

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

### Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3 538.9(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-290-303

## ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСИ В МАТЕРИАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЗОК<sup>1</sup>

Д. А. Индейцев<sup>2</sup>, Ю. А. Мочалова<sup>3</sup>

### Аннотация

В рамках континуальной механики разрабатывается двухкомпонентная модель материала, содержащего примесь, и исследуется взаимное влияние диффузии примеси и деформации основной структуры. Выводится уравнение движения примеси — обобщенное уравнение диффузии, которое позволяет учитывать не только перенос примеси за счет движения основной структуры, но и влияние деформации на коэффициент диффузии. Рассмотрены модельные задачи, которые качественно описывают два важнейших явления, экспериментально наблюдаемые при воздействии вибрации на материалы с примесью, локализацию концентрации примеси и падение обобщенной жесткости образца. В обеих задачах получены приближенные аналитические решения, которые хорошо согласуются с проведенными ранее численными исследованиями и экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* континуальная механика, двухкомпонентная модель, диффузия, деформация, приближенное аналитическое решение.

*Библиография:* 13 название.

## IMPURITY DIFFUSION IN MATERIAL UNDER VIBRATION LOADS

D. A. Indeytsev, Yu. A. Mochalova

### Abstract

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 31

<sup>2</sup>Индейцев Дмитрий Анатольевич, член-корреспондент Российской академии наук, научный руководитель Институт Проблем Машиноведения РАН, Dmitry.Indeytsev@gmail.com

<sup>3</sup>Мочалова Юлия Алексеевна, старший научный сотрудник Института Проблем Машиноведения РАН

Within the framework of the continuum mechanics, the authors develop a two-component impurity-containing model and investigate the mutual influence of impurity diffusion and the basic structure strains. They derive the equation of impurity motion — the generalized diffusion equation, which allows them to take into account not only impurity transport due to the basic structure motion, but also the effect of strain on the diffusion coefficient. The paper considers modeling problems that qualitatively describe two most important phenomena that are observed experimentally under vibration on materials with an admixture, localization of the impurity concentration, and the drop in the generalized rigidity of the sample. In both problems, approximate analytical solutions are obtained that are in good agreement with earlier numerical studies and experimental data.

*Keywords:* continuum mechanics, two-component material model, diffusion, deformation, approximate analytical solutions.

## 1. Введение

Вибрационная механика, как специальный раздел динамических задач механики сплошной среды, занимает особое место в исследовании явления массопереноса в неоднородных средах (в самом общем случае, это движение примеси в твердом теле, просачивание жидкости через твердое тело или другую жидкость, движение особых жидкостей). Подробное изложение основных проблем и методов вибрационной механики представлено в работе [1]. Здесь мы будем рассматривать проблему взаимного влияния диффузии примеси и деформации упругой среды, подвергающейся вибрационному воздействию. Известно, что нестационарные механические нагрузки приводят к перераспределению примеси в материале, что может оказать значительное влияние на механические свойства образца [2].

В большинстве исследований, посвященных диффузии в твердых телах, используются феноменологические модели, которые позволяют учитывать только влияние напряженного состояния среды на диффузию примеси [3]. При этом остается открытым вопрос как кинетические процессы в материале (диффузия примеси, осаждение частиц примеси на основную структуру) влияют на механические свойства материала. Для описания материала, содержащего примесь, в [4, 5] разработана (предложена) двухкомпонентная континуальная модель. Предполагалась, что взаимодействие между примесью и основной структурой определяется внутренними силами взаимодействия, которые зависят от деформации материала (напряженного состояния) и массообменом между частицами примеси и основной структуры. В рамках этой модели в [5] была получена система определяющих уравнений и исследовано статическое напряженное состояние материала с примесью. В работе [4] предложена модель для описания процесса структурной перестройки в одномерном образце под действием динамической нагрузки. Здесь использовались упрощенные балансовые уравнения, не содержащие конвективной диффузионной части и изменение механических свойств материала было вызва-

но структурной перестройкой — абсорбцией примеси на основную структуру (массообменом между частицами примеси и основной структурой). В работе [7] анализ напряженно-деформируемого состояния материала с примесью был проведен с помощью методов статистической физики. Было получено хорошее качественное совпадение результатов с результатами, которые дает двухкомпонентная механическая модель [4, 5]. В работе [8] выведено уравнение движения примеси — обобщенное уравнение диффузии, позволяющее учитывать влияние деформации основной структуры на перераспределение примеси. Рассмотрен одномерный стержень под действием циклической нагрузки, показано, что если не учитывать массообмен между компонентами среды, то частицы примеси локализуется в центральной части образца.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [5] и [8]. Ее цель — в рамках двухкомпонентной модели описать динамику материала, содержащего примесь, и исследовать взаимное влияние диффузии примеси и деформации основной структуры. Предполагается, что свободные частицы примеси могут встраиваться в основную структуру и, таким образом, влиять на ее механические свойства. В данной работе мы ограничимся исследованием частных (предельных) случаев, которые качественно описывают два важнейших явления, экспериментально наблюдаемых при воздействии вибрации на материалы с примесью, локализация концентрации примеси и падение обобщенной жесткости образца. В обеих задачах получены приближенные аналитические решения, которые хорошо согласуются с проведенными ранее численными исследованиями и экспериментальными данными. Данные модельные задачи позволяют качественно исследовать особенности диффузионных процессов при нестационарном внешнем воздействии и могут являться тестовыми для анализа сложных задач о взаимном влиянии диффузионных и динамических процессов в многокомпонентных средах, и связанных с ними проблем механики прочности материалов [6].

## 2. Уравнение движения примеси. Обобщенное диффузионное уравнение

В рамках двухкомпонентного подхода [5] будем рассматривать две взаимопроникающие среды: динамически деформируемую основную структуру тела (например, решетку металла) и подвижную примесь в теле. Будем предполагать, что возможен массообмен между диффундирующим веществом и основной структурой. Совместное движение и связь этих двух сред описываются в абсолютной системе координат следующей системой уравнений :  
уравнение движения основной структуры

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} - J \vec{v}_1 - \vec{R}, \quad (1)$$

уравнение движения подвижной примеси

$$-\vec{\nabla} p = \rho_2 \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + J \vec{v}_2 + \mathbf{R}, \quad (2)$$

уравнение баланса масс основной структуры

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_1) = -J, \quad (3)$$

уравнение баланса масс подвижной примеси

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_2 \mathbf{v}_2) = J, \quad (4)$$

уравнение состояния основной структуры

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\varepsilon) \quad (5)$$

уравнение состояния подвижной примеси

$$p = p(\rho_2) \quad (6)$$

Здесь  $\rho_1, \vec{v}_1, \vec{\sigma}, \varepsilon$  — плотность, вектор скорости, тензор напряжений и деформация первой компоненты соответственно;  $\rho_2, \mathbf{v}_2, p$  — плотность, вектор скорости и давление подвижной примеси (вторая компонента). Взаимодействие между компонентами было определено в [5],  $J$  — источниковый член,  $\vec{R}$  — внутренняя сила взаимодействия основной структуры и подвижной примеси

$$\mathbf{R} = \mu(\varepsilon) \rho_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (7)$$

Здесь  $\mu(\varepsilon)$  — коэффициент сопротивления. Далее реактивными силами  $J\mathbf{v}_1$  и  $J\mathbf{v}_2$  в уравнениях (1) и (2) будем пренебрегать.

Система уравнений (1)–(7) дополненная начальными и граничными условиями описывает динамику среды, содержащей примесь. Введем относительную скорость движения примеси  $\vec{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ . Подставляя  $\mathbf{v}_2$ , выраженную через относительную скорость движения примеси, в (2) и предполагая, что переносные силы инерции много больше относительных, получим

$$\vec{v} = -\frac{1}{\mu(\varepsilon)\rho_2} \left( \vec{\nabla} p + \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right). \quad (8)$$

Подставляя  $\vec{v}$  в выражение (4), получим диффузионное уравнение, учитывающее влияние деформации и силы инерции:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{1}{\mu(\varepsilon)} \left( \vec{\nabla} p + \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) - \rho_2 \mathbf{v}_1 \right] = J. \quad (9)$$

Дифференцируя уравнение состояния (6) по  $\rho_2$  и предполагая, что скорость звука в примеси  $c_2^2 = \partial p / \partial \rho$  мало меняется, уравнение (9) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left[ D(\varepsilon) \left( \vec{\nabla} \rho_2 + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) - \rho_2 \mathbf{v}_1 \right] = J, \quad (10)$$

где  $D(\varepsilon) = c_2^2/\mu(\varepsilon)$  — коэффициент диффузии, который пропорционален характерному размеру проницаемости основной структуры и зависит от сферической деформации [8]. Таким образом, полученное уравнение определяет движение примеси. Первое слагаемое

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ D(\varepsilon) \left( \vec{\nabla} \rho_2 + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right] \quad (11)$$

определяет диффузионный перенос примеси. Второе слагаемое  $\vec{\nabla} \cdot [\mathbf{v}_s \rho_f]$  определяет перенос примеси за счет движения основной структуры (ранее это слагаемое не учитывалось [8]). Заметим, что полученное обобщенное уравнение диффузии (10) отличается от известных адвективно-диффузионных уравнений (см. [9]) тем, что коэффициент диффузии зависит от деформации основной структуры, а так же наличием в первом «диффузионном» слагаемом (11) члена, определяемого вибрацией основной структуры.

Если нет деформации основной структуры, то уравнение (10) сводится к классическому уравнению диффузии с коэффициентом диффузии  $D_0 = D(0)$ . Поэтому в первом приближении  $D$  определяется экспериментальными значениями [5]. Для малых деформаций можно считать, что значение коэффициента диффузии  $D$  линейно зависит от  $\varepsilon$  и  $D(\varepsilon) = D_0 - D_1 \varepsilon$ , где  $D_1 > 0$ .

Система уравнений (1), (3), (5) и (10) позволяет нам определить динамику перераспределения примеси при деформации материала. Заметим, что при решении конкретных задач уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями.

### 3. Постановка задачи. Система определяющих уравнений

В качестве примера рассмотрим одномерный стержень длиной  $2L$ , содержащий примесь, под воздействием циклической нагрузки  $F_0 \sin \omega t$ ,  $\omega$  — частота нагрузки. Обозначим  $\rho_1^+$  плотность частиц примеси, осажденных на основную структуру, и  $\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_1^+$ , здесь  $\rho_1^0 = \text{const}$ . Тогда для плотности осажденных частиц из уравнения (3) получим

$$\frac{\partial \rho_1^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1^+ v_1) = -J. \quad (12)$$

Заметим, что  $\rho_1^+ \ll \rho_1$  и в уравнении динамики стержня (1) можно считать  $\rho_1 = \text{const}$ . Кроме того в большинстве случаев влиянием внутренней силы взаимодействия  $\mathbf{R}$  на движение основной структуры в уравнении (1) можно пренебречь.

Согласно [5], напряженное состояние основной структуры зависит от плотности осажденной примеси  $\rho_1^+$  и уравнение состояния для первой компоненты (5) может быть записано в виде

$$\sigma = E(\rho_1^+) \varepsilon, \quad (13)$$

где  $E(\rho_1^+)$  — обобщенный модуль Юнга.

Источниковые члены запишем в следующем виде  $J = -\alpha\rho_2$ , то есть будем считать, что возможно только встраивание частиц в основную структуру. Коэффициент  $\alpha$  характеризует скорость осаждения частиц примеси на кристаллическую решетку и определяется из экспериментальных данных. Более подробно смотри [4, 5].

Переходя в уравнениях (1), (10) и (12) к перемещениям  $u$  ( $v_1 = \partial u / \partial t$ ,  $\varepsilon = \partial u / \partial x$ ), получим следующую систему определяющих соотношений для рассматриваемого одномерного стержня

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \sigma = E(\rho_1^+) \varepsilon, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho_1^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_1^+ \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \alpha \rho_2, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( D_0 - D_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -\alpha \rho_2 \quad (16)$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$u|_{x=0} = 0, \quad \sigma|_{x=L} = F_0 \sin \omega t, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( D_0 - D_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} = 0. \quad (18)$$

$$\rho_2|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \rho_1^+|_{t=0} = 0$$

Введем безразмерные величины (параметры) следующим образом

$$t_1 = \frac{D_0}{L^2} t, \quad x_1 = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{L}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \Omega = \frac{L^2}{D_0} \omega, \quad \bar{\sigma} = \frac{L^2}{\rho_1 D_0^2} \sigma, \\ \bar{E}_0 = \frac{L^2}{\rho_1 D_0^2} E_0, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha L^2}{D_0}, \quad \beta = D_1/D_0, \quad \eta = \frac{D_0^2}{c_2^2 L^2}.$$

Тогда систем уравнений (14)–(16) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_1^2}, \quad \bar{\sigma} = \bar{E}(\bar{\rho}_1^+) \varepsilon, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \left( 1 - \beta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial x_1} + \eta \bar{\rho}_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_1^2} \right) - \bar{\rho}_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_1} \right] = -\bar{\alpha} \bar{\rho}_2, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1^+}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \bar{\rho}_1^+ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_1} \right] = \bar{\alpha} \bar{\rho}_2. \quad (21)$$

с граничными условиями

$$\bar{u}|_{x_1=0} = 0, \quad \bar{\sigma}|_{x_1=1} = \bar{F}_0 \sin \Omega t_1, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left( 1 - \beta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial x_1} + \eta \bar{\rho}_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_1^2} \right) - \bar{\rho}_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_1} \Big|_{x_1=1} = 0,$$

где  $\bar{F}_0 = L^2 F_0 / \rho_1 D_0^2$  и начальные условия

$$\bar{\rho}_2|_{t_1=0} = \bar{\rho}_0(x), \quad \bar{\rho}_1^+|_{t_1=0} = 0. \quad (23)$$

Система уравнений (19) - (23) сложна для прямого математического анализа, так как описывает взаимосвязь динамических процессов, имеющих разные временные масштабы: волновые процессы в основной структуре, диффузия примеси и массообмен между компонентами. Поэтому мы рассмотрим ряд частных случаев. Далее черту над величинами (верхнее подчеркивание) опускаем.

#### 4. Локализация диффузионного процесса

Пусть  $J = 0$ , то есть нет массообмена между компонентами. В этом случае частицы примеси не оседают на решетку,  $\rho_1^+ = 0$ , и модуль Юнга материала остается постоянным  $E = E_0$ . Таким образом, система уравнений (19)–(23) распадается на две задачи. Первая задача определяет колебания стержня под действием вибрационной нагрузки, приложенной на его концах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (24)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = F_0 \sin \Omega t_1. \quad (25)$$

Здесь  $c_0^2 = (cL/D_0)^2$ ,  $c = \sqrt{E_0/\rho_1}$  — скорость звука в стержне. Естественно считать колебания стержня установившимся процессом и таким образом, решение задачи (24)–(25) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{c_0 F_0}{\Omega \cos(\Omega/c_0)} \sin \Omega t \sin(\Omega x/c_0).$$

Заметим, что  $\Omega/c_0 \ll 1$  и

$$u(x, t) = F_0 x \sin \Omega t. \quad (26)$$

Вторая задача описывает перераспределение примеси в стержне под действием вибрационной нагрузки

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 - \beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \eta \rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( 1 - \beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \eta \rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=1} = 0, \quad (28)$$

$$\rho_2|_{t=0} = \rho_0(x). \quad (29)$$

Обратимся к исследованию обобщенного уравнения диффузии. Заметим, что если деформации основной структуры нет, то уравнение (27) превращается в классическое уравнение диффузии. Решение соответствующей задачи

Коши известно и диффузия приводит к равномерному распределению плотности примеси по длине стержня

$$\rho_2 = \int_0^1 \rho_0 dx \quad \text{for } t \rightarrow \infty.$$

Если в начальный момент времени распределение примеси постоянная величина  $\rho_0 = \text{const}$ , то диффузии примеси не происходит.

Если считать, что коэффициент диффузии не зависит от деформации стержня, то задача (27)–(29) сводится к следующей

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=1} = 0, \\ \rho_2|_{t=0} &= \rho_0(x). \end{aligned}$$

Здесь  $u(x, t)$  определяется (26). Это так называемое адвективно-диффузионное уравнение с переменным (периодическим) коэффициентом, которое подробно исследовано (смотри, например [9]) и хорошо поддается численному анализу. Диффузия приводит к перераспределению примеси с последующими колебаниями концентрации примеси около среднего значения, которые вызваны вибрационным воздействием. Максимальные значения концентрации примеси достигаются на концах и в центральной части образца.

Обратимся к общему случаю (27)–(29). Будем предполагать, что при вибрации стержня с частотой  $\Omega$  плотность примеси  $\rho_2$  (а так же производные  $\partial \rho_2 / \partial x$ ,  $\partial^2 \rho_2 / \partial x^2$ ) мало меняется за период колебаний, то есть

$$\langle \rho_2(x, t) \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \rho_2(x, t) dt = \rho_2(x, t)$$

Тогда подставляя (26) в (27)–(29) и усредняя полученную систему по интервалу  $[t, t + 2\pi/\Omega]$ , получим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \gamma x \rho_2 \right] \quad (30)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \gamma x \rho_2 \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (31)$$

$$\rho_2|_{t=0} = \rho_0, \quad (32)$$

где  $\gamma = \beta \eta A_0^2 \Omega^2 / 2$ . Решение задачи (30)–(32) будем искать с помощью метода разделения переменных. Поэтому сначала решим соответствующую задачу Штурма-Лиувилля, а именно определим те значения параметра  $\lambda$  при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$L\varphi = -\lambda\varphi, \quad L\varphi = (\varphi_x + \gamma x \varphi)'_x \quad (33)$$



удовлетворяющему граничным условиям

$$\varphi_x|_{x=0} = 0, \quad \varphi_x + \gamma \varphi|_{x=1} = 0. \quad (34)$$

Заметим, что преобразованиями  $\varphi = \exp(-\gamma\zeta^2/4)\psi$  и  $x = \sqrt{\gamma}\zeta$  уравнение (33) приводится к уравнению параболического цилиндра стандартной формы  $v_{\zeta\zeta} - [\frac{1}{4}\zeta^2 - \frac{1}{2} - \lambda]\psi = 0$ , решение которого удобно записать через вырожденные гипергеометрические функции [10]. Тогда решение (33) может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = \left[ a {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) + b x {}_1F_1\left(\frac{\gamma - \lambda}{2\gamma}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) \right] e^{-\gamma x^2/2}, \quad (35)$$

где  ${}_1F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция,  $a, b$  — неизвестные постоянные. Дифференцируя (35) по  $x$  и подставляя полученные результаты в граничные условия (34), получим, что  $b = 0$  и уравнение для определения собственных чисел  $\lambda$  имеет вид

$$\gamma {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) - (\gamma + \lambda) {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) = 0. \quad (36)$$

Исследуя (36) для различных значений параметра  $\gamma$ , получим, что оператор  $L$  имеет простой дискретный спектр собственных чисел, начинающийся с  $\lambda_0 = 0$ :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Соответствующие собственные функции определяются выражением

$$\varphi_k(x) = {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) \exp(-\gamma x^2/2)/N_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (37)$$

где  $N_k = \left[ \int_0^1 {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) e^{-\gamma x^2/2} dx \right]^{1/2}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) — нормирующие коэффициенты.

Заметим, что при  $\gamma \rightarrow 0$  собственные числа спектральной задачи (33)–(34)  $\lambda_k \rightarrow (\pi k)^2$ , а соответствующие собственные функции  $\varphi_k \rightarrow \cos \pi k x$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . При  $\gamma < 1$  это дает хорошее приближение собственных чисел и собственных функций оператора  $L$ .

Будем искать решение исходной задачи Коши (30)–(32) в виде разложения по найденным собственным формам

$$\rho_2(x, t) = \varphi_0(x)q_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)q_k(t) \quad (38)$$

Подставляя (38) в (30)–(32), получим для определения обобщенных функций  $q_k(t)$  следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= 0, \\ \dot{q}_k + \lambda_k q_k &= 0, \quad k = 1, \dots \\ q_k|_{t=0} &= (\varphi_k, \rho_0(x)), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Здесь  $(\varphi_k, \rho_0(x)) = \int_0^1 \rho_0(x) \varphi_k(x) dx$ . Тогда решение задачи Коши (30)–(32) имеет вид

$$\rho_2(x, t) = c_0 \exp(-\gamma x^2/2) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) \exp(-\lambda_k t - \gamma x^2/2), \quad (39)$$

$$c_k = \frac{1}{N_k} \int_0^1 \rho_0(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Собственные числа  $\lambda_k$  определяются из уравнения (36). Если  $\rho_0 = \text{const}$ , то при больших  $t$  плотность  $\rho_2(x, t)$  стремиться к стационарному решению (30), которое имеет вид

$$\rho_2(x, t) \rightarrow \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \frac{\rho_0}{\text{erf}\sqrt{\gamma/2}} \exp(-\gamma x^2/2), \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, полученное приближенное аналитическое решение задачи показывает, что влияние колебаний приводит к накоплению примеси в центральной части стержня. Если рассматривать в качестве примеси растворенный в металле водород, то полученное решение качественно описывает экспериментально наблюдаемое явление перераспределение водорода в стальном образце под действием длительной циклической нагрузки [2, 12]. Кроме того, решение согласуется с численными результатами, полученными в [8].

## 5. Структурные изменения в материале

Рассмотрим второй частный случай. Будем пренебрегать конвективной диффузионной частью в уравнениях баланса масс (15) и (16), то есть будем предполагать, что плотности компонент почти не меняются по длине стержня  $\rho_2(x, t) = \rho_2(t)$ ,  $\rho_1^+(x, t) = \rho_1^+(t)$ . Тогда решение уравнений (20) и (21) имеет вид

$$\rho_2 = \rho_0 \exp\{-\alpha t\}, \quad \rho_1^+ = \rho_0(1 - \exp\{-\alpha t\}).$$

Модуль упругости в соответствии с моделью, предложенной в [5], принимает вид

$$E(\rho_1^+) = 1/[1 + \kappa(1 - \exp\{-\alpha t\})]$$

и уравнение движения основной структуры (19) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [1 + \kappa(1 - \exp\{-\alpha t\})] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \bar{F}_0 [1 + \kappa(1 - \exp\{-\alpha t\})] \sin \Omega t$$

где  $\kappa$  — безразмерный коэффициент, определяющий отношение модуля Юнга «чистого» материала к модулю Юнга материала со встроенными частицами примеси.

Считая  $\alpha/\Omega \ll 1$  (малый параметр), будем решать задачу используя метод многих масштабов. Введем два масштаба времени  $t$  и  $\tau = \alpha t$  и для нулевого приближения получим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \left[1 + \kappa(1 - \exp\{-\tau\})\right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},$$

$$u_0|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = \bar{F}_0 [1 + \kappa_2(1 - \exp\{-\tau\})] \sin \Omega t,$$

решение которой имеет вид

$$u_0(x, t, \tau) = \frac{\bar{F}_0 \Omega_0(\tau)}{\Omega^2 \cos \Omega_0(\tau)} \sin \Omega_0(\tau) x \sin \Omega t,$$

где  $\Omega_0(\tau) = \Omega \sqrt{1 + \kappa(1 - e^{-\tau})}$ .

Таким образом в предположении, что  $\alpha \ll 1$ , получим «медленное» падение жесткости конструкции и увеличение амплитуды колебаний. Если  $\alpha \gg 1$ , то свободный водород встраивается в решетку со скоростью большей скорости звука в материале и структурная перестройка в материале (изменение обобщенной жесткости конструкции) происходит «почти» мгновенно. Из экспериментальных данных известно, что скорость таких изменений действительно может быть больше скорости звука в материале [4].

Замечание. В данной модели мы считали  $\alpha$  постоянной величиной, но по всей видимости  $\alpha$ , как и коэффициент диффузии, должна зависеть от деформации основной структуры, а возможно и концентрации примеси.

## 6. Заключение

Предложенная двухкомпонентная модель, которая позволяет описать диффузию примеси в деформируемом материале и изменения структуры материала (в частности, водородного охрупчивания металла) и сводится к взаимодействию трех «конкурирующих» процессов:

- диффузия примеси, скорость которой может зависеть от деформации основной структуры;
- осаждение примеси на основную структуру, которое в общем случае так же зависит от деформации тела;
- нестационарно-волновые процессы в материале

При решении конкретных задач определяющим является то, что эти процессы имеют различные масштабы во времени.

Мы рассмотрели два частных случая. Первый, когда массообменом примеси и основной структуры можно пренебречь (источниковые члены  $J = 0$ ). Показано, что в этом случае влияние циклической нагрузки приводит к локализации примеси в центральной части образца. Во втором предельном случае предполагается, что скорость осаждения примеси на основную структуру

много больше скорости диффузии и диффузионно-конвективными членами в балансовых уравнениях можно пренебречь. Показано, что это приводит к структурным изменениям в материале, а именно, к падению обобщенной жесткости образца.

В общем случае процессы диффузии и массообмена невозможно разделить. Однако, при анализе задач о взаимном влиянии диффузии примеси и напряженно-деформируемого состояния среды можно понять как соотносятся скорости этих процессов. Например, если скорость диффузии примеси больше скорости ее осаждения на основную структуру, то можно ожидать, что под действием вибрации примесь сначала локализуется в некоторой области образца и частицы примеси встраиваются в основную структуру именно в этой локальной области, что приводит к локальному изменению структуры образца. Если же скорость осаждения примеси значительно превосходит скорость диффузии, тогда примесь встраивается в основную структуру не успевая локализоваться и структурная перестройка, а так же изменение механических свойств происходит по всей длине образца.

В заключении заметим, что при решении конкретных задач система определяющих уравнений может быть исследована с помощью метода многих масштабов и метода усреднения и решение предлагается искать в виде (26) и (39), считая коэффициенты неизвестными функциями времени.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блехман И. И. Вибрационная механика: М.: Наука, 1994
2. Polyanskiy, A. M., Polyanskiy, V. A., Popov-Diumin, D. B.: Diagnostics of mechanical condition of structural material by method of high-temperature hydrogen vacuum-extraction. In Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses, Vienna, Austria, 589–592 (2005)
3. Aifants, E. C.: On the problem of diffusions in solids. *Acta Mechanica*, **37**, 265–296 (1980)
4. Indeitsev, D. A., Naumov, V. N., Semenov, B. N. and Belyaev, A. K.: Thermoelastic waves in a continuum with complex structure. *ZAMM*, **89**, 279–287 (2009)
5. Indeitsev, D. A., Mochalova Yu. A.: Mechanics of multi-component media with exchange of mass and non-classical supplies. In: *Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass*. Springer, 165–194 (2014)
6. Левин В. А. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 1. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. Под ред. В. А. Левина. М.: Физматлит, 2014. – 452 с.
7. Indeitsev, D. A., Osipova, E. V.: Hydrogen embrittlement under load as a first-order phase transition. *Doklady Physics*, **51**, 1901–1906 (2009)

8. Индейцев, Д. А., Семенов, Б. Н., Стерлин М. Д.: Явление локализации процесса диффузии в динамически деформируемом твердом теле. ДАН, **443**, 583–585 (2012)
9. J. David Logan: An introduction to nonlinear partial differential equations. Wiley-Interscience, 397 (2008)
10. Abramowitz, M., and Stegun I. A.: Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover: New York (1972)
11. Polyanin A. D., Manzhirov A. V.: Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton-London: Chapman and Hall/CRC Press (2007)
12. Belyaev, A. K., Polyanskiy, V. A., Yakovlev, Yu. A. Stresses in pipeline affected by hydrogen. Acta Mechanica, **223**, 1611–1619 (2012)

## REFERENCES

1. Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York
2. Aifants, E.C.1980, "On the problem of diffusions in solids", *Acta Mechanica*, 37, pp. 265–296
3. Blekhman, I.I. 2000, *Vibrational Mechanics*, Word Scientific, Singapore
4. Belyaev, A.K., Polyanskiy, V.A. & Yakovlev, Yu.A. 2012 "Stresses in pipeline affected by hydrogen". Acta Mechanica, 223, pp. 1611–1619
5. Indeitsev, D.A. & Osipova, E.V. 2009, "Hydrogen embrittlement under load as a first-order phase transition", *Doklady Physics*, 51, pp. 1901–1906
6. Indeitsev, D.A., Naumov, V.N., Semenov, B.N. & Belyaev, A.K. 2009, "Thermoelastic waves in a continuum with complex structure", *ZAMM*, 89, pp.279–287
7. Indeitsev, D.A., Semenov, B.N. & Sterlin, M. D. 2012, "The phenomenon of localization of diffusion process in a dynamically deformed solid". *Doklady Physics*, 57, pp. 171–173
8. Indeitsev, D.A., Mochalova Yu.A. 2014, "Mechanics of multi-component media with exchange of mass and non-classical supplies", In: Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass, Springer, pp. 165–194
9. Papanicolaou G.P. 1995, "Diffusion in Random Media". In: Surveys in Applied Mathematics, Springer, pp 205–253
10. Polyanin A.D., Manzhirov A.V.: 2007, *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Boca Raton-London: Chapman and Hall/CRC Press

11. Polyanskiy, A.M., Polyanskiy, V.A. & Popov-Diumin, D.B. 2005, "Diagnostics of mechanical condition of structural material by method of high-temperature hydrogen vacuum-extraction' (Proc. of the Sixth International Congress on Thermal Stresses) Vienna, Austria, pp.589–592
12. Indeitsev D.A. & Mochalova Yu.A. 2017 "On the Problem of Diffusion in Materials Under Vibrations', Chapter Mechanics for Materials and Technologies, Volume 46 of the series Advanced Structured Materials, pp 183-193.
13. Indeitsev, D. & Mochalova D. 2015, "Stress Stage Influence on Diffusion Process in Materials', (Proc. of ICNAAM 2014, 22-28 September 2014, Rhodes, Greece) AIP Conference Proceedings 1648, 300004
14. Levin V.A. 2014, *Nonlinear computational mechanics of strength*, Vol.1, Models and methods. Formation and development of defects, Ed. Levin, V.A. Phizmatlit, Moscow, 452p.

получено 22.05.2017

принято в печать 14.09.2017