ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6, 539.30 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-209-233

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.[1]

В. И. Горбачёв[2](г. Москва)

Аннотация

В статье рассматриваются начально-краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений математической физики (эллиптических, гиперболических и параболических) с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени. Такие уравнения вместе с входными данными будем называть исходными. Уравнения с переменными коэффициентами описывают процессы в композиционных материалах, у которых механические характеристики меняются либо скачком либо непрерывно в пограничной области между фазами. Многие задачи из различных разделов линейной и нелинейной механики сводятся к решению линейных уравнений с переменными коэффициентами.

В случае периодических по координатам коэффициентов одним из популярных способов решения уравнений является метод осреднения Бахвалова–Победри (МБП), основанный на представлении решения исходной задачи в виде асимптотического ряда по степеням малого геометрического параметра, равного отношению характерного размера ячейки периодичности к характерному размеру тела. В этом методе исходная краевая задача сводится к двум рекуррентным последовательностям задач. Первая рекуррентная последовательность заключается в нахождении периодических решений вспомогательных задач в ячейке периодичности. Вторая последовательность состоит в решении начально-краевых задач для уравнения с постоянными эффективными коэффициентами. Эти коэффициенты находятся после решения на

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.577.21.0207, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57715X0207). ФГБОУ ВПО "ТГПУ им. Л.Н.Толстого - получатель субсидии Министерства образования и науки.

[2]Горбачёв Владимир Иванович, заведующий кафедрой механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, vigorby@mail.ru

ячейке периодичности вспомогательных задач. Базой рекурсии во второй последовательности в МБП служит решение начально-краевой задачи для уравнения с эффективными коэффициентами в области определения, имеющей ту же самую форму и точно с такими же входными данными, что и исходная задача.

Входные данные в каждой из рекуррентных последовательностей на каком либо шаге находятся лишь после того как решены *все* предыдущие рекуррентные задачи.

В настоящей статье получены новые интегральные формулы, позволяющие выразить решение исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени, через решение такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение с постоянными коэффициентами называется сопутствующими уравнениями, а задача соответственно сопутствующей задачей. В ядро интегральной формулы входит функция Грина и разность коэффициентов исходного и сопутствующего уравнений. С помощью разложения сопутствующего решения в многомерный ряд Тейлора из интегральной формулы получено эквивалентное представление решения исходной задачи в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи. Коэффициенты при производных называются структурными функциями. Они являются непрерывными функциями координат и времени, обращающимися в нуль при совпадении исходных и сопутствующих коэффициентов. Для определения структурных функций построена система рекуррентных уравнений. Через структурные функции определяются коэффициенты сопутствующих уравнений, совпадающие в периодическом случае с эффективными коэффициентами в МБП. В отличие от метода Бахвалова–Победри в новом подходе нужно решать одну рекуррентную последовательность задач для нахождения структурных функций и один раз решить задачу для однородного тела с эффективными характеристиками.

Ключевые слова: Уравнения математической физики, уравнения с переменными коэффициентами, интегральные формулы, осреднение дифференциальных уравнений, структурные функции, эффективные коэффициенты.

Библиография: 41 названий.

INTEGRAL FORMULAS OF SOLUTIONS OF THE BASIC LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS WITH VARIABLE FACTORS

V. I. Gorbachev (Moscow)

Abstract

In paper initial-regional problems for linear differential equations are considered The mathematical physics (elliptic, hyperbolic and parabolic)

with variables In the factors depending on coordinates and time. Such equations together with input datas we will be To name initial. The equations with variable factors describe processes in the composite Materials at which mechanical performances change or a saltus or it is continuous in Boundary region between phases. Many problems from various sections linear and nonlinear Mechanics are reduced to a solution of simple equations with variable factors.

In case of periodic factors on coordinates one of popular modes of a solution of the equations The method of average of Bahvalova–Pobedri (MBP), based on representation of a solution is initial Problems in the form of an asimptotical series on degrees of the small geometrical parametre equal to the ratio Characteristic size of a mesh of periodicity to a characteristic size of a skew field. In this method the initial The boundary value problem is reduced to two recurrent sequences of problems. The first recurrent The sequence consists in determination of periodic solutions of auxiliary problems in a mesh Periodicity. The second sequence consists in a solution of initial-regional problems for the equation with In constant effective factors. These factors are after a solution on a mesh Periodicity of auxiliary problems. As base of a recursion in the second sequence in MBP serves Solution of a initial-regional problem for the equation with effective factors in definition range, Having the same form and it is exact with the same input datas, as an initial problem.

Input datas in each of recurrent sequences on what or a pitch are only after that as the previous recurrent problems are solved all.

In the present paper the new integral formulas are received, allowing to express a solution of the initial Problems for the equation with the variable factors depending on co-ordinates and time, through a solution The same problem for the equation with constant factors. The equation with constant factors Is called as the accompanying equations, and the problem according to accompanying a problem. In the kernel The integral formula the Green function and a difference of factors initial and accompanying enters The equations. By means of expansion of an accompanying solution in a many dimensional Taylor series from the integral Formulas equivalent representation of a solution of an initial problem in the form of a series on the various is received Derivative of a solution of an accompanying problem. Factors at derivatives are called as structural Functions. They are continuous functions of coordinates and time, converted in zero at Coincidence of initial and accompanying factors. For definition of structural functions it is constructed System of the recurrent equations. Through structural functions factors of the accompanying are defined The equations, coinciding in a periodic case with effective factors in MBP. Unlike Method of Bahvalova–Pobedri in the new approach it is necessary to solve one recurrent sequence of problems For determination of structural functions and once to solve a problem for a homogeneous skew field with the effective In performances.

Keywords: The equations of mathematical physics, integral formulas, average of differential equations, structural functions, effective factors.

Bibliography: 41 titles.

1. Введение

Задачи для неоднородных тел с быстроосциллирующими коэффициентами рассматривались в семидесятые годы В.А. Ломакиным и его учениками [1]. К настоящему времени наиболее распространенным методом решения подобных задач является асимптотический метод малого геометрического параметра. В России и за рубежом вышло большое количество статей и монографий, посвященных этому направлению, применительно к линейным и нелинейным задачам механики композитов. Опубликовано большое количество работ математиков и механиков [2, 3, 4, 5]. Отметим, что в 1984 году, практически одновременно, в СССР вышли три замечательные книги посвященные методу осреднения. Это книги Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко [6], Б.Е. Победри [7] и Э. Санчес-Паленсия [8]. После этого последовало резкое увеличение количества публикаций российских и иностранных авторов в этой области. Учитывая, что целью настоящей публикации не является подробный литературный обзор, упомянем лишь некоторые книги из обширного списка книг и статей: [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] и др. В этих книгах можно найти более подробную библиографию работ по теории осреднения уравнений с периодическими коэффициентами.

Огромный вклад в развитие метода осреднения внесли ученые МГУ имени М.И. Ломоносова, в частности в 1985 г. Н.С. Бахвалов и Б.Е. Победря в составе коллектива авторов за создание методов расчета конструкций из композиционных материалов получили Государственную премию СССР в области науки. В 1987 г. на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова была организована кафедра механики композитов, которую с первого дня и до своей кончины 1 марта 2016 г. возглавлял Борис Ефимович Победря. Метод осреднения в механике композитов с регулярной структурой по праву называется методом осреднения Бахвалова–Победри.

В настоящей работе показано, что решение исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами связано с решением такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами (сопутствующая задача) с помощью интегральной формулы. Приведена единая интегральная формула пригодная для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени. Наряду с интегральными представлениями получены представления решений исходных уравнений в виде рядов по всевозможным производным от решений сопутствующих уравнений с постоянными коэффициентами. Коэффициенты при производных называются структурными функциями. Они существенно зависят от характера неоднородности исходных коэффициентов. Для их определения выписаны системы рекуррентных уравнений. Через структурные функции вычисляются постоянные коэффициенты сопутствующего уравнения. В механике периодически неоднородных компо-

зитов они называются эффективными коэффициентами [6, 7]. Проблема эффективных коэффициентов в механике деформируемых твердых тел в геометрически нелинейном случае рассмотрена в работах [18, 19]

Решение рекуррентных специальных задач для структурных функций в одномерном случае находятся аналитически. В других случаях применяются приближенные способы вычислений, например метод Бубнова-Галеркина [20, 21]. Кроме этого, широко применяется метод конечных элементов реализованный, в частности, в виде отечественного программного комплекса "ФИДЕСИС" [22].

В настоящей статье показано, что решение исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами связано с решением такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами (сопутствующая задача) с помощью интегральной формулы. Приведена единая интегральная формула пригодная для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени. Наряду с интегральными представлениями получены представления решений исходных уравнений в виде рядов по всевозможным производным от решений сопутствующих уравнений с постоянными коэффициентами. Коэффициенты при производных называются структурными функциями. Они существенно зависят от характера неоднородности исходных коэффициентов. Для их определения выписаны системы рекуррентных уравнений. Через структурные функции вычисляются постоянные коэффициенты сопутствующего уравнения. В механике периодически неоднородных композитов они называются эффективными коэффициентами [6, 7]. Проблема эффективных коэффициентов в механике деформируемых твердых тел в геометрически нелинейном случае рассмотрена в работах [18, 19]

Решение рекуррентных специальных задач для структурных функций в одномерном случае находятся аналитически. В других случаях применяются приближенные способы вычислений, например метод Бубнова-Галеркина [20, 21]. Кроме этого, широко применяется метод конечных элементов реализованный, в частности, в виде отечественного программного комплекса "ФИДЕСИС" [22].

2. Постановка задач и вывод интегральной формулы

В области V, ограниченной поверхностью Σ, рассматривается начально-краевая задача для уравнения вида

$$\left[C_{ij}(x,t)\,u_{,j}\right]_{,i} - \eta(x,t)\,\dot{u} - \left[\rho(x,t)\,\dot{u}\right]^{\cdot} + X(x,t) = 0\,, \tag{1}$$

где t - время; одна или две точки над символом обозначают, соответственно, первую или вторую производную по времени; x - декартовы координаты x_1, x_2, x_3; индекс после запятой обозначает производную по соответствующей

координате; по повторяющимся индексам предполагается суммирование в соответствующих пределах; коэффициенты $C_{ij}(x,t)$, $\eta(x,t)$ и $\rho(x,t)$ являются интегрируемыми функциями координат и времени, C_{ij} — симметричные положительно определенные коэффициенты; $X(x,t)$ — заданная функция координат и времени. Искомая величина $u(x,t)$ может быть как скалярной, так и векторной функцией с компонентами u_1, u_2, u_3, при этом коэффициенты C_{ij} не симметричны и являются положительно определенными матрицами $C_{ij} = (C_{kilj})$.

В зависимости от физического смысла коэффициентов уравнение (1) описывает различные процессы. Далее их конкретизировать не будем. Не будем также конкретизировать типы граничных и начальных условий. Задачу для уравнения (1) будем называть исходной задачей.

Наряду с уравнением (1), в той же области V, рассматривается уравнение с постоянными коэффициентами $C^o_{ij} = C^o_{ji} = const.$, $\eta^o = const.$, $\rho^o = const.$

$$C^o_{ij}\, v_{,ij} - \eta^o\, \dot{v} - \rho^o\, \ddot{v} + X(x,t) = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функция v удовлетворяет таким же, что и u граничным и начальным условиям. Задачу для уравнения (2) назовем сопутствующей задачей. Отметим, что коэффициенты C^o_{ij}, η^o, ρ^o сопутствующего уравнения (2), в общем случае, являются любыми физически допустимыми величинами и никак не связаны с коэффициентами уравнения (2) исходной задачи. Ниже будет показано, что в случае периодически неоднородных исходных коэффициентов, сопутствующие коэффициенты, необходимым образом, совпадают с эффективными коэффициентами в смысле определения [6, 7]. Полученные при этом выражения сопутствующих коэффициентов обобщаются на случай произвольных исходных коэффициентов, зависящих от координат и времени.

В уравнении (1) заменим t на τ, затем умножим его на функцию $G(x,t-\tau)$ и проинтегрируем по области V и по τ от нуля до t, получим:

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \Big\{ \big[C_{ij}(x,\tau)\, u_{,j}\big]_{,i} - \eta(x,\tau)\, \dot{u}_\tau - \big[\rho(x,\tau)\, \dot{u}_\tau\big]^{\cdot}_{\tau} + X(x,\tau) \Big\}\, G(x,t-\tau)\, dV = 0 \tag{3}$$

Функция $G(x,t)$ пока, что произвольная непрерывная функция, имеющая нулевые начальные и граничные значения, сообразные граничным значениям исходной задачи. Интегралы в (3) преобразуем с помощью теоремы Гаусса–Остроградского [23] и используем то обстоятельство, что *входные данные для основной и сопутствующей задач одинаковы, а начальные и граничные значения функции $G(x,t)$ — нулевые.* После преобразований тождество (3)

приобретает вид:

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \Big[(C_{ij}\, G_{,i})_{,j} - \eta\, \dot{G} - \big(\rho\, \dot{G}\big)^{\cdot}\Big][u(x,\tau) - v(x,\tau)]\, dV +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V (C^o_{ij} - C_{ij})\, v_{,j}\, G_{,i}\, dV + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V (\eta^o - \eta)\dot{v}_\tau\, G\, dV + \tag{4}$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V (\rho^o - \rho)\ddot{v}_\tau\, G\, dV = 0$$

Ограничим еще больше произвол в выборе функций $G(x,t)$, подчинив их внутри области V уравнению

$$[C_{ij}(x,t)\, G_{,j}]_{,i} - \eta(x,t)\, \dot{G} - \big(\rho\, \dot{G}\big)^{\cdot} = -\delta(x-\xi)\, \delta(t-\tau)\,, \tag{5}$$

где $\delta(x-\xi)$ и $\delta(t-\tau)$ - дельта-функции Дирака [24, 25], причем $\delta(x-\xi) = \delta(x_1-\xi_1) \times \delta(x_2-\xi_2)\delta(x_3-\xi_3)$. Таким образом, $G(x,t) = G(x,\xi,t-\tau)$ — функция Грина исходной задачи [26, 27]. В результате после подстановки (5) в (3), замены $x \leftrightarrow \xi$ и с учетом (2) получим окончательно

$$u(x,t) = v(x,t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V G_{|k}(x,\xi,t-\tau)\, [C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)]\, v_{|l}(\xi,\tau)\, dV_\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V G(x,\xi,t-\tau) \Big\{ \big[\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big]\dot{v}_\tau(\xi,\tau) + \big[\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big]\ddot{v}_\tau(\xi,\tau)\Big] dV_\xi \tag{6}$$

Здесь индекс после вертикальной черты обозначает производную по соответствующей переменной ξ. Убедимся, что выражение (6) удовлетворяет исходному уравнению. Вначале вычислим все слагаемые, входящие в (1)

$$\big[C_{ij}(x,t)\, u_{,j}\big]_{,i} = \big(C_{ij}\, v_{,j}\big)_{,i} + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \big(C_{ij}\, G_{,j}\big)_{,i|k}\, [C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)]\, v_{|l}(\xi,\tau)\, dV_\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \big(C_{ij}\, G_{,j}\big)_{,i} \big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big)\dot{v}_\tau(\xi,\tau) + \big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big)\ddot{v}_\tau(\xi,\tau)\big]\, dV_\xi\,,$$

$$\dot{u} = \dot{v} + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \dot{G}_{|k}(x,\xi,t-\tau)\, [C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)]\, v_{|l}(\xi,\tau)\, dV_\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \dot{G}(x,\xi,t-\tau)\, \big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big)\dot{v}_\tau(\xi,\tau) + \big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big)\ddot{v}_\tau(\xi,\tau)\big]\, dV_\xi\,,$$

$$\big[\rho(x,t)\,\dot u\big]^{\cdot} = \big(\rho\,\dot v\big)^{\cdot} + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \big(\rho\,\dot G\big)^{\cdot}_{|k}\,\big[C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)\big]\,v_{|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \big(\rho\,\dot G\big)^{\cdot}\,\big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big)\dot v_\tau(\xi,\tau) + \big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big)\ddot v_\tau(\xi,\tau)\big]\,dV_\xi$$

Подстановка этих выражений в исходное уравнение дает:

$$\big(C_{ij}\,u_{,j}\big)_{,i} - \eta\,\dot u - \big(\rho\,\dot u\big)^{\cdot} + X(x,t) = \big(C_{ij}\,v_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot v - \big(\rho\,\dot v\big)^{\cdot} + X(x,t) +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \Big[\big(C_{ij}\,G_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot G - \big(\rho\,\dot G\big)^{\cdot}\Big]_{|k}\,\big[C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)\big]\,v_{|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \Big[\big(C_{ij}\,G_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot G - \big(\rho\,\dot G\big)^{\cdot}\Big]\,\big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big)\dot v_\tau(\xi,\tau) +$$

$$+\big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big)\ddot v_\tau(\xi,\tau)\big]\,dV_\xi =$$

$$= \big(C_{ij}\,v_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot v - \big(\rho\,\dot v\big)^{\cdot} + X(x,t) -$$

$$-\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \underbrace{\delta(x-\xi)_{|k}}_{=-\delta(x-\xi)_{,k}}\,\delta(t-\tau)\,\big[C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)\big]\,v_{|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi -$$

$$-\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,\big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big)\dot v_\tau(\xi,\tau) +$$

$$+\big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big)\ddot v_\tau(\xi,\tau)\big]\,dV_\xi =$$

$$= \big(C_{ij}\,v_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot v - \big(\rho\,\dot v\big)^{\cdot} + X(x,t) + \big[\big(C^o_{kl} - C_{kl}(x,t)\big)\,v_{,l}(x,t)\big]_{,k} -$$

$$-\big[\big(\eta^o - \eta(x,t)\big)\dot v(x,t) + \big(\rho^o - \rho(x,t)\big)\ddot v(x,t)\big] =$$

$$= C^o_{kl}v_{,lk} - \eta^o\dot v - \rho^o\ddot v + X(x,t) = 0 \qquad \textbf{Ч. Т. Д.}$$

Из формул (4), (5) при $\rho^o = 0$ и $\rho(\xi,t) \equiv 0$ следует интегральная формула для уравнения параболического типа. Интегральная формула для эллиптического уравнения получается из (4), (5) при $\eta^o = 0$, $\rho^o = 0$, и $\eta(\xi,t) \equiv 0$, $\rho(\xi,t) \equiv 0$, $C_{ij} = C_{ij}(\xi)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, $G = G(x,\xi)$.

Не представляет труда получить из общей формулы (6) интегральную формулу для случая когда u и v — векторы, а C_{ij} — несимметричные по ij матрицы вида $C_{ij} = (C_{ikjl})$. Коэффициенты C_{ikjl} симметричны по первой и второй парам индексов, а также по индексам в парах. В этом случае функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ переходит в тензор Грина, соответствующей исходной задачи [28]. В векторном виде интегральная формула мало чем отличается

от формулы (6), тем не менее, приведем ее здесь:

$$\vec{u}(x,t) = \vec{v}(x,t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \underset{\sim}{G}_{|k}(x,\xi,t-\tau)\left[\underset{\sim}{C}^o_{kl} - \underset{\sim}{C}_{kl}(\xi,\tau)\right]\vec{v}_{|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi +$$
$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \underset{\sim}{G}(x,\xi,t-\tau)\left\{\left[\eta^o - \eta(\xi,\tau)\right]\frac{\partial\vec{v}(\xi,\tau)}{\partial\tau} + \left[\rho^o - \rho(\xi,\tau)\right]\frac{\partial^2\vec{v}(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right\}dV_\xi \tag{7}$$

В этой формуле волна снизу символа означает матрицу 3×3

$$\underset{\sim}{C}_{kl} \equiv \begin{pmatrix} C_{1k1l} & C_{1k2l} & C_{1k3l} \\ C_{2k1l} & C_{2k2l} & C_{2k3l} \\ C_{3k1l} & C_{3k2l} & C_{3k3l} \end{pmatrix}, \qquad \underset{\sim}{G} \equiv \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}$$

В компонентной записи формула (7) принимает вид:

$$u_i(x,t) = v_i(x,t) +$$
$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V G_{im|k}(x,\xi,t-\tau)[C^o_{mknl} - C_{mknl}(\xi,\tau)]\,v_{n|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi +$$
$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_V G_{im}(\xi,x,t-\tau)\Big\{\left[\eta^o - \eta(\xi,\tau)\right]\frac{\partial v_m(\xi,\tau)}{\partial\tau} +$$
$$+\left[\rho^o - \rho(\xi,\tau)\right]\frac{\partial^2 v_m(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\Big\}dV_\xi\,, \tag{8}$$

где $G_{im}(x,\xi,t-\tau)$ — компоненты тензора Грина исходной задачи. В статическом случае вместо (6) и (8) имеем

$$u(x) = v(x) + \int\limits_V G_{|i}(x,\xi)\left[C^o_{ij} - C_{ij}(\xi)\right]v_{|j}(\xi)\,dV_\xi\,,$$

$$u_i(x) = v_i(x) + \int\limits_V G_{im|k}(x,\xi)\left[C^o_{mknl} - C_{mknl}(\xi)\right]v_{n|l}(\xi)\,dV_\xi\,.$$

Интегральная формула для уравнений теории упругости неоднородного анизотропного тела получена впервые в 1991 году в работе [38]. Аналогичная формула в динамической задаче теории упругости выводится в [34]. Осреднение гофрированных пластин с применением интегральных формул проведено в работе [37]. Для связанных задач моментной теории упругости и нестационарной задачи термоупругости интегральные формулы найдены в [32, 36]. Интегральная формула в связанной задаче электромагнитоупругости опубликована в работе [30].

3. Представление решения исходной задачи в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи. Структурные функции.

Перемещение u, представленное формулой (6), можно использовать непосредственно, если известны тензор Грина исходной задачи и решение сопутствующей задачи. Интегральная формула использовалась при исследовании устойчивости неоднородных стержней с переменным поперечным сечением в работе [33], при определении собственных частот колебаний неоднородных стержней с переменным поперечным сечением в работах [31, 35]. В этих случаях исходные уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Сопутствующая задача решается точно аналитически, а задача для функции Грина — приближенно. В результате удается найти приближенные аналитические выражения для критической силы и для первых собственных частот при различных условиях закрепления концов.

В плоском и, тем более, в трехмерном случае поиск тензора Грина представляет гораздо большую проблему, чем сама исходная задача. Поэтому интегральная формула (6), на первый взгляд, представляет академический интерес. Похожая ситуация изначально возникала и с интегральными формулами Сомилианы, однако, позднее из них вырос популярный метод граничных интегральных уравнений [39].

Для того, чтобы продвинуться дальше предположим, что функция $v(\xi,\tau)$ бесконечно дифференцируема по всем переменным и раскладываются в ряд Тейлора по времени и координатам в окрестности точки (x,t), т.е.

$$v(\xi,\tau) = \sum_{\substack{p+q=0\\ p\geqslant 0;\ q\geqslant 0}}^{\infty} \frac{(t-\tau)^p}{p!}\,\Pi_{i_1\cdots i_q}(\xi,x)\frac{\partial^p v_{,i_1\cdots i_q}(x,t)}{\partial t^p}\,,$$

$$\Pi_{i_1\ldots i_q}(\xi,x) \equiv \frac{1}{q!}\left(\xi_{i_1}-x_{i_1}\right)\ldots\left(\xi_{i_q}-x_{i_q}\right)$$

Тогда в интегралах формулы (6)

$$v_{|l}(\xi,\tau) = \sum_{\substack{p+q=1\\ p\geqslant 0;\ q\geqslant 1}}^{\infty} \frac{(t-\tau)^p}{p!}\,\Pi_{i_1\cdots i_{q-1}}(\xi,x)\delta_{li_q}\frac{\partial^p v_{,i_1\cdots i_q}(x,t)}{\partial t^p}\,,$$

$$\dot{v}(\xi,\tau)_\tau = -\sum_{\substack{p+q=1\\ p\geqslant 1;\ q\geqslant 0}}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}\,\Pi_{i_1\cdots i_q}(\xi,x)\frac{\partial^p v_{,i_1\cdots i_q}(x,t)}{\partial t^p}\,,$$

$$\ddot{v}(\xi,\tau)_\tau = \sum_{\substack{p+q=2\\ p\geqslant 2;\ q\geqslant 0}}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{p-2}}{(p-2)!}\,\Pi_{i_1\cdots i_q}(\xi,x)\frac{\partial^p v_{,i_1\cdots i_q}(x,t)}{\partial t^p}$$

В результате $u(x,t)$ представляется в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи

$$u(x,t) = \sum_{p+q=0}^{\infty} N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)\,\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}; \qquad p=0,1,2,\ldots;\ q=0,1,2,\ldots \tag{9}$$

В формуле (9) верхний и нижний индексы в круглых скобках обозначают порядок производной по времени и координате соответственно. Функции с отрицательным верхним или нижним индексом тождественно равны нулю. Функция $N^{(0)}_{(0)} \equiv 1$, а $N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)$ при $p+q>0$ — непрерывные функции координат x_1, x_2, x_3 и времени t, представляющие собой взвешенные моменты функции Грина и ее производных. Как видно из (9), функции $N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)$ симметричны по индексам $i_1\ldots i_q$. N-функции обращаются в нуль при равенстве исходных и сопутствующих коэффициентов. Если исходные коэффициенты периодичны по координатам, то и N-функции, вдали от границы тела, являются периодическими функциями по координатам, с теми же периодами. Будем называть N-функции структурными функциями.

Уравнения для структурных функций получаются при подстановке ряда (9) в исходное уравнение (1), сбора коэффициентов при одинаковых производных и учета сопутствующего уравнения (2). Вначале проведем подготовительную работу

$$u_{,j} = \sum_{p+q=0}^{\infty} \left[N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q,j} + N^{(p)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\delta_{ji_q}\right]\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}$$

$$\dot u = \sum_{p+q=0}^{\infty} \left[\dot N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q} + N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right]\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p},$$

$$\left(C_{ij}u_{,j}\right)_{,i} = \sum_{p+q=0}^{\infty} \left[\left(C_{ij}N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q,j} + C_{ii_q}N^{(p)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\right)_{,i} + C_{i_qj}N^{(p)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1},j} + \right.$$

$$\left. + C_{i_qi_{q-1}}N^{(p)}_{(q-2)i_1\ldots i_{q-2}}\right]\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}, \quad \left(\rho\,\dot u\right)^{\cdot} = \sum_{p+q=0}^{\infty} \left\{\left[\varrho\left(\dot N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q} + N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right)\right]^{\cdot} + \right.$$

$$\left. + \varrho\left(\dot N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q} + N^{(p-2)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right)\right\}\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}$$

Здесь учтено, что N-функции с отрицательным верхним или нижним индексом тождественно равны нулю. Подстановка ряда (9) в исходное уравнение переводит последнее в дифференциальное уравнение бесконечного порядка для функции $v(x,t)$, которая, на самом деле, удовлетворяет сопутствующему

уравнению (2)

$$\begin{gathered}\left[C_{ij}(x,t)\,u_{,j}\right]_{,i}-\eta(x,t)\,\dot u-\left[\rho(x,t)\,\dot u\right]^{\cdot}+X(x,t)=\\ =\sum_{p+q=0}^{\infty}\Bigg\{\left[C_{ij}N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q,j}+C_{ii_q}N^{(p)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\right]_{,i}+\\ +C_{i_qj}N^{(p)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1},j}+C_{i_qi_{q-1}}N^{(p)}_{(q-2)i_1\ldots i_{q-2}}-\\ -\eta\left[\dot N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right]-\left[\varrho\left(\dot N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right)\right]^{\cdot}-\\ -\varrho\left[\dot N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p-2)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right]\Bigg\}\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}+\\ +X(x,t)=C^o_{ij}\,v_{,ij}-\eta^o\,\dot v-\rho^o\,\ddot v+X(x,t)\end{gathered}$$

Сравнивая теперь коэффициенты при производных от v справа и слева от полученного равенства получаем уравнения для структурных функций

в случае $p+q=1$

$$\begin{gathered}\left[C_{ij}(x,t)N^{(0)}_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}(x,t)\right]_{,i}-\eta(x,t)\dot N^{(0)}_{(1)i_1}-\left[\varrho(x,t)\dot N^{(0)}_{(1)i_1}\right]^{\cdot}=0\\ \left[C_{ij}(x,t)N^{(1)}_{(0),j}\right]_{,i}-\eta(x,t)\left(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\right)-\left[\varrho(x,t)\left(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\right)\right]^{\cdot}=-\eta^o\end{gathered}\tag{10}$$

в случае $p+q=2$

$$\begin{gathered}\left[C_{ij}N^{(0)}_{(2)i_1i_2,j}+C_{ii_2}N^{(0)}_{(1)i_1}\right]_{,i}-\eta\dot N^{(0)}_{(2)i_1i_2}-\left(\varrho\dot N^{(0)}_{(2)i_1i_2}\right)^{\cdot}+C_{i_2j}N^{(0)}_{(1)i_1,j}+\\ +C_{i_2i_1}=C^o_{i_2i_1}\\ \left[C_{ij}N^{(1)}_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}N^{(1)}_{(0)}\right]_{,i}-\eta\left(\dot N^{(1)}_{(1)i_1}+N^{(0)}_{(1)i_1}\right)-\\ -\left[\varrho\left(\dot N^{(1)}_{(1)i_1}+N^{0}_{(1)i_1}\right)\right]^{\cdot}+C_{i_1j}N^{(1)}_{(0),j}=0\\ \left[C_{ij}N^{(2)}_{(0),j}\right]_{,i}-\eta\left(\dot N^{(2)}_{(0)}+N^{(1)}_{(0)}\right)-\left[\varrho\left(\dot N^{(2)}_{(0)}+N^{(1)}_{(0)}\right)\right]^{\cdot}-\varrho\left(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\right)=-\varrho^o\end{gathered}\tag{11}$$

в случае $p+q=n\geqslant 3$

$$\begin{gathered}\left[C_{ij}N^{(p+q)}_{(q)i_1\ldots i_q,j}+C_{ii_q}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\right]_{,i}-\eta\left(\dot N^{(p+q)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right)-\\ -\left[\varrho\left(\dot N^{(p+q)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right)\right]^{\cdot}+\\ +C_{i_qj}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1},j}+C_{i_qi_{q-1}}N^{(p+q)}_{(q-2)i_1\ldots i_{q-2}}-\varrho\left(\dot N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p+q-2)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right)=0\end{gathered}\tag{12}$$

Уравнения для структурных функций представляют собой группы рекуррентных уравнений. Началом рекурсии служит группа уравнений $p+q=1$, из

решения которых находятся функции $N^{(0)}_{(1)i_1}(x,t)$ и $N^{(1)}_{(0)}(x,t)$. В каждой группе уравнения одного и того же типа. Свободные члены в уравнениях группы определяются через структурные функции из двух предыдущих групп. Для единственного решения структурных уравнений (10)-(12) нужно к каждому уравнению добавить граничные и начальные условия. Например, в случае первой начально-краевой задачи в области V, ограниченной поверхностью Σ из условия совпадения граничных и начальных условий в исходной и сопутствующей задачах получаем следующие условия на структурные функции:

$$N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)\Big|_{x\in\Sigma}=0\,,\qquad N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,0)=0\,,$$
$$\dot{N}^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,0)=0\,,\qquad p>0,\ q>0$$

Рекуррентные уравнения существенно упрощаются в том случае, когда коэффициенты исходного уравнения не зависят от времени. В этом случае можно принять, что и структурные функции от времени не зависят. Тогда ряд для решения исходного уравнения (1), в котором коэффициенты не зависят от времени представляется в том же самом виде (9), где все структурные функции зависят от координат

$$u(x,t)=\sum_{p+q=0}^{\infty}N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x)\,\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p};\qquad p=0,1,2,\ldots;\ q=0,1,2,\ldots \tag{13}$$

Подстановка этого ряда в исходное уравнение приводит к рекуррентным уравнениям вида (10)-(12), в которых нужно убрать все производные по времени

в случае $p+q=1$

$$\Big[C_{ij}(x)N^{(0)}_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}(x)\Big]_{,i}=0\,,\qquad \Big[C_{ij}(x)N^{(1)}_{(0),j}\Big]_{,i}-\eta(x)=-\eta^o\,; \tag{14}$$

в случае $p+q=2$

$$\Big[C_{ij}(x)N^{(0)}_{(2)i_1i_2,j}+C_{ii_2}(x)N^{(0)}_{(1)i_1}\Big]_{,i}+C_{i_2j}(x)N^{(0)}_{(1)i_1,j}+C_{i_2i_1}(x)=C^o_{i_2i_1}\,,$$
$$\Big[C_{ij}(x)N^{(1)}_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}(x)N^{(1)}_{(0)}\Big]_{,i}+C_{i_1j}(x)N^{(1)}_{(0),j}-\eta(x)N^{(0)}_{(1)i_1}=0\,,$$
$$\Big[C_{ij}(x)N^{(2)}_{(0),j}\Big]_{,i}-\eta(x)N^{(1)}_{(0)}-\varrho(x)=-\varrho^o\,; \tag{15}$$

в случае $p+q=n\geqslant 3$

$$\Big[C_{ij}N^{(p+q)}_{(q)i_1\ldots i_q,j}+C_{ii_q}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\Big]_{,i}+C_{i_qj}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1},j}+C_{i_qi_{q-1}}N^{(p+q)}_{(q-2)i_1\ldots i_{q-2}}-$$
$$-\eta N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}-\varrho N^{(p+q-2)}_{(q)i_1\ldots i_q}=0\,. \tag{16}$$

Уравнения (14)-(15) имеют одну и ту же структуру. Они представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами эллиптического типа, независимо от типа исходного и сопутствующего уравнений. Если исходное и сопутствующее уравнения эллиптического типа, то все структурные функции с верхним индексом $p>1$ тождественно равны нулю. Пусть, теперь, исходное гиперболическое уравнение

(1) рассматривается в слое $-\infty < x_1, x_2 < \infty,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant L$ и коэффициенты являются кусочно-непрерывными функциями координаты x_3. В этом случае структурные функции будут зависеть от x_3 и уравнения (14)-(15) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые решаются в общем виде. Например, уравнения (14) начала рекурсии принимают вид:

$$\Big[C_{33}(x_3)N^{(0)\prime}_{(1)i_1} + C_{3i_1}(x_3)\Big]' = 0\,, \qquad \Big[C_{33}(x_3)N^{(1)\prime}_{(0)}\Big]' - \eta(x_3) = -\eta^o \tag{17}$$

Штрихом обозначена производная по x_3. Общее решение уравнений (17) очевидно:

$$\begin{gathered} N^{(0)}_{(1)i_1}(x_3) = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy\, A_{i_1} - \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)C_{3i_1}(y)dy + B_{i_1}\,, \\ N^{(1)}_{(0)}(x_3) = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy \int\limits_0^{y} \big[\eta(z) - \eta^o\big]dz + \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy\, A + B \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь $A_{i_1},\ B_{i_1}$, и $A,\ B$ — константы интегрирования. В случае первой краевой задачи все структурные функции на границе тела обращаются в нуль, т.е.

$$N^{(0)}_{(1)i_1}(0) = N^{(0)}_{(1)i_1}(L) = 0\,, \qquad N^{(1)}_{(0)}(0) = N^{(1)}_{(1)}(L) = 0\,,$$

тогда формулы (18) принимают вид:

$$\begin{gathered} N^{(0)}_{(1)i_1}(x_3) = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)\Big[\big\langle C^{-1}_{33}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{33}C_{3i_1}\big\rangle - C_{3i_1}(y)\Big]dy\,, \\ N^{(1)}_{(0)} = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)\int\limits_0^{y}\bar\eta(z)dzdy - \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy\,\big\langle C^{-1}_{33}\big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{33}\int\limits_0^{y}\bar\eta(z)dz\Big\rangle \\ \bar\eta(z) \equiv \eta(z) - \eta^o \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь угловые скобки обозначают среднее значение функции по толщине слоя.

Рассмотрим и другую ситуацию, когда коэффициенты исходного уравнения зависят только от времени и не зависят от координат. В этом случае структурные функции также зависят только от времени. Ряд для искомой функции практически тот же самый, что и в общем случае

$$u(x,t) = \sum_{p+q=0}^{\infty} N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(t)\,\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}; \qquad p = 0,1,2,\ldots;\ q = 0,1,2,\ldots \tag{20}$$

Рекуррентные уравнения для структурных функций можно получить либо подстановкой ряда ряда (20) в исходное уравнение, либо просто удалением

лишних слагаемых из общих уравнений (10)-(12)

В случае $p+q=1$

$$\Big(\varrho\dot{N}^{(0)}_{(1)i_1}\Big)^{\cdot}+\eta\dot{N}^{(0)}_{(1)i_1}=0\,,\qquad \Big[\varrho\Big(\dot{N}^{(1)}_{(0)}+1\Big)\Big]^{\cdot}+\eta\Big(\dot{N}^{(1)}_{(0)}+1\Big)=\eta^o\,. \tag{21}$$

В случае $p+q=2$

$$\Big(\varrho\dot{N}^{(0)}_{(2)i_1i_2}\Big)^{\cdot}+\eta\dot{N}^{(0)}_{(2)i_1i_2}=C_{i_2i_1}(t)-C^o_{i_2i_1}\,,\ \Big[\varrho\Big(\dot{N}^{(1)}_{(1)i_1}+N^0_{(1)i_1}\Big)\Big]^{\cdot}+$$
$$+\eta\Big(\dot{N}^{(1)}_{(1)i_1}+N^{(0)}_{(1)i_1}\Big)=-\varrho\dot{N}^0_{i_1}\,,$$
$$\Big[\varrho\Big(\dot{N}^{(2)}_{(0)}+N^{(1)}_{(0)}\Big)\Big]^{\cdot}+\eta\Big(\dot{N}^{(2)}_{(0)}+N^{(1)}_{(0)}\Big)=\varrho^o-\varrho\Big(\dot{N}^{(1)}_{(0)}+1\Big)\,. \tag{22}$$

В случае $p+q=n\geqslant 3$

$$\Big[\varrho\Big(\dot{N}^{(p+q)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\Big)\Big]^{\cdot}+\eta\Big(\dot{N}^{(p+q)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\Big)=C_{i_qi_{q-1}}N^{(p+q)}_{(q-2)i_1\ldots i_{q-2}}-$$
$$-\varrho\Big(\dot{N}^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p+q-2)}_{(q)i_1\ldots i_q}\Big) \tag{23}$$

Все дифференциальные уравнения (21)-(23) представимы в виде:

$$\Big(\varrho\dot{Y}\Big)^{\cdot}+\eta\dot{Y}=f(t) \tag{24}$$

Общее решение уравнения (24) представляется следующей формулой:

$$Y(t)=\begin{cases}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\xi)}{\varrho(\xi)}\,d\xi+K_2\,, & \eta\neq 0\,,\ \varrho\neq 0\\ \int\limits_0^t\frac{1}{\varrho(\xi)}\left[K_1+\int\limits_0^{\xi}f(\tau)d\tau\right]\,d\xi+K_2\,, & \eta=0\,,\ \varrho\neq 0\\ \int\limits_0^t\frac{f(\tau)}{\eta(\tau)}\,d\tau+K_1\,, & \eta\neq 0\,,\ \varrho=0\end{cases} \tag{25}$$

Здесь K_1, K_2 — константы интегрирования. Функция $\varphi(t)$ имеет вид:

$$\varphi(t)=\left[K_1+\int\limits_0^t f(\tau)\,e^{\int\limits_0^{\tau}a(s)ds}d\tau\right]\,e^{-\int\limits_0^t a(s)ds}\,,\qquad a(s)=\frac{\eta(s)}{\varrho(s)}$$

В начале рекурсии, т.е. при $p=0$, $q=1$ правая часть уравнения (24) $f(t)=0$, следовательно, при замене в (25) $Y(t)$, K_1, K_2, $\varphi(t)$ на $N^{(0)}_{(1)i_1}(t)$, K_{1i_1}, K_{2i_1}, $\varphi_{i_1}(t)$ получим общее решение первого из уравнений (24)

$$N^{(0)}_{(1)i_1}(t)=\begin{cases}K_{1i_1}\int\limits_0^t\frac{1}{\varrho(\xi)}\,\exp\Big(-\int\limits_0^{\xi}a(s)ds\Big)\,d\xi+K_{2i_1}\,, & \eta\neq 0\,,\ \varrho\neq 0\\ K_{1i_1}\int\limits_0^t\frac{1}{\varrho(\xi)}d\xi+K_{2i_1}\,, & \eta=0\,,\ \varrho\neq 0\\ K_{1i_1}\,, & \eta\neq 0\,,\ \varrho=0\end{cases} \tag{26}$$

Если же $p = 1$, $q = 0$, то правая часть уравнения (24) $f(t) = \eta^o$, при этом $Y = N^{(1)}_{(0)}(t) + t$, следовательно

$$N^{(1)}_{(0)}(t) = -t + \begin{cases} \int\limits_0^t \frac{\varphi(\xi)}{\varrho(\xi)}\, d\xi + K_2\,, & \eta \neq 0\,,\ \varrho \neq 0 \\ \int\limits_0^t \frac{K_1 + \eta^o \xi}{\varrho(\xi)} d\xi + K_2\,, & \eta = 0\,,\ \varrho \neq 0 \\ \int\limits_0^t \frac{\eta^o}{\eta(\tau)}\, d\tau + K_1\,, & \eta \neq 0\,,\ \varrho = 0 \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\varphi(\xi) = \left[K_1 + \int\limits_0^\xi \eta^o\, e^{\int\limits_0^\tau a(s)ds} d\tau \right] e^{-\int\limits_0^\xi a(s)ds}\,, \qquad a(s) = \frac{\eta(s)}{\varrho(s)}$$

4. Выбор коэффициентов сопутствующего уравнения

Как уже отмечалось, коэффициенты C^o_{ij}, η^o, ϱ^o сопутствующего уравнения (2) это любые физически допустимые величины в каждом физическом процессе, описываемом исходным уравнением (1). При использовании структурных функций выбор сопутствующих коэффициентов влияет на скорость сходимости ряда (9) к точному решению. Рассмотрим сначала случай когда коэффициенты C_{ij}, η, ϱ зависят только от координат и периодичны по всем трем координатам. В этом частном случае структурные функции будут непрерывны и периодичны с теми же периодами по координатам. Кроме этого, непрерывны и периодичны выражения в квадратных скобках в уравнениях (14)-(16). Обозначим любую из ячеек периодичности через Ω и усредним по ячейке уравнения (14)-(16). В результате получим формулы для коэффициентов C^o_{ij}, η^o, ϱ^o в сопутствующих уравнениях

$$C^o_{i_2 i_1} = \left\langle C_{i_2 j} N^{(0)}_{(1) i_1, j} + C_{i_2 i_1} \right\rangle_\Omega\,, \qquad \eta^o = \left\langle \eta \right\rangle_\Omega\,, \qquad \varrho^o = \left\langle \varrho + \eta N^{(1)}_{(0)} \right\rangle_\Omega \tag{28}$$

В этих формулах участвуют только начальные структурные функции, которые являются периодическими решениями уравнений (26) на ячейке периодичности. Как показано в работе [6] периодические решения структурных уравнений существуют и определены с точностью до постоянных величин. Эти постоянные величины определяются из условия нормировки, т.е. из условия равенства нулю средних значений структурных функций в ячейке периодичности. В этом случае среднее в любой ячейке от решения исходного уравнения, представленного рядом (13), стремится к решению сопутствующего уравнения при дроблении структуры.

Решение уравнений (26) можно искать и из условия равенства нулю искомых структурных функций на границе ячейки. В этом случае получаются

также непрерывные периодические структурные функции, причем эффективные характеристики, найденные по формулам (27) практически не отличаются [40, 41].

В случае, когда коэффициенты C_{ij}, η, ϱ произвольные интегрируемые функции координат сопутствующие коэффициенты будем определять по тем же самым формулам (27), только усреднять будем не по отдельной ячейке, а по всей области

$$C^o_{i_2 i_1} = \left\langle C_{i_2 j} N^{(0)}_{(1)i_1,j} + C_{i_2 i_1} \right\rangle, \qquad \eta^o = \left\langle \eta \right\rangle, \qquad \varrho^o = \left\langle \varrho + \eta N^{(1)}_{(0)} \right\rangle \tag{29}$$

Здесь усреднение берется по области V определения исходной задачи и обозначается просто угловыми скобками. В периодическом по координатам случае формулы (27) и (29) дают разные результаты, однако они сближаются с дроблением структуры, т.е. с увеличением числа ячеек периодичности в области V. Это объясняется тем, что в периодическом случае в области V имеется пограничный слой толщиной порядка характерного размера ячейки периодичности, в котором структурные функции перестраиваются от граничных до периодических внутри области функций.

Формулы (29) будем использовать и в самом общем случае зависимости коэффициентов от координат и времени. В этом случае сопутствующие коэффициенты будут функциями времени $C^o_{ij}(t)$, $\eta^o(t)$, $\varrho^o(t)$. Причем, в начальный момент времени "плотность" $\varrho^o(0) =< \varrho(x,0) >$, поскольку в силу начального условия $N^{(1)}_{(0)}(x,0) = 0$. При конкретных расчетах удобно принять в качестве сопутствующих коэффициентов выражения (29) в начальном моменте времени.

Заметим, что интегральная формула (6) остается справедливой и в том случае, когда изначально сопутствующие коэффициенты являются функциями времени. Она справедлива даже в том случае, когда сопутствующие коэффициенты — функции координат и времени.

Вернемся к случаю коэффициентов, зависящих от одной координаты x_3. Подставим в формулы (29) структурные функции (19) и получим явные аналитические выражения для сопутствующих коэффициентов C^o_{ij} и ϱ^o

$$C^o_{ij} = \left\langle C_{i3} C^{-1}_{33} \right\rangle \left\langle C^{-1}_{33} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{33} C_{3j} \right\rangle - \left\langle C_{i3} C^{-1}_{33} C_{3j} \right\rangle,$$

$$\varrho^o = \left\langle \varrho \right\rangle + \left\langle \eta \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y) \int\limits_0^{y} \bar{\eta}(z) dz dy \right\rangle - \left\langle \eta \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y) dy \right\rangle$$
$$\left\langle C^{-1}_{33} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{33} \int\limits_0^{x_3} \bar{\eta}(z) dz \right\rangle = \tag{30}$$

$$= \left\langle \varrho \right\rangle + \left\langle \eta \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y) \left[\int\limits_0^{y} \bar{\eta}(z) dz - \left\langle C^{-1}_{33} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{33}(y_1) \int\limits_0^{y_1} \bar{\eta}(z) dz \right\rangle \right] dy \right\rangle$$

Здесь $\bar{\eta} = \eta(x_3) - \langle \eta \rangle$.

5. Заключение

Разработана методика осреднения исходного линейного уравнения математической физики с переменными коэффициентами, основанная на интегральной формуле представления решения уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами. Из интегральной формулы, в предположении о гладкости сопутствующего решения, получены представления в виде рядов по всевозможным производным от сопутствующего решения. Коэффициенты рядов названы структурными функциями. Это название связано с тем, что коэффициенты рядов зависят от типа функций, описывающих зависимость исходных коэффициентов от координат и времени. Структурные функции обращаются в нуль при стремлении исходных коэффициентов к сопутствующим коэффициентам. Для них получены системы вспомогательных рекуррентных уравнений. Исследованы частные случаи зависимости исходных коэффициентов только от координат и только от времени. В последнем случае рекуррентные уравнения представляют собой системы однотипных обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых найдено общее решение. Показано, что в частном случае периодической зависимости коэффициентов от координат сопутствующие коэффициенты с необходимостью выражаются через начальные структурные функции. Эти формулы распространены на непериодический случай. При зависимости исходных коэффициентов от координат и времени предложено выбирать сопутствующие коэффициенты по формулам непериодического случая в начальный момент времени. Найдены аналитические формулы для сопутствующих коэффициентов в случае неоднородного по толщине, бесконечного в плане слоя. Интересным является то обстоятельство, что в случае исходного уравнения параболического типа с коэффициентами, зависящими от координаты по толщине слоя, эффективное сопутствующее уравнение является гиперболическим уравнением. Из этого следует вывод, что в теле, в котором процесс описывается параболическим уравнением с переменными по координатам коэффициентами возмущения распространяются с конечной скоростью [29].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.

2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов.Перевод с английского Е.В. Малиновской под редакцией академика Н.Н. Боголюбова. М.: Иностранная литература, 1960. 511 с.

3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1963. 412 с.

4. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974. 416 с.

5. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 448 с.

6. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненние процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

7. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

8. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.

9. Шкиль Н. И., Вороной А. Н, Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Киев: Вища школа, 1985. 248 с.

10. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.

11. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.

12. Kalamkarov A. L. Composite and reinforced elements of construction. Baffins Lane, Chechester, West Sussex PO19, England.: John wiley & Sons Ltd. 1992. 286 c.

13. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1993. 462 с.

14. Levinski T., Telega J. J. Plates, Laminates and shells. Asymptotic Analysis and Homogenization. N.J.: World Scientific Publishing Co, 2000. 739 c.

15. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС. 2003. 376 с.

16. Колпаков А. Г. Композиционные материалы и элементы конструкций с начальными напряжениями. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2007. 254 с.

17. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск: Пороги. 2008. 197 с.

18. Левин В. А., Лохин В. В., Зингерман К. М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела, 1997. № 4. С. 45–50.

19. Левин В. А., Лохин В. В., Зингерман К. М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН. 2002.Т. 382. № 4. С. 482–487.

20. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1995. 366 с.

21. Зубчанинов В. Г. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа. 1990. 368 с.

22. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ. ФИДЕСИС в руках инженера. М.: ЛЕНАНД, 2015.

23. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа. 1999. 695 с.

24. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Изд.2. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.

25. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.

26. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.

27. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.

28. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

29. Горбачев В. И. О распространении тепла в неоднородном стержне с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2017. №2. С. 48–54.

30. Gorbachev V. I. Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. application in the mechanics of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International J. // 2017. V. 8. № 2. С. 147–170.

31. Горбачев В. И. О собственных частотах продольных колебаний неоднородного стержня с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2016. №1. С. 31–39.

32. Горбачев В.И. Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости. Применение в механике композитов // Прикладная математика и механика. 2014. Т.78. № 2. С. 277–299.

33. Горбачев В.И., Москаленко О.Б. Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2012. №2. С. 41–47.

34. Горбачев В.И. Динамические задачи механики композитов // Известия РАН. Серия физическая. 2011. Т. 75. № 1. С. 117–122.

35. Горбачев В.И. О колебаниях в неоднородном упругом теле. Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 г. М.: Изд-во МГУ. 2011. С. 319–326.

36. Горбачев В.И. Интегральные формулы в симметричной и несимметричной упругости // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2009. №6. С. 52–56.

37. Архангельский А.Ф., Горбачев В.И. Эффективные характеристики гофрированных пластин // Изв. РАН МТТ. 2007. № 3. С. 137–155

38. Горбачев В.И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. 61–76.

39. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.

40. Олехова Л.В. Кручение неоднородного анизотропного стержня. Диссертация кандидата физико-математических наук. Master's thesis, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 2009.

41. Емельянов А.Н. Эффективные характеристики в моментной теории упругости. Диссертация кандидата физико-математических наук. Master's thesis, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 2016.

REFERENCES

1. Lomakin, V.A. 1976, *Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel [The theory of elasticity of nonhomogeneous bodies]*, Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova, Moscow, pp. 367.

2. Chapman, S. & Kauling, T. 1952, *The mathematical theory of non-uniform gases*, At the University Press, Camdridge, pp. 511.

3. Bogolyubov, N. N. & Mitropolsky, Ju. A. 1976, *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]*, Nauka, Moscow, pp. 412.

4. Marchenko, V. A. & Hruslov, E. Ja. 1974, *Kraevye zadachi v oblastyah s melkozernistoj granicej [The regional problems in areas with fine-grained boundary]*, Naukova Dumka, Kiev, pp. 416.

5. Berdichevsky, V. L. 1983, *Variacionnye principy mekhaniki sploshnoj sredy [Variational principles of a mechanics of a continuous medium]*, Nauka, Moscow, pp. 448.

6. Bahvalov, N.,C. & Panasenko, G.P. 1984 *Osrednennie processov v periodicheskih sredah [Averaging of processes in periodic Materials]*, Nauka, Moscow, pp. 352.

7. Pobedria, B.E. 1984 *Mekhanika kompozicionnyh materialov [Mechanics of composite materials]*, Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova, Moscow, pp. 336.

8. Sanchez-Palencia, E. 1980 *Non-Homogeneous Media and Vibration theory*, Springer-Verlag, New York, pp. 472.

9. Shkil, N.I., Voronoi, A.N. & Lejfura, V.N. 1985, *Asimptoticheskie metody v differencial'nyh i integro-differencial'nyh uravneniyah [Asymptotic methods in the differential And the integro-differential equations]*, Vishaya shkola, Kiev, pp. 248.

10. Andrianov, I. V,, Lesnichaja, V. A. & Manevich, L. I. 1985, *Metod usredneniya v statike i dinamike rebristyh obolochek [Method of an average in a statics and dynamics Ridge covers*, Nauka, Moscow, pp. 221.

11. Oleynik, O. A., Iosifjan, G. A. & Shamaev, A. S. 1990, *Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnyh sred [Mathematical problems of the theory it is strong Non-Homogeneous media]*, Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova, Moscow, pp. 311.

12. Kalamkarov, A. L. 1992, *Composite and reinforced elements of construction*, John wiley & Sons Ltd., Baffins Lane, Chechester, West Sussex PO19 1 UD, England, pp. 286.

13. Jikov, V. V., Kozlov, S. M. & Oleynik, O. A. 1993, *Usrednenie differencial'nyh operatorov [Averaging of differential operators]*, Fizmatlit, Moscow, pp. 462.

14. Levinski, T. & Telega, J. J. 2000, *Plates, Laminates and shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*, World Scientific Publishing Co, pp. 739.

15. Bardzokas, D.I. & Zobnin, A.I. 2003, *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov v kompozicionnyh materialah periodicheskoj struktury [Mathematical modeling of physical processes in Composite materials of periodic structure]*, Editorial URSS, Moscow, pp. 376.

16. Colpakov, A.G. 2007, *Kompozicionnye materialy i ehlementy konstrukcij s nachal'nymi napryazheniyami [Composite materials and elements of structures with initial stress]*, Izdatel'stvo SO RAN, Novosibirsk, pp. 254.

17. Bolshakov, V.I., Andrianov, I.V. & Danishevsky, V.V. 2008, *Asimptoticheskie metody rascheta kompozitnyh materialov s uchetom vnutrennej struktury [Asymptotic methods of calculation of composite materials taking into account interior structure]*, Porogi, Dnepropetrovsk, pp. 197.

18. Levin, V.A., Lohin, V.V., & Zingerman, K.M. 1997, "About one expedient of an estimation of the effective Performances of porous skew fields at final strains", *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* (Mechanics of Solids), no. 4, pp. 45 - 50.

19. Levin, V.A., Lohin, V.V., & Zingerman, K.M. 2002, "About construction of the effective defining Relations for porous elastic materials at final strains and their superposition", Doklady RAN (Reports of the Russian Academy of Sciences), vol. 382, no. 4. pp. 482 - 487.

20. Pobedria, B.E. 1995, *Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Numerical methods in the elasticity and plasticity theory]*, Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova, Moscow, pp. 366.

21. Zubchaninov, V G. 1990, *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Bases of the elasticity and plasticity theory]*, Vysshaya shkola, Moscow, pp. 368.

22. Morozov, E.M., Levin, V.A., & Vershinin, A.V. 2015, *Prochnostnoj analiz. FIDESIS v rukah inzhenera [Strengths Analysis. FIDESIS in hands of the engineer*, LENLAND, Moscow, pp. 408.

23. Arhipov, G.I., Sadovnichy, V.A., & Chubarikov, V.N. 1999, *Lekcii po matematicheskomu analizu [Lectures on the mathematical analysis]*, Visshaia Shkola, Moscow, pp. 695.

24. Gelfand, I.M., & Shilov, G.E. 1959, *Obobshchennye funkcii i dejstviya nad nimi. Izd.2 [Generalised functions and actions over them. Ed. 2]*, Fizmatgiz, Moscow, pp. 470.

25. Kech, V., & Teodoresku, P. 1978, *Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkcij s prilozheniyami v tekhnike [Introduction in the theory of generalised functions with applications in the technician]*, Mir, Moscow, pp. 518.

26. Sobolev, S.L. 1966, *Uravneniya matematicheskoj fiziki [The equations of mathematical physics]*, Nauka, Moscow, pp. 443.

27. Vladimirov, V.S. 1976, *Obobshchennye funkcii v matematicheskoj fizike [Generalised functions in the mathematical physics]*, Nauka, Moscow, pp. 280.

28. Novatsky, V. 1975, *Teoriya uprugosti [The elasticity theory]*, Mir, Moscow, pp. 872.

29. Gorbachev, V.I. 2017, "Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section", *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 72, no. 2, pp. 48–53. doi: 10.3103/S0027133017020042

30. Gorbachev, V.I. 2017, "Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. aplication in the mechanics of composite materials", *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International J.*, Vol. 8. no. 2, pp. 147 - 170. doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v8.i2.40

31. Gorbachev, V.I. 2016, "Natural frequencies of longitudinal oscillations for a nonuniform variable cross-section rod", *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 71, no. 1, pp. 7–15. doi: 10.3103/S0027133016010027

32. Gorbachev, V.I. 2014, "Integral formulae in the coupled problem of the thermoelasticity of an inhomogeneous body. application in the mechanics of composite materials", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 78, no. 2, pp. 192–208. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.07.013

33. Gorbachev V.I., & Moskalenko O.B. 2012, "Stability of bars with variable rigidity compressed by a distributed force", *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 67, no. 1, pp. 5–10. doi: 10.3103/S0027133012010025

34. Gorbachev, V.I. 2011, "Dynamic problems of composite mechanics", *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.*, Vol. 75, no. 1, pp. 110–115. doi: 10.3103/S1062873810121068

35. Gorbachev, V.I. 2011, "About oscillations in an inhomogeneous elastic body", *Elasticity and an unelasticity. Materials of the international scientific symposium on problems of the mechanics of deformable bodies, devoted to the 100 anniversary from the date of A.A.Ilyushin's birth (Moscow, on January, 20-21th, 2011)*, *Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova*, Moscow, pp. 319–326.

36. Gorbachev, V.I. 2009, "Integral formulas in symmetric and asymmetric elasticity", *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 64, no. 6, pp. 148–151. doi: 10.3103/S002713300906003X

37. Arkhangel'skyi, A. F., & Gorbachev, V. I. 2007, "Effective characteristics of corrugated plates", *Mechanics of Solids*, Vol. 42, no. 3. pp. 447–462. doi: 10.3103/S0025654407030132

38. Gorbachev, V. I. 1991, "Method of tensors of Green for a solution of boundary value problems of the theory of elasticity of inhomogeneous media", *The Computing mechanics of a deformable rigid body*, Moscow, no. 2, pp. 61 - 76.

39. Brebbia, C., Telles, J., & Vroubel, L. 1984, Boundary elements techniques, Springer-verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, pp 526.

40. Olekhova, L. V. 2009, *Torsion of an inhomogeneous non-isotropic rod. A thesis of the candidate Physical and mathematical sciences. Master's thesis*, The Moscow State University of M.V.Lomonosova, Mehaniko-mathematical Faculty.

41. Yemelyanov, A. N. 2016, *Effective performances in moment elasticity theories. A thesis The candidate of physical and mathematical sciences. Master's thesis*, The Moscow State University of M.V.Lomonosova, Mehaniko-mathematical Faculty.

получено 23.06.2017
принято в печать 14.09.2017