ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-131-153

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДЕФОРМИРУЕМЫХ УПРУГИХ ТЕЛ, ПУТЁМ ИНТЕГРАЦИИ ДВУХ ПАКЕТОВ: EULER И FIDESYS

В. Г. Бойков[1], И. В. Гаганов[2], Ф. Р. Файзуллин[3], А. А. Юдаков[4]
(Москва)

Аннотация

Статья посвящена описанию теоретических основ моделирования движения деформируемого твердого тела в составе системы и практического опыта реализации такого моделирования на основе интеграции промышленных пакетов инженерного программного обеспечения EULER и Fidesys. Предполагается, что деформируемое тело подвержено большому движению в составе многокомпонентной механической системы и малым упругим деформациям [2]. Вывод общих уравнений динамики упругих конструкций впервые опубликован в [3]. Он базируется на использовании классического (линейного) метода конечных элементов (МКЭ) и редукции модели методом Крейга-Бэмптона. Никаких дополнительных приближений не вводится, тем самым получаются уравнения движения упругих тел в составе системы, наиболее общие в рассматриваемой постановке. Метод Крейга-Бэмптона [1] - это метод редуцирования КЭ-модели деформируемого тела путем аппроксимации малых упругих перемещений тела набором допустимых форм: статических форм от единичных смещений интерфейсных узлов тела и собственных форм колебаний при зажатых интерфейсных узлах. Полная КЭ-модель упругого тела и ее редукция подготавливаются в ПК Fidesys [4] и передаются в ПК EULER для расчета динамики тела в составе системы. Для представления пространственного движения

[1]Бойков Владимир Георгиевич, доцент, кафедра оптимального управления факультета ВМиК Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, генеральный директор, ООО "АвтоМеханика boykov@euler.ru

[2]Гаганов Илья Валерьевич, студент, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, программист-разработчик ООО Фидесис

[3]Файзуллин Фарис Рафаэльевич, аспирант, кафедра СМ1 МГТУ им. Н. Э. Баумана, инженер, ООО "АвтоМеханика jake-take@yandex.ru

[4]Юдаков Алексей Александрович, научный сотрудник, ООО "АвтоМеханика you_ad@mail.ru

упругого тела используется метод присоединенной системы координат (ПСК): эта система координат определяет движение тела как твердого и относительно нее тело совершает малые упругие колебания. Уравнения динамики упругих тел выводятся из уравнения Лагранжа второго рода, в качестве обобщенных координат используется положение ПСК и вектор модальных координат. Из выражения для кинетической энергии тела получены формулы расчета обобщенной матрицы масс и вектора сил инерции. Также в статье приведены остальные члены уравнения движения и формулы расчета компонент уравнений связей.

В статье приведен пример реального практического моделирования движения механической системы автомобиля КАМАЗ-5308 с упругой рамой. Для учета деформируемости разработана конечноэлементная модель рамы с платформой. При моделировании автомобиля и разработке КЭ-модели дополнительные навески на раму и на платформу, деревянный настил платформы считаются значительно менее жесткими, чем основная конструкция; кронштейны крепления подвески, кабины считаются очень жесткими по сравнению с самой конструкцией; не учитываются радиусы скругления и технологические отверстия. В качестве интерфейсных для динамической редукции указаны 26 узлов, соответствующих местам крепления к раме остальной конструкции автомобиля – подвески, груза и кабины. После разработки КЭ-модели в ПК Fidesys формируются четыре файла, содержащих матрицы жесткости и масс, геометрию модели, собственные и статические формы. Полученная модель рамы используется в ПК EULER и рассчитывается в составе многокомпонентной механической системы. Модель автомобиля с деформируемой рамой используется для учета влияния динамики автомобиля в целом на напряженно-деформированное состояние рамы в испытании «Переставка».

Ключевые слова: деформируемое твердое тело, линейный метод конечных элементов, редукция модели методом Крейга-Бэмптона, присоединенная система координат, многокомпонентная механическая система, динамика системы тел, уравнения связей, интеграция, пакеты инженерного программного обеспечения, автоматизация расчетов, испытание маневра автомобиля, деформируемая рама автомобиля, ПК EULER, ПК Fidesys

Библиография: 15 названий.

MODELING THE MOTION OF A MECHANICAL SYSTEM CONSISTING OF DEFORMABLE ELASTIC BODIES, BY INTEGRATING TWO PACKAGES: EULER AND FIDESYS

V. G. Boikov, I. V. Gaganov, F. F. Rafaelyevich, A. A. Yudakov
(Moscow)

Abstract

In the article theoretical basis of flexible bodies' large displacement within a multibody system as well as practical experience of flexible multibody dynamics simulation with integrated computer-aided design software systems EULER and Fydesis are considered. The hypothesis of flexible body undergoing both small elastic deformations and large motion within a multibody system is used [2]. The derivation of dynamic equations of motion of flexible bodies was first published in [3]. The derivation uses classical (linear) finite element method (FEM) and the Craig–Bampton method [1] of FE model's matrices reduction. No additional approximations are involved, thus obtaining the most general equations in given problem definition. In the Craig–Bampton method a finite element model of a flexible body is reduced approximating small elastic deformation with a set of modes: static modes where the bound nodes' displacements equal one unit, and normal modes where the bound nodes are fixed. The full finite element model and the reduced model are prepared in Fidesys software [4] and are transferred to EULER software to be used in a dynamics simulation as a part of a multibody system. For the flexible body's spatial motion representation a floating frame of reference is used. A floating frame of reference defines the motion of a rigid body, related to which flexible body's motion is considered as small deformations. The dynamic equation for flexible bodies are derived from Lagrange equations of the second kind. As generalized coordinates the floating frame of reference's position and the modal coordinates vector are used. The expressions for the inertial forces vector and the generalized mass matrix are derived from the expression for the kinetic energy of the body. The article also contains all the other terms of the dynamic equation and the expressions for constraint equations' components calculation.

In the article an example of real practical motion simulation for KAMAZ-5308 vehicle with taking into consideration the flexibility of the vehicle's frame is given. A finite element model of the frame with the load platform was developed to consider it's flexible deformations. The following assumptions have been adopted for simulating the vehicle: additional attachments to the frame and platform, load platform's wooden flooring are considered significantly less rigid than the basic structure; brackets for attaching the suspension and the cabin are considered very rigid in comparison with the structure itself; roundings and technological apertures are not considered. As the interface for dynamic reduction, there are 26 nodes corresponding to the places of attachment to the frame of the rest of the car - suspension, load and cabin. After the development of the finite element model in the Fidesys software, four files are created, containing the stiffness and mass matrices, model geometry, normal and static modes. The obtained model of the frame is used in the EULER software as part of a multibody system motion simulation. The model of a car with a flexible frame is used to take into account the effect of the dynamics of the car as a whole on the stress-strain state of the frame in the lane change maneuver.

Keywords: deformable solid body, linear finite element method, Craig-Bampton model reduction, floating frame of reference, multibody system,

multibody dynamics, constraint equations, software integration, CAE, simulation, vehicle maneuver test, deformable vehicle frame, EULER software, Fidesys software

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Рассматривается реализация интерфейса для расчетов с использованием конечно-элементных моделей в виде упругих звеньев в ПК EULER. Это позволяет учесть влияние упругих деформаций звеньев механизма на динамику движения, а также быстро и удобно рассматривать эффекты изменения параметров движения и структуры механизма на напряженно-деформированное состояние в детали.

2. Теоретические основы расчета

1) деление узлов на *интерфейсные* (узлы воздействия силовых элементов и шарниров и узлы, приближенное представление движения которых нежелательно) и *внутренние*;

2) расчет *статических форм* от единичных смещений по всем степеням свободы интерфейсных узлов;

3) расчет *собственных форм колебаний* при зажатых интерфейсных узлах;

4) построение *модальной матрицы* H_F, *редуцированных матриц масс и жесткости*: $\bar{M} = H_F^T M_{FEM} H_F$, $\bar{C} = H_F^T C_{FEM} H_F$, где M_{FEM}, C_{FEM} – полные матрицы масс и жесткости МКЭ-модели тела; при этом малые упругие перемещения тела аппроксимируются набором допустимых форм: $x_n = H_F w$, где x_n – координаты всех узлов МКЭ-модели в *собственной системе координат тела*, w – набор модальных координат размера H, где H – полное количество используемых форм;

5) ортонормализация базиса модального пространства на основе решения $\bar{Y}$ обобщенной проблемы собственных значений для редуцированных матриц: $\left(\bar{C} - \lambda \bar{M}\right) \bar{y} = 0$; получение модальной матрицы H_R, ортонормальной относительно полных матриц модели: $H_R = H_F \bar{Y}$, тогда: $\bar{M} = H_R^T M_{FEM} H_R$ – единичная, $\bar{C} = H_R^T C_{FEM} H_R$ – диагональная. При этом $x_n = H_R w$.

Упомянутая собственная система координат тела, в которой упругие перемещения аппроксимируются набором допустимых форм, – это так называемая присоединенная система координат (ПСК) тела. Это система координат, связанная с телом. Если тело не совершает упругих колебаний (условно говоря, заморожено), то всё движение тела определяется движением ПСК. Именно относительно ПСК рассматривается понятие малости упругих перемещений x_n в методе Крейга-Бэмптона. Для краткости базовую инерциальную систему координат будем называть СК0.

Везде далее под модальной матрицей H, вообще говоря, подразумевается *произвольная* матрица допустимых форм, при этом вектор модальных координат w выбирается таким образом, что

$$x_n = Hw \tag{1}$$

Тем самым достигается общая независимость от используемого метода редукции. В частности, это может быть матрица H_F или H_R из модели Крейга-Бэмптона. Нужно отметить, однако, что для обеспечения корректности дальнейших выкладок линейная зависимость между допустимыми и твердотельными формами тела должна быть исключена каким-либо способом. Этого можно достичь, если, например, при ортонормализации модального подпространства в методе Крейга-Бэмптона не включать формы колебаний с нулевой частотой в модальную матрицу H_R.

Уравнения динамики упругих тел выводятся из уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = s \tag{2}$$

где T - кинетическая энергия, U - потенциальная, q - вектор обобщенных координат тела, s - вектор обобщенных сил. В качестве q выберем совокупность двух векторов: шестимерного вектора (r, ϕ), характеризующего положение ПСК относительно СК0, и вектора модальных координат w:

Для любых векторов a, b, ... обозначим через $(a, b, ...)$ их объединение в общий вектор. Для удобства записи формул и их анализа примем в качестве r и ϕ такие вектора, что:

$$\dot{r} = v, \dot{\phi} = \omega$$

где v, ω - линейная и угловая скорости ПСК относительно СК0. Пусть $a = \dot{v}$, $\varepsilon = \dot{\omega}$ - линейное и угловое ускорения ПСК относительно СК0, $\xi = \dot{w}$, $\zeta = \ddot{w}$.

Пусть N - число всех узлов МКЭ-модели тела, тогда число степеней свободы модели равно $6N$, размер модальной матрицы H равен $6N \times H$, где H - количество используемых форм. Индекс r соответствует поступательным перемещениям, φ - вращательным, $k = \overline{1, N}$ - упругим; индексы k и l - индексы узлов, $k, l = \overline{1, N}$, i и j - индексы форм, $i, j = \overline{1, H}$. Обозначим через $x_{n,k}$ шестимерный вектор положения k-ого узла в ПСК, H_k - часть модальной матрицы, относящуюся к этому узлу:

$$x_{n,k} = \begin{bmatrix} r_k \\ \phi_k \end{bmatrix} = H_k w = \begin{bmatrix} H_k^r \\ H_k^\varphi \end{bmatrix} w$$

Пусть $h_{k,i}$ – i-ый столбец матрицы H_k: $H_k = \begin{bmatrix} h_{k,1} & \cdots & h_{k,H} \end{bmatrix}$; $h_{k,i} = \left(h_{k,i}^r, h_{k,i}^\varphi\right)$. Обозначим через ρ_k вектор начального положения центра k-ого узла относительно ПСК. Тогда с учетом (1) положение центра k-ого узла относительно СК0 в любой момент времени можно записать в виде:

$$r_k = r + \rho_k + H_k^r w \tag{3}$$

Суть вывода уравнений упругих конструкций заключается в записи формул для расчета всех членов уравнения Лагранжа (2). Из теории классического метода конечных элементов известно уравнение для расчета кинетической энергии МКЭ-модели тела:

$$T = {}^1\!/_2 v_n^T M_{FEM} v_n \tag{4}$$

где v_n - скорости всех узлов МКЭ-модели тела, M_{FEM} - полная матрица масс. В классическом МКЭ предполагается, что тело не подвержено большому движению как целое, поэтому и скорости, и матрица масс записываются относительно базовой инерциальной СК. Основная идея применения этой формулы в рассматриваемой в настоящей статье постановке заключается в следующем: полная матрица масс постоянна в собственной СК тела, то есть в ПСК. Это утверждение очевидно из определения присоединенной системы координат, поскольку движение ПСК определяет движение тела как целого, и относительно ПСК рассматриваются все упругие перемещения точек тела.

Все физические величины в рамках одной формулы, естественно, должны выражаться в одной системе координат. В формуле (3) вектор скоростей v_n удобно выразить в ПСК, поскольку матрица масс постоянна в ПСК. При этом, конечно же, скорости записываются относительно базовой СК0. Вектор v_n равен: $v_n = (v_1, \omega_1, ..., v_N, \omega_N)$, где v_k, ω_k - линейная и угловая скорости k-ого узла относительно СК0. С учетом формулы (2) можно показать, что:

$$v_k = \begin{bmatrix} I & -\tilde{(}\rho_k + H_k^r w) & H_k^r \end{bmatrix} \cdot \dot{q}, \omega_k = \begin{bmatrix} 0 & I & H_k^\varphi \end{bmatrix} \cdot \dot{q}$$

Знак "$\sim$" над трехмерным вектором обозначает операцию взятия кососимметрической матрицы для этого вектора; знак "$\sim$" над открывающей скобкой применяется к результату выражения в скобках.

Если ввести матрицы $I_k^0 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{P}_k = \begin{bmatrix} -\tilde{(}\rho_k + H_k^r w) \\ I \end{bmatrix}$, $I^0 = \begin{bmatrix} I_1^{0T} & \cdots & I_N^{0T} \end{bmatrix}^T$, $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1^T & \cdots & \mathrm{P}_N^T \end{bmatrix}^T$, то вектор скоростей можно выразить в виде:

$$v_n = \begin{bmatrix} I^0 & \mathrm{P} & H \end{bmatrix} \cdot \dot{q} \tag{5}$$

Пусть полная матрица масс имеет произвольный вид:

$$M_{FEM} = \begin{bmatrix} M_{FEM,11} & \cdots & M_{FEM,1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{FEM,N1} & \cdots & M_{FEM,NN} \end{bmatrix},$$

$$M_{FEM,kl} = \begin{bmatrix} m_{rr,kl} & m_{r\varphi,kl} \\ m_{\varphi r,kl} & m_{\varphi\varphi,kl} \end{bmatrix}, k, l = \overline{1, N} \tag{6}$$

где $m_{rr,kl}$, $m_{r\varphi,kl}$, $m_{\varphi r,kl}$, $m_{\varphi\varphi,kl}$ - блоки размера 3×3. Подставив формулы (5) и (6) в формулу (3), выражение для расчета кинетической энергии можно записать в виде:

$$T = {}^1\!/_2\, \dot{q}^T M \dot{q} \tag{7}$$

Здесь M - обобщенная матрица масс. Чтобы выписать формулы для расчета всех ее компонент, нужно ввести 18 матриц, представленных в таблице 1. Каждая сумма здесь – это сумма по индексам k, l от 1 до N, то есть двойная сумма по всем узлам тела. Все эти матрицы постоянны в ПСК.

$I_{rr} = \sum m_{rr,kl}$	$I_{\varphi r,\,h_i} = \sum m_{\varphi r,kl}\tilde{h}^r_{l,\,i}$	$I_{rr,\,\rho h_i} = \sum \tilde{\rho}_k m_{rr,kl}\tilde{h}^r_{l,\,i}$
$I_{r\varphi} = \sum m_{r\varphi,kl}$	$I_{rr,\,H} = \sum m_{rr,kl}H^r_l$	$I_{rr,\,\rho H} = \sum \tilde{\rho}_k m_{rr,kl}H^r_l$
$I_{\varphi\varphi} = \sum m_{\varphi\varphi,kl}$	$I_{r\varphi,\,H} = \sum m_{r\varphi,kl}H^\varphi_l$	$I_{r\varphi,\,\rho H} = \sum \tilde{\rho}_k m_{r\varphi,kl}H^\varphi_l$
$I_{rr,\,\rho} = \sum m_{rr,kl}\tilde{\rho}_l$	$I_{\varphi r,\,H} = \sum m_{\varphi r,kl}H^r_l$	$I_{rr,\,h_ih_j} = \sum \tilde{h}^r_{k,\,i}m_{rr,kl}\tilde{h}^r_{l,\,j}$
$I_{\varphi r,\,\rho} = \sum m_{\varphi r,kl}\tilde{\rho}_l$	$I_{\varphi\varphi,\,H} = \sum m_{\varphi\varphi,kl}H^\varphi_l$	$I_{rr,\,h_iH} = \sum \tilde{h}^r_{k,\,i}m_{rr,kl}H^r_l$
$I_{rr,\,h_i} = \sum m_{rr,kl}\tilde{h}^r_{l,\,i}$	$I_{rr,\,\rho\rho} = \sum \tilde{\rho}_k m_{rr,kl}\tilde{\rho}_l$	$I_{r\varphi,\,h_iH} = \sum \tilde{h}^r_{k,\,i}m_{r\varphi,kl}H^\varphi_l$

Таблица 1: Компоненты обобщенной матрицы масс

Формулы для расчета блоков матрицы масс можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
J_{rr} &= I_{rr} \\
J_{r\varphi} &= I_{r\varphi} - \left(I_{rr,\,\rho} + \sum_{i=1}^{H} I_{rr,\,h_i} w_i \right) \\
J_{rw} &= I_{rr,\,H} + I_{r\varphi,\,H} \\
J_{\varphi\varphi} &= I_{\varphi\varphi} - \Bigg\{ I_{rr,\,\rho\rho} + I_{\varphi r,\,\rho} + I^T_{\varphi r,\,\rho} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{H} \left(I_{rr,\,\rho h_i} + I^T_{rr,\,\rho h_i} + I_{\varphi r,\,h_i} + I^T_{\varphi r,\,h_i} \right) w_i + \sum_{i,\,j=1}^{H} I_{rr,\,h_ih_j} w_i w_j \Bigg\} \\
J_{\varphi w} &= I_{rr,\,\rho H} + I_{r\varphi,\,\rho H} + I_{\varphi r,\,H} + I_{\varphi\varphi,\,H} + \sum_{i=1}^{H} \left(I_{rr,\,h_iH} + I_{r\varphi,\,h_iH} \right) w_i \\
J_{ww} &= H^T M H = \bar{M}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Видно, что J_{rr}, J_{rw}, J_{ww} - постоянны в ПСК, $J_{r\varphi}$, $J_{\varphi w}$ - линейно зависят от w, а $J_{\varphi\varphi}$ - квадратично. Матрица масс M в ПСК имеет простой вид:

$$M = \begin{bmatrix} J_{rr} & J_{r\varphi} & J_{rw} \\ J^T_{r\varphi} & J_{\varphi\varphi} & J_{\varphi w} \\ J^T_{rw} & J^T_{\varphi w} & J_{ww} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Очевидно, что M симметрична. Из сопоставления формул (3) и (7) для расчета кинетической энергии легко получить, что если M_{FEM} положительно определена, то и M также положительно определена.

Итак, получены окончательные формулы для расчета обобщенной матрицы масс. Подставив формулы (7) и (9) в уравнение Лагранжа (2), можно показать, что:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = M\ddot{q} - k$$

где k - вектор обобщенных сил инерции, который в ПСК можно записать в виде:

$$k = -\left(\bar{k}_r, \bar{k}_\phi, \bar{k}_w\right) \tag{10}$$

Если ввести вектора $k_{w,r\varphi}, k_{w,\varphi\varphi}, k_{w,\varphi w}$, компоненты которых равны:

$$\begin{aligned} k_{w,r\varphi,i} &= -\omega^T \left(\partial J_{r\varphi}^T / \partial w_i\right) v \\ k_{w,\varphi\varphi,i} &= -{}^1\!/_2 \omega^T \left(\partial J_{\varphi\varphi} / \partial w_i\right) \omega \\ k_{w,\varphi w,i} &= -\omega^T \left(\partial J_{\varphi w} / \partial w_i\right) \xi. \end{aligned}$$

то формулы для расчета компонент вектора обобщенных сил инерции запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \bar{k}_r &= \left(\tilde{\omega} J_{rr} - J_{rr}\tilde{\omega}\right) v + \tilde{\omega} J_{r\varphi}\omega + \dot{J}_{r\varphi}\omega + \tilde{\omega} J_{rw}\xi \\ \bar{k}_\varphi &= \tilde{v} J_{rr} v + \tilde{\omega} J_{\varphi\varphi}\omega + \dot{J}_{\varphi\varphi}\omega + \\ &\quad + \left(\dot{J}_{r\varphi}^T + \tilde{\omega} J_{r\varphi}^T - J_{r\varphi}^T \tilde{\omega} - \tilde{\left(J_{r\varphi}\omega\right)}\right) v + \left(\tilde{v} J_{rw} + \tilde{\omega} J_{\varphi w} + \dot{J}_{\varphi w}\right) \xi \\ \bar{k}_w &= k_{w,r\varphi} + k_{w,\varphi\varphi} + k_{w,\varphi w} - J_{rw}^T \tilde{\omega} v + \dot{J}_{\varphi w}^T \omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее остальные члены уравнения Лагранжа (2). Полная потенциальная энергия тела равна: $U = U_C + U_g$, где U_C - потенциальная энергия упругих деформаций, U_g - потенциальная энергия гравитации. Используя формулу для расчета энергии упругих деформаций МКЭ-модели тела:

$$U_C = {}^1\!/_2 x_n^T C_{FEM} x_n$$

и учитывая, что полная матрица жесткости постоянна в ПСК (по аналогии с матрицей масс), можно показать, что: $\partial U_C / \partial q = Cq$, где $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix}$ - обобщенная матрица жесткости, $\bar{C} = H^T C_{FEM} H$ - редуцированная матрица жесткости. Значит обобщенная сила упругости равна:

$$s_C = -Cq.$$

Если обозначить через g_r - вектор ускорения свободного падения, можно показать, что: $\partial U_g/\partial q = -Mg$, где $g = (g_r; 0; 0)$. Поэтому обобщенная сила гравитации равна:

$$s_g = Mg$$

Математическая модель демпфирования строится известными методами на основе диссипативной функции Рэлея: $R = \frac{1}{2}\dot{q}^T D\dot{q}$, где D - обобщенная матрица демпфирования: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{D} \end{bmatrix}$. Редуцированная матрица демпфирования $\bar{D}$ получается либо методом Рэлея: $\bar{D} = \alpha\bar{C} + \beta\bar{M}$, где α и β – некоторые константы, либо на основе представления свободных колебаний тела набором независимых уравнений движения с одной степенью свободы, тогда: $\bar{D} = diag\,(d_1; ...; d_H)$, где $d_k = 2\gamma_k\omega_k$, γ_k – критический коэффициент затухания соответствующей формы, ω_k - ее собственная частота колебаний. Обобщенная сила демпфирования при этом равна:

$$s_D = -D\dot{q}$$

Пусть к k-ому интерфейсному узлу приложены сила f_k и момент m_k в точке, отстоящей от этого узла на вектор $\rho_{f,k}$, тогда $s_{n,k} = \left(s^r_{n,k}, s^\varphi_{n,k}\right) = (f_k, m_k + \tilde{\rho}_{f,k} f_k)$ - приложенная сила, приведенная к центру узла. Из условия равенства виртуальных работ на возможных перемещениях по обобщенным координатам получим (суммирование ведется по всем узлам тела, к которым приложены силы):

$$\begin{aligned}
s_{\varphi,k} &= s^\varphi_{n,k} + \tilde{(}\rho_k + H^r_k w) \cdot s^r_{n,k}, \\
s_{\varphi,k} &= s^\varphi_{n,k} + \tilde{(}\rho_k + H^r_k w) \cdot s^r_{n,k} \\
s_{r,k} &= s^r_{n,k}, \\
s_{w,k} &= H^T_k \cdot s_{n,k}.
\end{aligned}$$

Двусторонние связи, накладываемые на упругое тело, моделируются аналогично связям на твердые тела. Подробно принципы построения уравнений связи рассмотрены в статье [2]; здесь приведем их коротко. Общий вид уравнения связи:

$$g(a\varepsilon_c, v\omega_c, r\phi_c, t) = 0$$

где $a\varepsilon_c, v\omega_c, r\phi_c$ - ускорения, скорости и положения i-ой локальной системы координат (ЛСК) связи относительно СК0. Продифференцировав, можно получить уравнение для расчета ускорений в связи (суммирование ведется по всем ЛСК данной связи):

$$\sum_i Gc_i \cdot a\varepsilon_{c,i} = h_c$$

где $Gc_i = (Gc_{r,i}, Gc_{\varphi,i})$ – матрица производных невязок связи по движениям i-ой ЛСК связи, h_c – вектор невязки ускорения связи, определяемый в зависимости от типа связи. Выразив параметры ЛСК, которая связана с твердым или упругим телом, через параметры этого тела, получаем:

$$\sum_i G_i \ddot{q}_i = h_c + h_a$$

где $h_a = \sum_i h_{a,i}$, G_i - матрица производных невязок i-ой ЛСК связи по обобщенным координатам соответствующего тела (обобщенный якобиан связи). Если i-ая ЛСК связи относится к k-ому интерфейсному узлу тела и отстоит от него на вектор ρ_c, то опуская индекс i, можно записать:

$$\begin{aligned}
G &= (G_r, G_\varphi, G_w) \\
G_\varphi &= Gc_\varphi - Gc_r \cdot \tilde{(}\rho_k + H_k^r w + \rho_c) \\
G_r &= Gc_r \\
G_w &= Gc_r \cdot H_k^r + (-Gc_r \cdot \tilde{\rho}_c + Gc_\varphi) \cdot H_k^\varphi \\
h_a &= -Gc_r \cdot \left[\tilde{\omega} \cdot \tilde{\omega} \cdot (\rho_k + H_k^r w + \rho_c) + 2\tilde{\omega} \cdot H_k^r \xi + \tilde{(}2\omega + H_k^\varphi \xi) \cdot \tilde{(}H_k^\varphi \xi) \cdot \rho_c\right]
\end{aligned}$$

Обобщенные силы реакции связей можно выразить формулой (см. [2]):

$$R = G^T \lambda$$

где λ - силовые факторы в связях.

Таким образом, рассмотрены все члены уравнения Лагранжа (2). Сводя их воедино, получаем уравнение для расчета движения деформируемого тела в общей постановке:

$$M\ddot{q} = s_g + s_a - Cq - D\dot{q} + k + R \tag{11}$$

где M, C, D – обобщенные матрицы масс, жесткости и демпфирования, k – вектор сил инерции, s_g – обобщенная сила гравитации, s_a – обобщенные активные силы, R - силы реакций связей. Уравнение (11) можно записать в виде:

$$M \cdot \ddot{q} = s + k + R$$

где $s = s_g + s_a - Cq - D\dot{q}$ - сумма обобщенных сил упругости, демпфирования, гравитации и активных сосредоточенных сил. Оно имеет вид такой же, как и обобщенное уравнение движения твердого тела. Тем самым оказывается возможным моделировать динамику упругой конструкции в составе многокомпонентной механической системы.

3. Модель автомобиля КАМАЗ-5308

Модель автомобиля КАМАЗ-5308 состоит из агрегата Несущий модуль, включающего в себя агрегат Рама_Упругая, и остальных агрегатов: Груз,

Кабина, Моторно-трансмиссионная установка, Навеска, Опорно-ходовой модуль, Рулевое управление. Часть геометрии модели создана в программе NX. Изображение модели с упругой рамой приведено на Рис. 1.

Расчетные схемы передней и задней подвески показаны на Рис. 2 и Рис. 3. В моделях подвесок приняты следующие допущения:

1. мост и рычаги моста считаются абсолютно жесткими;
2. деформации и трение в шарнирах подвески отсутствуют.

В автомобиле КАМАЗ-5308 используется система рулевого управления, поворачивающая колеса одной оси при помощи неразрезной трапеции и рулевого механизма с вращательным перемещением выходного звена. Схема модели приведена на Рис. 4.

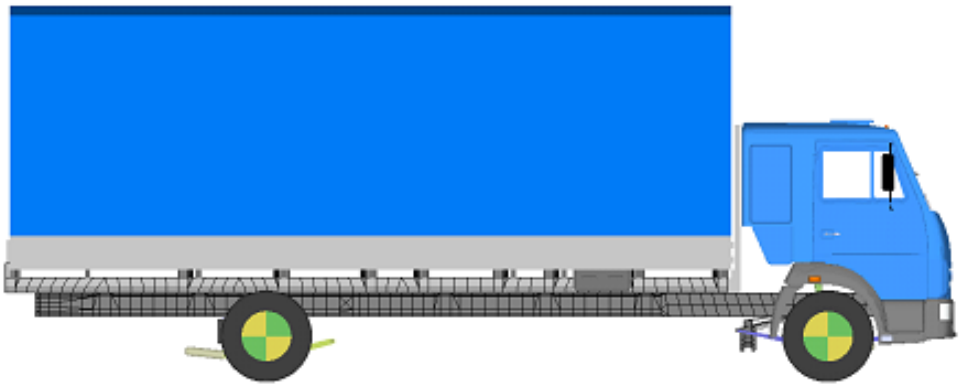

Рис. 1: Вид модели автомобиля КАМАЗ-5308 с включенной КЭ моделью рамы.

4. Конечно-элементная модель несущего модуля автомобиля КАМАЗ-5308

Конечно-элементная модель несущего модуля автомобиля КАМАЗ-5308 состоит из следующих элементов:

1. Рама изделия
2. Платформа изделия

При моделировании были сделаны следующие допущения:

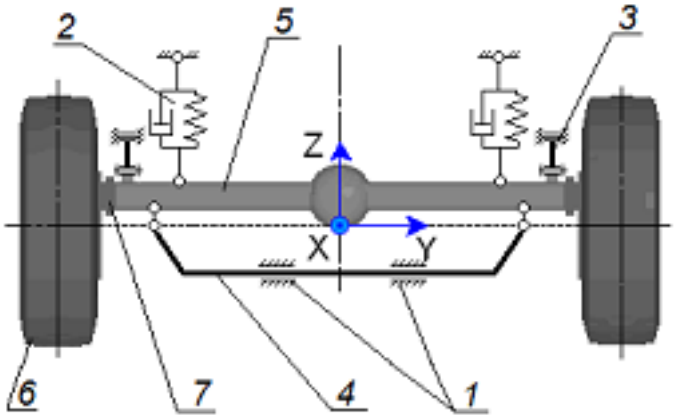

Рис. 2: Схема модели передней подвески: 1– базовое звено; 2– упруго-демпфирующий элемент; 3– продольный рычаг; 4– стабилизатор; 5– мост; 6 – колесо; 7 – цапфа.

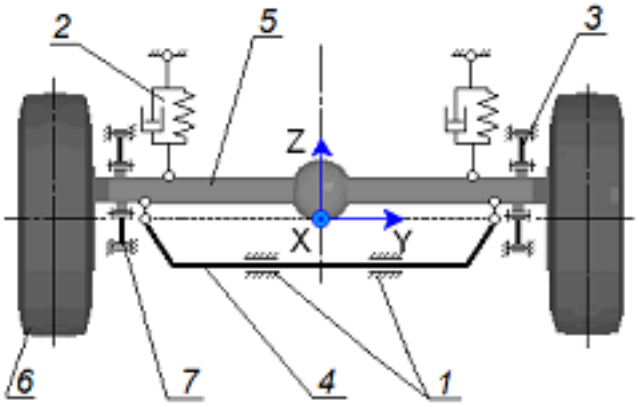

Рис. 3: Схема модели задней подвески: 1– базовое звено; 2– упруго-демпфирующий элемент; 3– продольный рычаг; 4– стабилизатор; 5– мост; 6 – колесо; 7 – дополнительный продольный рычаг.

1. Дополнительные навески на раму и на платформу, деревянный настил платформы считаются значительно менее жесткими, чем основная конструкция
2. Не учитываются радиусы скругления
3. Кронштейны крепления подвески, кабины считаются очень жесткими по сравнению с самой конструкцией
4. Не учитываются технологические отверстия

В модели используется система измерений СИ. Модель состоит из 5415

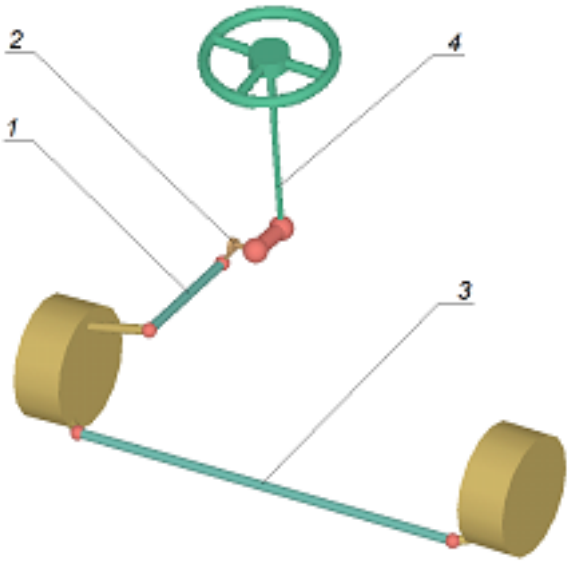

Рис. 4: Схема модели рулевого управления: 1 – тяга продольная; 2 – сошка; 3 – тяга поперечная; 4 – рулевая колонка.

четырехузловых оболочечных элементов типа CQUAD4. Материал (сталь) задан модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и плотностью.

В качестве интерфейсных для динамической редукции указаны 26 узлов. Они соответствуют местам крепления к раме остальной конструкции автомобиля – подвески, груза и кабины.

Общий вид модели показан на Рис. 5.

5. Вычисление собственных и статических форм с помощью ПК Fidesys[4]

.

Процесс начинается с загрузки модели в Fidesys[6][7][8]. Fidesys поддерживает множество форматов, а также возможность создания самой модели в Fidesys[15][16]. При наличии готовой модели, после её загрузки, необходимо лишь выбрать интерфейсные узлы.

В следующей реализации связки, при наличии готовой модели, необязательно запускать интерфейс Fidesys[9]. Планируется, что пользователь сможет запустить расчёт из интерфейса Euler. Таким образом, при изучении данной технологии пользователю нет необходимости разбираться в интерфейсах двух программ одновременно.

Алгоритм автоматически выполнит втягивание модели в Fidesys и все необходимые расчёты.[13][14]

Необходимо определить количество степеней свободы у интерфейсных узлов. В нашем примере модель полностью состоит из двумерных деталей[5][11]

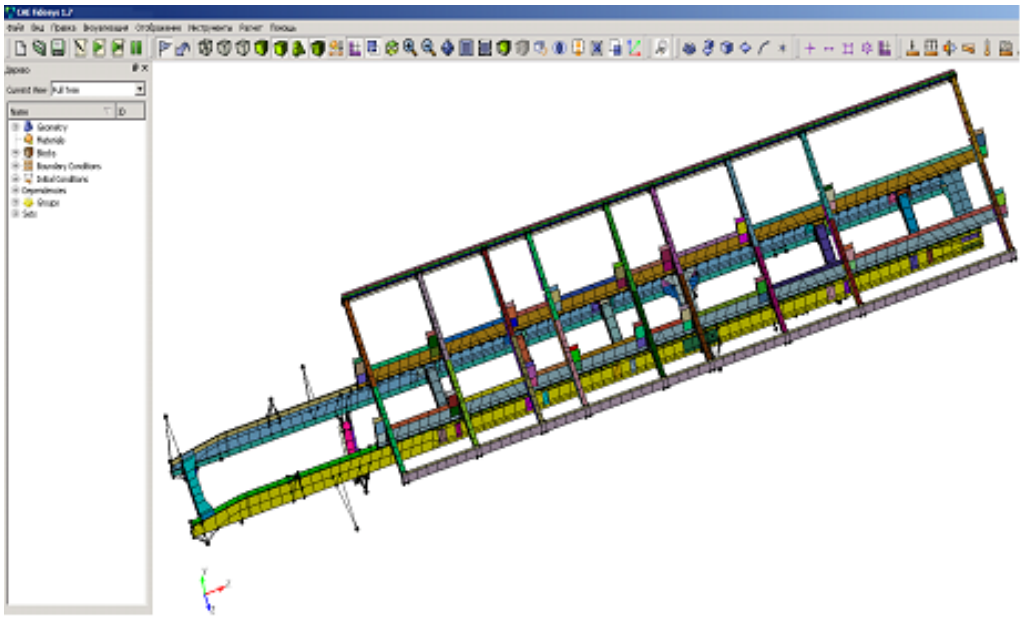

Рис. 5: Общий вид модели открытой в Fidesys.

и соответственно всего степеней свободы будет $26 \cdot 6 = 156$. Следуя алгоритму Крейга-Бэмптона[3] необходимо сделать 156 расчётов на статику, где каждый расчёт представляет собой следующее[10] – все интерфейсные узлы полностью закреплены, кроме одного; у этого узла производится единичное смещение по одной из степеней свободы, но по оставшимся степеням свободы узел будет так же полностью закреплён.

Один отдельный расчёт на собственные частоты на модели, где все интерфейсные узлы зафиксированы.

Отдельно происходит выгрузка геометрии модели, матриц масс и жёсткости.

При наличии жёстких связей, матрицы сокращаются на строки соответствующие зависимым степеням свободы. [12]

Для передач разреженных матриц был выбран формат .HB.

Для передачи собственных и статических форм был разработан специальный формат .cbm

В итоге мы получаем 4 файла:

M_CCS.hb и K_CCS.hb – матрицы масс и жёсткости соответственно.

geometry.vtk – файл с геометрией модели.

forms.cbm – файл с собственными и статическими формами.

В случае наличия жёстких связей информация о них помещается в vtk файл.

В случае нашего примера все файлы суммарно занимают около 102 мегабайт.

Все эти файлы считываются Euler.

В расчете динамики используется 10 первых собственных форм упругого тела.

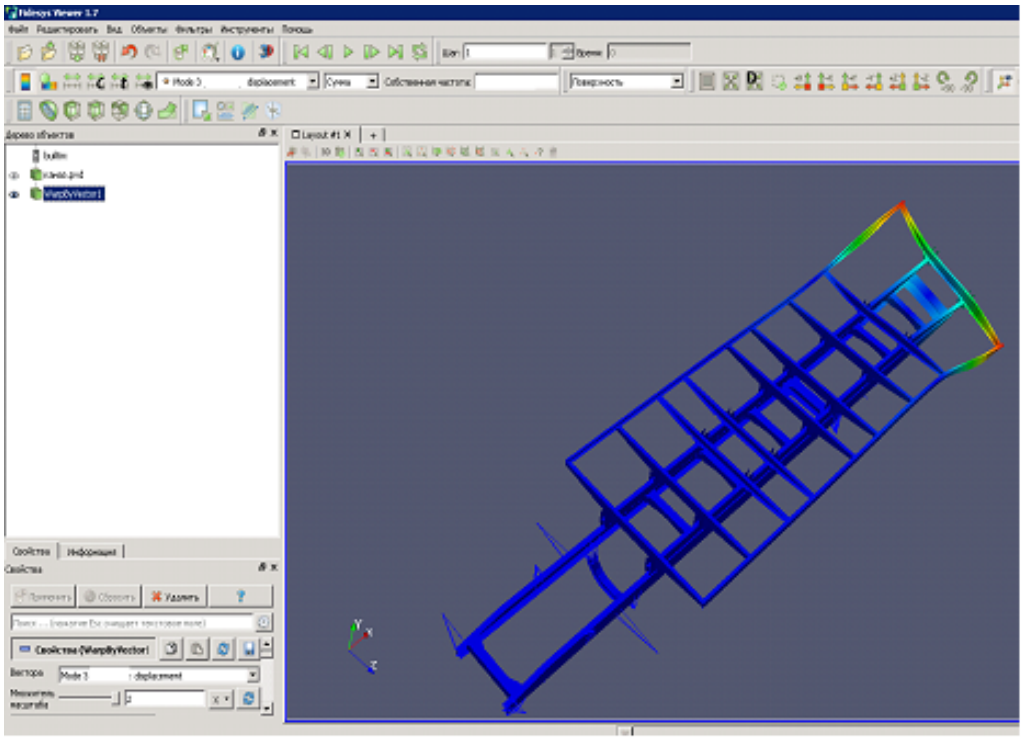

Рис. 6: Собственные формы, используемые в расчете динамики.

6. Испытание «Переставка»

Модель предназначена для определения максимальной скорости маневра при смене полосы движения на ограниченном участке пути, при которой не происходит отрыва колес от дороги или выхода КМ за пределы габаритного коридора. Данный тип испытания регламентируется ГОСТ Р 52302-2004.

В процессе расчета управление машиной осуществляется при помощи системы управления с обратной связью. Для моделирования испытания используется размеченный коридор, показанный на Рис. 8. Параметры сцепления полигона задаются пользователем.

КМ сообщается начальная скорость V_{x0} движения на участке 1 размеченного коридора. Данная скорость по желанию пользователя может поддерживаться на протяжении всего испытания при помощи регулятора скорости.

На участке 1 размеченного коридора рулевое колесо удерживается в нейтральном положении.

С момента пересечения точкой в середине первой оси КМ границы между участками 1 и 2 начинается работа алгоритма управления, описанного выше.

На участке 3 рулевое колесо удерживается в нейтральном положении.

На всех участках выход КМ за пределы размеченного коридора отслеживается по положению специальных габаритных точек, закрепленных на раме КМ вдоль обоих бортов. Габаритные точки располагаются в районе каждой оси КМ на высоте центров колес и на расстоянии половины заданной габаритной ширины КМ от его продольной плоскости.

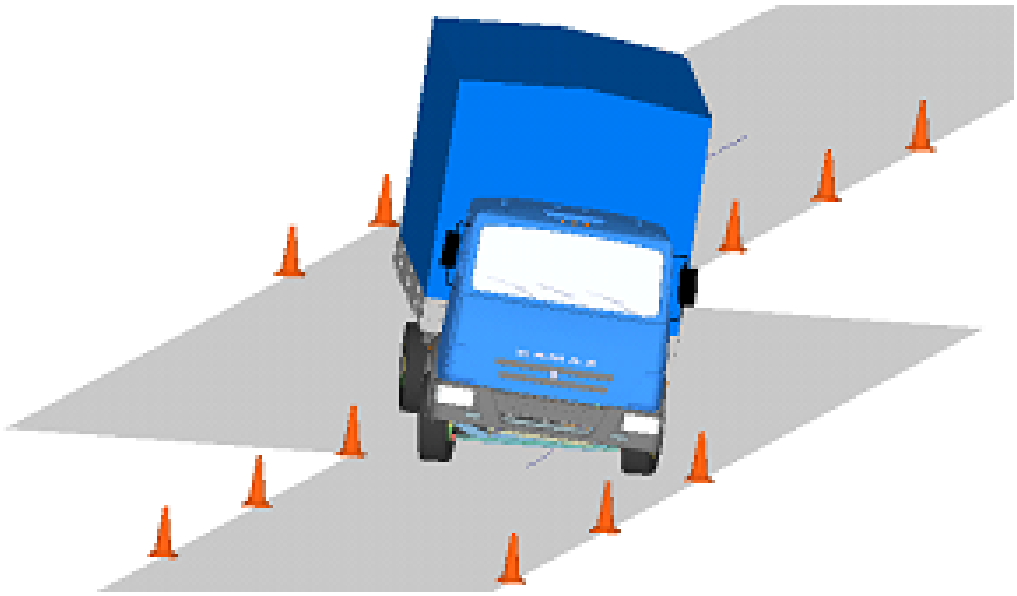

Рис. 7: Внешний вид модели.

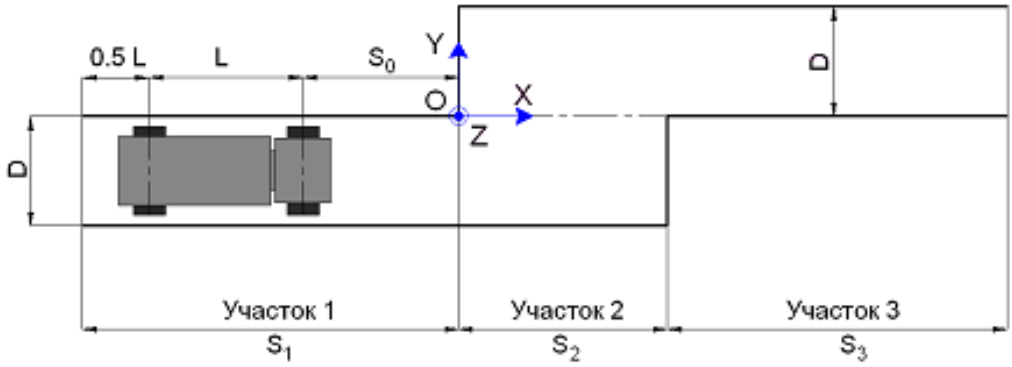

Рис. 8: Разметка участка модели испытаний “переставка”.

Отрыв колес от дороги отслеживается по датчикам прогиба шин.

Завершение заезда производится автоматически после прохождения КМ расстояния $(S_0 + 4 \cdot S_2) \cdot 1.2$. Если начальная скорость V_{x0} КМ меньше или равна 0.1 м/с, заезд завершается через 10 с модельного времени.

7. Результаты тестовых расчетов

Для тестирования работы упругих звеньев и влияния учета упругости звеньев на результаты расчетов для автомобиля КАМАЗ-5308 проведены расчеты испытаний «Переставка» для случаев с жесткой и с упругой рамой.

Испытание проводилось на скорости автомобиля ч30 км/ч. и 55 км/ч. Длина участка переставки – 20 м.

На Рис. 9 - Рис. 11 показаны результаты испытания «Переставка» на скорости 30 км/ч (черные линии – упругая рама, красные линии – жесткая рама). Также для рамы получены значения упругих перемещений (не учитывающие перемещения рамы как единого целого). Наибольшие упругие перемещения испытывает передняя часть рамы, максимальное значение – 11 мм.

На Рис. 12 - Рис. 14 показаны результаты испытания «Переставка» на скорости 55 км/ч (черные линии – упругая рама, красные линии – жесткая рама). Для рамы получены значения упругих перемещений (не учитывающие перемещения рамы как единого целого). Наибольшие упругие перемещения испытывает передняя часть рамы, максимальное значение – 21 мм.

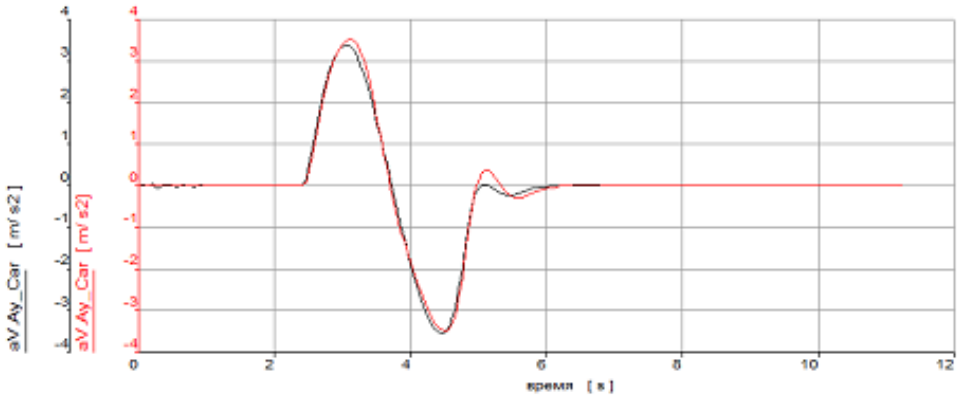

Рис. 9: Боковое ускорение для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 30 км/ч.

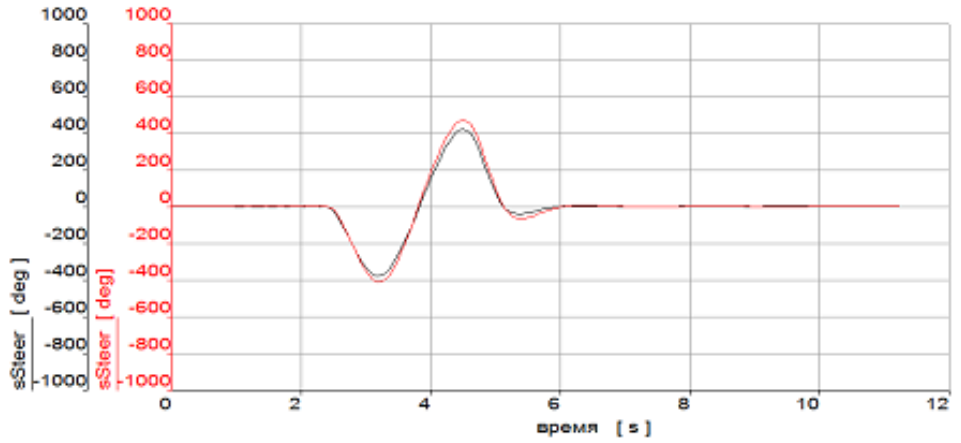

Рис. 10: Угол поворота руля для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 30 км/ч.

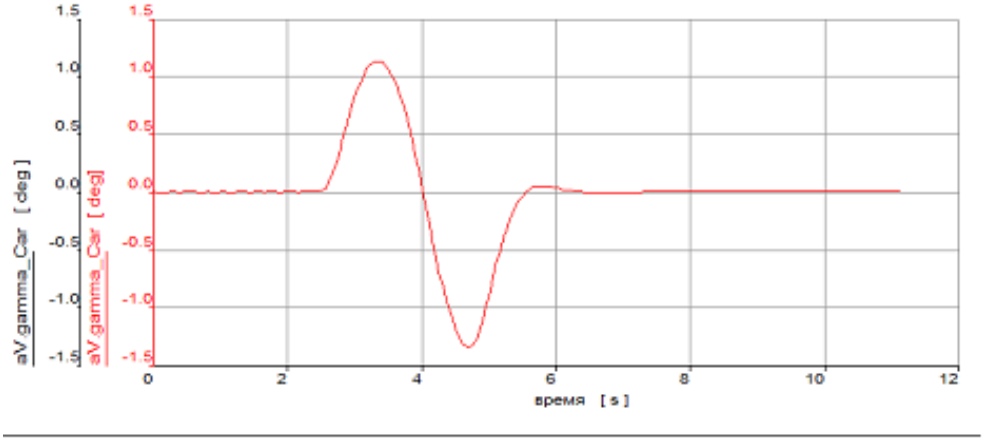

Рис. 11: Угол поперечного крена для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 30 км/ч.

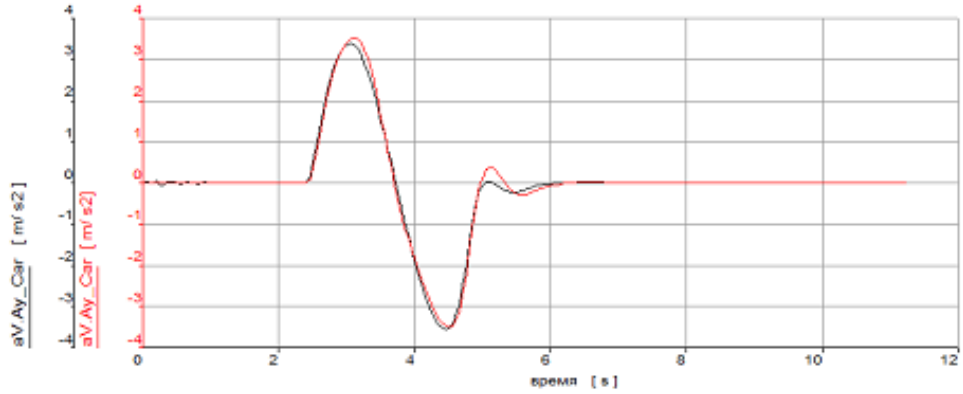

Рис. 12: Боковое ускорение для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 55 км/ч.

В данной статье использование МКЭ-модели было использовано для учета влияния динамики движения автомобиля в целом на напряженно-деформированное состояние рамы.

Таким образом, МКЭ-модель, подготовленная в ПК Fidesys, может быть втянута в ПК EULER и рассчитана в составе многокомпонентной механической системы в рамках классического метода конечных элементов и с использованием редукции методом Крейга-Бэмптона. Для демонстрации произведен расчет динамики модели на примере испытания "Переставка"для автомобиля КАМАЗ-5308 с упругой рамой.

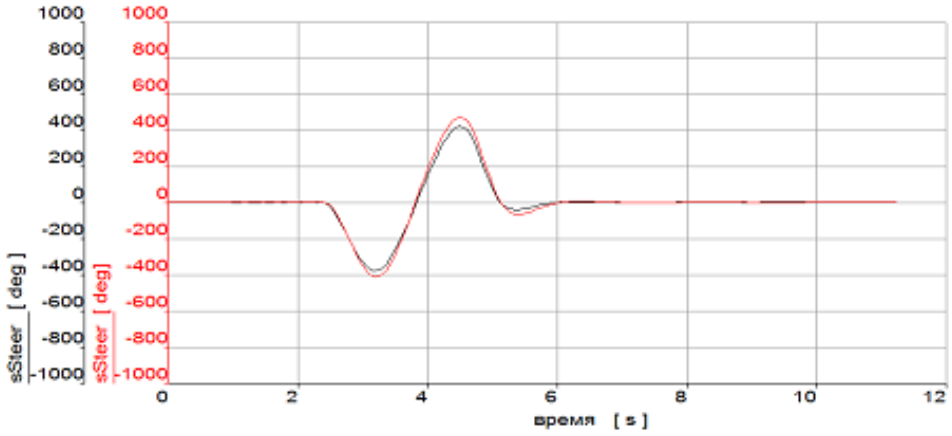

Рис. 13: Угол поворота руля для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 55 км/ч.

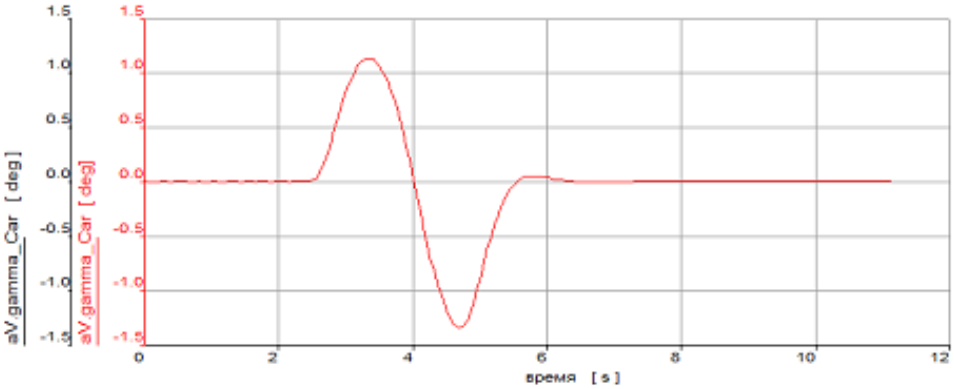

Рис. 14: Угол поперечного крена для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 55 км/ч.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Craig R.R., Bampton M.C. Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. N 7. P. 1313-1319.

2. Бойков В.Г., Юдаков А.А. Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе EULER // Информационные технологии и вычислительные системы. 2011. № 1. С. 42-52.

3. Юдаков А.А. Принципы построения общих уравнений динамики упругих тел на основе модели Крейга-Бэмптона и их практически значимых приближений // Вестник Удмуртского университета. Серия 1: Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 126–140

4. https://cae-fidesys.com

5. Решение плоской задачи о концентраторе напряжений произвольной формы, образованном в нагруженном теле. Конечные деформации / В. А. Левин, В. В. Калинин, А. В. Вершинин, Г. Е. Пекарь // *Известия ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи"*. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 167–172.

6. *Левин В. А., Вершинин А. В.* ПРОМЫШЛЕННЫЙ ПАКЕТ ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань 20-24 августа 2015 г. Сборник докладов. 4480с. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015. — С. 2281–2283.

7. *Левин В. А.* Промышленная система инженерного прочностного анализа ФИДЕСИС. Обзор функциональных возможностей версии 1.5 // Доклады 25-го симпозиума "Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов". 13-17 октября 2014 г. — ООО НПКЦ ВЕСКОМ Москва, 2014. — С. 51–53.

8. *Левин В. А.* О разработке и использовании полнофункциональной многоплатформенной cae ФИДЕСИС // Материалы Международной научной конференции Современные проблемы математики, механики, информатики. Тула, 17 - 21 сентября 2012 г. — 2012. — С. 192–193.

9. *Левин В. А.* К разработке универсальной прочностной cae “fidesys”. Модели, методы, результаты // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики"(Россия, Тула, 22-26 ноября 2010 г.). — ТулГУ Тула, 2010. — С. 169–171.

10. *Левин В. А., Морозов Е. М., Матвиенко Ю. Г.* Избранные нелинейные задачи механики разрушения (под редакцией В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ г. Москва, 2004. — С. 408.

11. *Левин В. А., Зингерман К. М.* Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. — Физматлит Москва, 2002. — С. 272.

12. *Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В.* Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА URSS Москва, 2015. — С. 408.

13. *Левин В. А., Вершинин А. В.* Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ Т.2 (Нелинейная вычислительная механика прочности . Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ Москва, 2015. — С. 544.

14. Использование суперкомпьютерных технологий в задачах прочности. Пакет fidesys / В. А. Левин, А. В. Вершинин, Д. И. Сабитов и др. // Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности / Под редакцией: академика В.А. Садовничего, академика Г.И. Савина, чл.-корр. РАН Вл.В. Воеводина. — Т. 2 из *Суперкомпьютерное образование.* — Издательство Московского университета Москва Москва, 2010. — С. 162–166.

15. *Левин В. А.* К разработке cae-систем для нелинейных задач прочности // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики"(Россия, Тула, 23-27 ноября 2009 г.). — ТулГУ Тула, 2009. — С. 222–224.

REFERENCES

1. Craig, R.R. & Bampton, M.C. 1968, “Coupling of substructures for dynamic analysis”, AIAA Journal, vol. 6, no. 7, pp. 1313–1319.

2. Boikov, V.G. & Yudakov, A.A. 2011, “Simulation of rigid and flexible multibody system dynamics with EULER software”, Inform. Tekhn. Vych. Sist., no. 1, pp. 42–52.

3. Yudakov, A.A. 2012, “Principles of flexible body general dynamic equations derivation based on the Craig–Bampton model and of their practically significant approximations”, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki (The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science), issue 3, pp. 126–140.

4. Main website Fidesys, Available at: https://cae-fidesys.com (accessed 21 December 2017).

5. Levin V. A., Kalinin V. V., Vershinin A. V., Pekar' G. E.*”Reshenie ploskoj zadachi o koncentratore napryazhenij proizvol'noj formy, obrazovannom v nagruzhennom tele. Konechnye deformacii”* (The solution of a plane problem of stress concentrators of arbitrary shape formed in a loaded body. Finite deformation) // Izvestiya TulGU. Series *"Differencial'nye uravneniya i prikladnye zadachi"*. — 2006. — vol. 12, No 1. — p. 167–172.

6. Levin V. A., Vershinin A. V. *“PROMYSHLENNYJ PAKET DLYA PROCHNOSTNOGO INZHENERNOGO ANALIZA”* (INDUSTRIAL PACKAGE FOR STRESS ENGINEERING ANALYSIS) // XI All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Kazan, August 20-24, 2015 the proceedings volume 4480p. — Publishing house of Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, 2015. — p. 2281–2283.

7. Levin V. A. *"Promyshlennaya sistema inzhenernogo prochnostnogo analiza FIDESIS. Obzor funkcional'nyh vozmozhnostej versii 1.5"* (Industrial system engineering strength analysis FIDESYS. Functional overview version 1.5) // he reports of the 25th Symposium "Problems of tires, rubbers and elastomeric composites". 13-17 October 2014— OOO NPKC VESKOM Moskva, 2014. p. 51–53.

8. Levin V. A. *"O razrabotke i ispol'zovanii polnofunkcional'noj mnogoplatformennoj cae FIDESIS"* (On the development and use of a full-featured multiplatform cae FIDESYS) Materials of the International scientific conference Modern problems of mathematics, mechanics, Informatics. Tula, 17 - 21 September 2012. — p. 192–193.

9. Levin V. A. *"K razrabotke universal'noj prochnostnoj cae "fidesys"*. Modeli, metody, rezul'taty" (Developing universal strength cae "Fidesys". Mo- Delhi, methods, results) // Materials of the International scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, Informatics"(Russia, Tula, 22-26 November 2010) — TulGU Tula, 2010. — p. 169–171.

10. Levin V. A., Morozov E. M., Matvienko YU. G. *"Izbrannye nelinejnye zadachi mekhaniki razrusheniya (pod redakciej V.A. Levina)."* (Selected nonlinear problems fracture mechanics (edited by V. A. Levin)) — FIZMAT-LIT g. Moscow, 2004. — p. 408.

11. Levin V. A., Zingerman K. M. *"Ploskie zadachi mnogokratnogo nalozheniya bol'shih deformacij. Metody resheniya."* (Plane problem of repeated superposition of large deformations. Methods of solution.) — Fizmatlit Moscow, 2002. — p. 272.

12. Morozov E. M., Levin V. A., Vershinin A. V. Prochnostnoj analiz. *"Fidesis v rukah inzhenera. — IZDATEL'SKAYA GRUPPA URSS Moskva"* (The strength analysis. Fidesys in the hands of the engineer.), 2015. — p. 408.

13. Levin V. A., Vershinin A. V. *"CHislennye metody. Parallel'nye vychisleniya na EHVM T.2 (Nelinejnaya vychislitel'naya mekhanika prochnosti. Cikl monografij v 5 tomah pod. red. V.A. Levina)"* (Parallel computing on computers, vol. 2 Nonlinear computational mechanics of durability). — FIZMATLIT Moscow, 2015. — p. 544.

14. V. A. Levin, A. V. Vershinin, D. I. Sabitov / *"Ispol'zovanie superkomp'yuternyh tekhnologij v zadachah prochnosti. Paket fidesys"* (The use of supercomputer technologies in problems of durability. Package Fidesys)//— vol. 2 of Supercomputing education. — Publishing house of Moscow University, Moscow, 2010. — p. 162–166.

15. Levin V. A. *"K razrabotke cae-sistem dlya nelinejnyh zadach prochnosti "* (The development of cae-systems for nonlinear problems of strength)//Materials of the International scientific conference "Modern problems of mathematics,

mechanics, Informatics"(Russia, Tula, 23-27 November 2009). — TulGU Tula, 2009. — p. 222–224.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017