягивающим или сжимающим.

Приведём также графики для нелинейных коэффициентов $C_{111111}^{(1)}$ и $C_{121212}^{(1)}$.

Графики показывают, что коэффициент $C_{111111}^{(1)}$ (определяющий нелинейность материала при деформации вдоль оси X), увеличивается по модулю при росте степени наполнения (Рисунок 4). График для коэффициента $C_{222222}^{(1)}$ выглядит точно так же. При этом сами коэффициенты $C_{111111}^{(1)}$

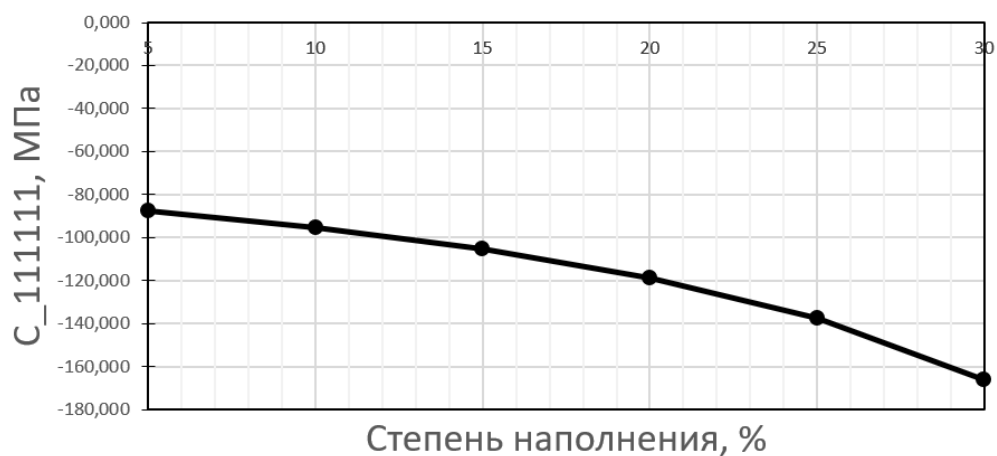


Рис. 4: Зависимость коэффициента $C_{111111}^{(1)}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

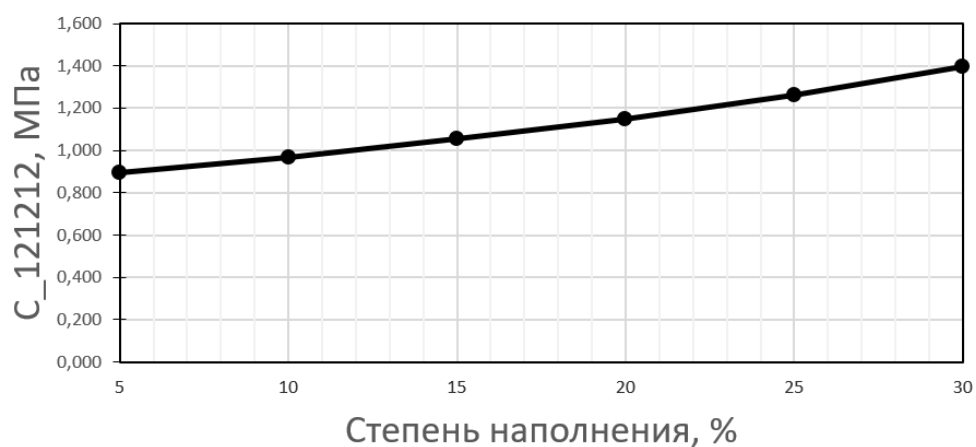


Рис. 5: Зависимость коэффициента $C_{121212}^{(1)}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

$C_{222222}^{(1)}$ и $C_{111111}^{(1)}$ являются отрицательными величинами. А коэффициент $C_{121212}^{(1)}$ (определяющий нелинейность при сдвиговых деформациях) – положителен, при увеличении степени наполнения также увеличивается (Рисунок 5). Это свидетельствует о том, что поправка от учёта нелинейных эффектов для напряжения при растягивающих деформациях является отрицательной, а при сдвиговых деформациях – положительной.

4. Заключение

Таким образом, в статье представлена методика численной оценки эффективных механических характеристик эластомерных композитов. Научная новизна этой методики определяется учётом нелинейных эффектов при конечных деформациях. Учитывается как физическая, так и геометрическая нелинейность. Эффективные определяющие соотношения представлены в виде квадратичной зависимости между осреднёнными напряжениями и деформациями. Для вычисления эффективных модулей упругости решаются последовательности краевых задач нелинейной теории упругости для деформаций разного типа и величины. Вычисления проводятся с помощью программного модуля Fidesys Composite в составе САЕ-системы Fidesys. Результаты расчётов эффективных характеристик эластомерного композита, представленные в работе, подтверждают работоспособность методики. Исследовано влияние пространственной ориентации частиц наполнителя и степени наполнения на эффективные свойства. В частности, установлено, что влияние ориентации эллипсоидальных частиц наполнителя на эффективные свойства достаточно мало при достаточно малой степени наполнения. Кроме того, проведено сравнение численных результатов, полученных для одних и тех же задач с помощью МКЭ и МСЭ, показавшее совпадение результатов с хорошей точностью (порядка 1%).

Полученные результаты позволяют оценить влияние нелинейных эффектов на механические свойства наполненного эластомера для деформаций различной величины. Так, например, из рисунков (Рисунок 1 и Рисунок 4) видно, что при одноосном растяжении величиной деформации порядка 15% поправка от учёта нелинейных эффектов для напряжения в направлении той же оси составит примерно 25%.

Авторы выражают благодарность профессору МГУ имени М.В. Ломоносова В.А. Левину за постановку задачи и внимание при её выполнении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокомпозита // Каучук и резина, №4, 2010. – С. 22–25.
2. Левин В.А. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 456 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т. I).
3. Левин В.А., Зингерман К.М. Точные и приближённые аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 400 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т. III).
4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М., Наука, 1980. – 512 с.

5. Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных механических характеристик резинокордных композитов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. №17, 2012. – С. 29–40.
6. Яковлев М.Я., Янгирова А.В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов для случая двухслойного материала [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона, №2, 2013. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>
7. Bronstein J.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Muchkig H. Taschenbuch der Mathematik, 4. Auflage. Harri Deutch, Frankfurt a. M., 1999.
8. Hesthaven J.S., Teng C.H. Stable Spectral Methods on Tetrahedral Elements, SIAM Journal of Scientific Computing, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 2352-2380.
9. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of Seismological Society of America, 88(2), 1998
10. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.
11. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya., Zingerman K.M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case [Электронный ресурс] // Model. Simulat. Eng., 2016. – Режим доступа: <http://www.hindawi.com/journals/mse/aip/9010576/>
12. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.
13. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct., V. 131, 2015. – P. 25–36.
14. Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, V. 158, I. 1, article 012094. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/pdf>
15. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of

porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.

16. Zhang L. Cui T., Liu H. A set of symmetric quadrature rules on triangle and tetrahedral, Journal of Computational Mathematics, Vol. 27, No 1, 2009, pp. 89-96.
17. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.
18. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.
19. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://cae-fidesys.ru/>

REFERENCES

1. Gamlitskiy U.A., Levin V.A., Filippenko E.V. Yakovlev M.Y., On the problem of an elastomeric nanocomposite unit cell stress field calculation // Rubber №4, 2010. – p. 22–25.
2. Levin V.A., Models and methods. Defect inception and growth. - Moscow: FIZMATLIT, 2015. - 456 p. (Nonlinear computational mechanics of strength / Under the general editorship of VA Levin: In 5 volumes, vol. I).
3. Levin V.A., Zingerman K.M., Exact and approximate analytical solutions for finite deformations and their imposition. - Moscow: FIZMATLIT, - 400 p. (Nonlinear computational mechanics of strength / Under the general editorship of Levin V.A.: In 5 volumes, vol. III).
4. Lurie A.I., Nonlinear theory of elasticity. - M., Science, 1980. - 512 p.
5. Yakovlev M.Y., On the numerical estimation of effective mechanical characteristics of rubber-cord composites // Bulletin of Tver State University. Series: Applied Mathematics. № 17, 2012. - P. 29-40.
6. Yakovlev M.Y., Yangirova A.V., Method and results of a numerical evaluation of the effective mechanical properties of rubber-cord composites for the case of a two-layer material. [Electronic resource]. // Deng Engineering Digest, No. 2, 2013. - Access mode: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>
7. Bronstein J.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Muchkig H. Taschenbuch der Mathematik, 4. Auglage. Harri Deutch, Frankfurt a. M., 1999.
8. Hesthaven J.S., Teng C.H. Stable Spectral Methods on Tetrahedral Elements, SIAM Journal of Scientific Computing, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 2352-2380.

9. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bulletin of Seismological Society of America*, 88(2), 1998
10. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. *Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.
11. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya., Zingerman K.M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case [Электронный ресурс] // *Model. Simulat. Eng.*, 2016. – Режим доступа: <http://www.hindawi.com/journals/mse/aip/9010576/>
12. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.
13. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // *Compos. Struct.*, V. 131, 2015. – P. 25–36.
14. Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, V. 158, I. 1, article 012094. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/pdf>
15. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // *Adv. Eng. Softw.*, V. 86, 2015. – P. 80–84.
16. Zhang L. Cui T., Liu H. A set of symmetric quadrature rules on triangle and tetrahedral, *Journal of Computational Mathematics*, Vol. 27, No 1, 2009, pp. 89-96.
17. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.
18. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.
19. Fidesys LLC official web-site [Electronic resource] - Access mode: <http://cae-fidesys.com/en>

получено 22.05.2017

принято в печать 14.09.2017