

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511.42

КАК ЗАВИСЯТ ДИСКРИМИНАНТЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ? ¹

Н. В. Бударина (г. Дублин), В. И. Берник (г. Минск),
Х. О'Доннелл (г. Дублин)

Аннотация

Пусть $n \in \mathbb{N}$ – фиксированное число, $Q > 1$ – некоторый натуральный параметр, и $\mathcal{P}_n(Q)$ обозначает множество целочисленных многочленов степени n и высоты, не превосходящей Q . Для заданного многочлена $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ степени n , число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

называется дискриминантом многочлена $P(x)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ – корни многочлена $P(x)$.

В данной работе мы изучаем следующую проблему о числе многочленов с малыми дискриминантами: для заданного $0 \leq v \leq 2$ и достаточно большого Q оценить величину $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$, где $\mathcal{P}_n(Q, v)$ обозначает класс многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ таких, что

$$0 < |D(P)| \leq Q^{2n-2-2v}.$$

Первые результаты по оценкам количества многочленов с заданными дискриминантами получил Х. Давенпорт в 1961 году, что имело важное значение при решении проблемы Малера.

В данной работе впервые найдена точная верхняя и нижняя оценка для $\#\mathcal{P}_3(Q, v)$ при дополнительном условии на взаимное расположение корней полиномов.

Интересно, что величина $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ принимает наибольшее значение, когда все корни многочленов близки друг к другу. Если же близки только k , $2 \leq k < n$, корней, то величина $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ будет меньше.

Ключевые слова: целочисленные многочлены, приближения алгебраическими числами, дискриминанты многочленов.

Библиография: 15 названий.

¹Работа частично поддержана фондом РФФИ (грант 14-01-90002 Бел.) и фондом БРФФИ (грант Ф14Р-034).

HOW DOES THE DISCRIMINANT OF INTEGER POLYNOMIALS DEPEND ON THE DISTRIBUTION OF ROOTS?

N. V. Budarina (Dublin), V. I. Bernik (Minsk), H. O'Donnell (Dublin)

Abstract

Let $n \in \mathbb{N}$ be fixed, $Q > 1$ be some natural parameter, and $\mathcal{P}_n(Q)$ denote the set of integer polynomials of degree n and height of at most Q . Given a polynomial $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ of degree n , the discriminant of $P(x)$ is defined by

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

where $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ are the roots of $P(x)$.

In this paper we investigate the following problem on the number of polynomials with small discriminants: for a given $0 \leq v \leq 2$ and sufficiently large Q , estimate the value of $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$, where $\mathcal{P}_n(Q, v)$ denote the class of polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ such that

$$0 < |D(P)| \leq Q^{2n-2-2v}.$$

The first results for the estimate of the number of polynomials with given discriminants were received by H. Davenport in 1961, which were crucial to the solving of the problem of Mahler.

In this paper for the first time we obtain the exact upper and lower bounds for $\#\mathcal{P}_3(Q, v)$ with the additional condition on the distribution of the roots of the polynomials.

It is interesting that the value of $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ has the largest value when all the roots of polynomials are close to each other. If there are only k , $2 \leq k < n$, close roots to each other then the value of $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ will be less.

Keywords: integer polynomials, approximation by algebraic numbers, discriminants of polynomials.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Пусть полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

имеет степень $\deg P = n$, высоту $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ и корни $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (1)$$

называется дискриминантом многочлена $P(x)$.

Ясно, что $D(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ имеет кратные корни.

Дискриминант $D(P)$ может быть записан в виде определителя порядка $2n-1$ из коэффициентов $P(x)$ [1], и поэтому $D(P)$ – целое число. Отсюда при $D(P) \neq 0$ нетрудно получить неравенство

$$1 \leq |D(P)| < c_1 H(P)^{2n-2}. \quad (2)$$

Для натурального $Q > 1$ введем класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P = n, H(P) = Q\}, \quad (3)$$

и при $0 \leq v \leq n-1$ введем подкласс

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P(x) \in \mathcal{P}_n(Q) : 1 \leq |D(P)| < Q^{2n-2-2v}\}. \quad (4)$$

Далее через $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ будем обозначать величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q . Через μA обозначим меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, а $\#M$ – количество элементов конечного множества M . Две величины A и B будем связывать символом $A \ll B$, если существует величина c , не зависящая от A и B , что $A < cB$.

Из (1), (3) и (4) следует, что малые значения дискриминантов бывают у полиномов с близкими корнями, а величина $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ показывает количество многочленов в классе с заданным дискриминантом.

Задачи об оценках величины $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ берут свое начало с работы Х. Давенпорта [2], и активно использовались при решении В. Г. Спринджук проблем Малера [3], доказательстве проблем Бейкера [4, 5] и Бейкера – Шмидта [6], а также их обобщений в совместных приближениях [7, 8].

Приведем последние результаты.

В случае квадратичных многочленов в работе [9] было показано, что

$$\#\mathcal{P}_2(Q, v) = 20(1 + \ln 2)Q^{3-2v} + O(Q^{3-3v} + Q^2)$$

при $0 < v < 1/2$. В работе [10] доказано, что при $0 < v < 3/5$

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v) = (1 + o(1))c_2 Q^{4-5v/3},$$

а в работе [11] доказано неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) > c_3 Q^{n+1-2v}, \quad 0 \leq v \leq 1/2. \quad (5)$$

Недавно неравенство (5) было обобщено на весь промежуток изменения v , $0 \leq v \leq n-1$. В [12] было доказано, что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) > c_4 Q^{n+1-(n+2)v/n}, \quad (6)$$

если $\deg P = n$.

Интересно, что при $\deg P = k < n$ неравенство (6) может быть усилено и, скажем, при $\deg P = 2$ целочисленных неприводимых полиномов второй степени в классе (4) больше чем целочисленных неприводимых полиномов $P(x)$, $\deg P = n \geq 3$, при любом n .

Существует гипотеза, что при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $Q > Q_0(\varepsilon)$

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) < Q^{n+1-(n+2)v/n+\varepsilon}. \quad (7)$$

В данной работе мы получаем оценку вида (5) при дополнительных условиях на взаимное расположение корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Это показывает, что наибольшее значение величина $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ принимает в том случае, когда все корни полиномов близки друг к другу. Если же близки только k корней, $2 \leq k < n$, то величина $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ будет меньше.

Упорядочим корни многочлена $P(x)$, $\deg P = n$, относительно корня α_1 следующим образом

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|. \quad (8)$$

Мы докажем следующую теорему для многочленов третьей степени, хотя многие вспомогательные факты верны и при произвольном n .

Обозначим $|\alpha_1 - \alpha_3| = Q^{-t}$. Ниже будет доказано, что величина t изменяется в диапазоне $0 \leq t \leq v/3$.

ТЕОРЕМА 1. *Во всем диапазоне изменения t выполняется неравенство*

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v) > c_5 Q^{4-2v+t}.$$

Далее мы докажем, что полученная в теореме 1 оценка снизу является наилучшей в классе примитивных неприводимых полиномов из $\mathcal{P}_3(Q, v)$ при дополнительном условии на взаимное расположение корней и при значении v близком к 2. Подкласс таких полиномов обозначим $\mathcal{L}_3(Q, v, t)$.

ТЕОРЕМА 2. *При любом $\varepsilon > 0$ в классе $\mathcal{L}_3(Q, v, t)$ справедливо неравенство*

$$\#\mathcal{L}_3(Q, v, t) < Q^{4-2v+t+\varepsilon}. \quad (9)$$

2. Вспомогательные утверждения

Приведем несколько лемм, необходимых для доказательства теоремы 1. Дополнительно, не умаляя общности, считаем, что

$$|a_n(P)| > c_6 Q, \quad c_6 \leq 1, \quad (10)$$

где $a_n(P)$ – старший коэффициент многочлена $P(x)$, $\deg P = n$ (см. [3]).

ЛЕММА 1. [3, 5] Пусть α_1 – корень многочлена $P(x)$, $\deg P = n$, ближайший к x . Тогда при $P(x) \neq 0$ и $P'(\alpha_1) \neq 0$

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &\leq n|P(x)||P'(x)|^{-1}, \\ |x - \alpha_1| &\leq 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим через B_1 множество действительных чисел $x \in I \subset \mathbb{R}$, для которых при $v_j \in \mathbb{R}$, $v_j \geq -1$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq m \leq n-1$,

$$\sum_{i=0}^m v_i = n - m$$

система неравенств

$$\begin{aligned} \delta_0 Q^{-v_0} &< |P(x)| < c_0 Q^{-v_0}, \quad \delta_0 > 0, \quad c_0 > 0, \\ \delta_0 Q^{-v_j} &< |P^{(j)}(x)| < c_0 Q^{-v_j}, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \delta_0 Q &< |P^{(j)}(x)| < c_0 Q, \quad m+1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (12)$$

имеет решение в неприводимых полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. В дополнении к (12) пусть последовательность

$$d_j = v_{j-1} - v_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad d_{m+1} = v_m + 1 \quad (13)$$

не возрастает. Упорядочим корни полинома относительно точки x :

$$|x - \alpha_1| \leq |x - \alpha_2| \leq \dots \leq |x - \alpha_n|. \quad (14)$$

Разрешимость системы неравенств (12) для $x \in B_1$ с условием $\mu B_1 > d\mu I$, $0 < d < 1$, исследовалась при $m = 1$ во многих работах, например, в [11]. Известны интересные следствия из этих результатов. Случай произвольного m , $1 \leq m < n$, впервые рассмотрен в [13].

ЛЕММА 2. Существуют действительные числа δ_0, c_0 , $0 < \delta_0 < c_0$ такие, что система неравенств (12), (13) выполняется при $x \in B_1$, $\mu B_1 > 3\mu I/4$.

Основываясь на леммах 1 и 2, можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3. [12] Для корней полиномов $P(x)$, удовлетворяющих лемме 2, выполняется система неравенств

$$\begin{aligned} |x - \alpha_j| &< c_7 Q^{-v_{j-1} + v_j}, \quad 1 \leq j \leq m, \\ |x - \alpha_{m+1}| &< c_7 Q^{-v_m - 1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. [14] Пусть $P(x), T(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – два полинома без общих корней, $\deg P \leq n$, $\deg T \leq n$ и $\max(H(P), H(T)) \leq Q$. Пусть на отрезке J , $\mu J = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, выполняется неравенство

$$\max_{x \in J} (|P(x)|, |T(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau > 0.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \max(\tau + 1 - \eta j, 0) < 2n + \delta.$$

3. Доказательство теоремы 1

Выберем неприводимый полином $P(x)$, удовлетворяющий системе неравенств (12) при $n = 3$. Тогда из леммы 3 имеем

$$|x - \alpha_1| < c_8 Q^{-v_0+v_1}, \quad |x - \alpha_2| < c_9 Q^{-v_1+v_2}, \quad |x - \alpha_3| < c_{10} Q^{-v_2-1},$$

откуда и из (13)

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_2| &\leq |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| < c_{11} Q^{-v_1+v_2}, \quad |\alpha_1 - \alpha_3| < c_{12} Q^{-v_2-1}, \\ |\alpha_2 - \alpha_3| &\leq |\alpha_1 - \alpha_2| + |\alpha_1 - \alpha_3| < c_{14} Q^{-v_2-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим $|\alpha_1 - \alpha_2| = Q^{-\rho}$. Тогда согласно упорядочиванию корней α_j верно $c_{15} Q^{-t} < |\alpha_2 - \alpha_3| < c_{16} Q^{-t}$. Вычислим дискриминант $D(P)$ и оценим сверху его модуль. Имеем

$$1 \leq |D(P)| = a_3^4 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 < c_{17} Q^{4-(4+2v_1+2v_2)}.$$

Если $v_1 + v_2 + 2 \geq v$, то $|D(P)| < c_{18} Q^{4-2v}$ и $P(x) \in \mathcal{P}_3(Q, v)$. Воспользуемся (13) и получим цепочку неравенств

$$v_0 - v_1 \geq v_1 - v_2 \geq v_2 + 1. \quad (16)$$

Из (16) следует

$$v_1 \geq 2v_2 + 1, \quad v_0 \geq 2v_1 - v_2 \geq 2 + 3v_2$$

и

$$v_0 - v_1 = 1 - (2v_1 + v_2) = 5 - 2v + v_2 = 4 - 2v + t. \quad (17)$$

Значения v_1 и v_2 можно выбрать так, что $v_1 + v_2 + 2 = v$, и получить оценку $v \geq 3 + 3v_2$, откуда $v_2 \leq -1 + v/3$ и, учитывая тривиальную оценку $v_2 \geq -1$, найти интервал изменения t :

$$0 \leq t \leq v/3. \quad (18)$$

Каждый многочлен может удовлетворять системе неравенств (12), (13) только в окрестности своих трех корней, поэтому суммарная мера всех x из трех окрестностей не превосходит $c_{19} Q^{-v_0+v_1} = c_{19} Q^{-4+2v-t}$. Пусть $P_1(x), \dots, P_{t_0}(x)$ полиномы из $\mathcal{P}_3(Q, v)$. Они удовлетворяют системе неравенств (12), (13) на множестве $x \in B_1$ с мерой не большей $c_{19} Q^{-4+2v-t}$, а $\mu B_1 \geq 3\mu I/4$. Поэтому

$$t_0 c_{19} Q^{-4+2v-t} \geq 3\mu I/4,$$

и

$$t_0 > 3c_{19}^{-1} Q^{4-2v+t} \mu I/4. \quad (19)$$

При $t = 0$ и $t = v/3$ из (19) имеем оценки $t_0 \gg Q^{4-2v}$ и $t_0 \gg Q^{4-5v/3}$. Последняя из них совпадает с оценкой работы [15], но получена для всех $0 \leq v \leq 2$. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Поделим отрезок I на равные части I_i , $\mu I_i = Q^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Тогда из (9) следует, что существует отрезок I_i , на котором есть корни полиномов $P(x) \in \mathcal{L}_3(Q, v, t)$ и

$$\#(\mathcal{L}_3(Q, v, t) \cap I_i) > Q^{4-2v+t-\gamma+\varepsilon}. \quad (20)$$

Разложим многочлен $P(x)$ на отрезке I_i в ряд Тэйлора и оценим его модуль при $\gamma = \rho$:

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2/2 + P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^3/6.$$

Так как $P'(\alpha_1) = a_3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$, $P''(\alpha_1) = 2a_3((\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_3))$ и $t \leq \rho$ согласно (8), то

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| &\ll Q^{1-\rho-t-\gamma} \ll Q^{1-2\rho-t}, \\ |P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2| &\ll Q^{1-t-2\gamma} \ll Q^{1-2\rho-t}, \\ |P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^3| &\ll Q^{1-3\gamma} \ll Q^{1-2\rho-t}, \end{aligned} \quad (21)$$

и

$$|P(x)| \ll Q^{1-2\rho-t}. \quad (22)$$

Предположим, что $4 - 2v + t \geq \rho$. Тогда количество многочленов, удовлетворяющих (22), не менее $c_{20}Q^\varepsilon$. Воспользуемся принципом Дирихле и из этих многочленов выберем $l = c_{21}Q^{\varepsilon/3}$ таких, у которых все значения производных в $Q^{2\varepsilon/9}$ меньше, чем у $P(x)$. Тогда неравенство (22) можно усилить до неравенства

$$|P(x)| \ll Q^{1-2\rho-t-2\varepsilon/9}. \quad (23)$$

По определению класса $\mathcal{L}_3(Q, v, t)$ среди l многочленов можно найти хотя бы два без общих корней. Применим к ним лемму 4. Из (23) имеем

$$\tau + 1 = 2\rho + t + 2\varepsilon/9, \quad 2(\tau + 1 - \rho) = 2\rho + 2t + 4\varepsilon/9, \quad 2(\tau + 1 - 2\rho) = 2t + 4\varepsilon/9. \quad (24)$$

Неравенство в лемме 4 примет вид

$$4\rho + 5t + 10\varepsilon/9 < 6 + \delta. \quad (25)$$

Так как $v \leq \rho + 2t$ и $\rho \geq t$, то левую часть (25) можно переписать в виде $3(\rho + 2t) + \rho - t + 10\varepsilon/9 \geq 3v + 10\varepsilon/9$. Если $v \geq 2 - \varepsilon/3$, то (25) примет вид

$$6 + \varepsilon/9 < 6 + \delta,$$

что противоречиво, если $\varepsilon > 9\delta$. Это доказывает справедливость неравенства (9). Теорема доказана.

5. Заключение

В данной работе найдены точные верхняя и нижняя оценки для числа многочленов с заданным дискриминантом в классе многочленов третьей степени и ограниченной высоты при дополнительном условии на взаимное расположение корней многочленов. Вопрос о получении оценок для многочленов произвольной степени n требует дальнейшего изучения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Van Der Waerden B. L. Algebra. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1971.
2. Davenport H. A note on binary cubic forms // *Mathematika*. 1961. Vol. 8. P. 58–62.
3. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. – Мн., 1967.
4. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // *Acta Arithmetica*. 1999. Vol. 90, N. 2. P. 97–112.
5. Bernik V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // *Acta Arithmetica*. 1989. Vol. 53, No. 1. P. 17–28.
6. Bernik V. I. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations // *Acta Arithmetica*. 1983. Vol. 42, No. 3. P. 219–253.
7. Budarina N., Dickinson D., Bernik V. A divergent Khintchine theorem in the real, complex and p -adic fields // *Lith. Math. J.* 2008. Vol. 48, N. 2. P. 158–173.
8. Budarina N., Dickinson D., Bernik V. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p -adic fields // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2010. Vol. 149, No. 2. P. 193–216.
9. Goetze F., Kaliada D., Korolev M. On the number of quadratic polynomials with bounded discriminants // *Mat. Zametki*, to appear.
10. Goetze F., Kaliada D., Kukso O. The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants // *Lith. Math. J.* 2014. Vol. 54, N. 2. P. 150–165.
11. Bernik V., Goetze F., Kukso O. Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants // *Acta Arithmetica*. 2008. Vol. 133, N. 4. P. 375–390.
12. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F. Simultaneous approximations of zero by an integral polynomial, its derivative, and small values of discriminants // *Dokl. Nats. Nauk Belarusi*. 2010. Vol. 54, No. 2. P. 26–28, 125.

13. Beresnevich V. Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation // Ann. of Math. 2012. Vol. 175, No. 1. P. 187–235.
14. Bernik V., Budarina N. On arithmetic properties of integral polynomials with small values on the interval // Siauliai Math. Semin. 2013. Vol. 8, No. 16. P. 27–36.
15. Koleda D. V. An upper bound for the number of integral polynomials of third degree with a given bound for discriminants // Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk. 2010. No. 3. P. 10–16, 124.

REFERENCES

1. Van Der Waerden, B. L. 1971, "Algebra." , *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg*.
2. Davenport, H. 1961, "A note on binary cubic forms" , *Mathematika*. Vol. 8. P. 58–62.
3. Sprindzhuk, V. G. 1967, "Mahler's problem in metric theory of numbers." , *Minsk*. (Russian).
4. Beresnevich, V. 1999, "On approximation of real numbers by real algebraic numbers" , *Acta Arithmetica*. Vol. 90, No. 2. P. 97–112.
5. Bernik, V. I. 1989, "The exact order of approximating zero by values of integral polynomials" , *Acta Arithmetica*. Vol. 53, No. 1. P. 17–28.
6. Bernik, V. I. 1983, "Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations" , *Acta Arithmetica*. Vol. 42, No. 3. P. 219–253.
7. Budarina, N. & Dickinson, D. & Bernik, V., 2008. "A divergent Khintchine theorem in the real, complex and p -adic fields" , *Lith. Math. J.* Vol. 48, N. 2. P. 158–173.
8. Budarina, N., Dickinson, D. & Bernik, V., 2010, "Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p -adic fields" , *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* Vol. 149. No. 2. P. 193–216.
9. Goetze, F., Kaliada, D. & Korolev, M. "On the number of quadratic polynomials with bounded discriminants" , *Mat. Zametki*. to appear.
10. Goetze, F., Kaliada, D. & Kukso, O., 2014, "The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants" , *Lith. Math. J.* Vol. 54. No. 2. P. 150–165.

11. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I. & Goetze, F., 2010, "Simultaneous approximations of zero by an integral polynomial, its derivative, and small values of discriminants", *Dokl. Nats. Nauk Belarusi*. Vol. 54, No. 2. P. 26–28, p. 125.
12. Bernik, V., Goetze, F. & Kukso, O., 2008, "Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants", *Acta Arithmetica*. Vol. 133. No. 4. P. 375–390.
13. Beresnevich, V. 2012, "Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation", *Ann. of Math.* Vol. 175. No. 1. P. 187–235.
14. Bernik, V. & Budarina, N. 2013, "On arithmetic properties of integral polynomials with small values on the interval", *Siauliai Math. Semin.* Vol. 8. No. 16. P. 27–36.
15. Koleda, D. V. 2010, "An upper bound for the number of integral polynomials of third degree with a given bound for discriminants", *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk*. No. 3. P. 10–16, p. 124.

Дублинский технологический институт
Институт математики НАН Беларуси
Дублинский технологический институт
Получено 16.02.2015