ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3. 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-109-130

ОБ УЧЕТЕ ВЯЗКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ В ТЕОРИИ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

С. В. Белых[1], А. А. Буренин[2], Л. В. Ковтанюк[3], А. Н. Прокудин[4]

Аннотация

Предлагается геометрически и термодинамически непротиворечивая математическая модель больших деформаций материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами. Считается, что на стадии деформирования, предваряющей пластическое течение и при разгрузке вязкие свойства материала обеспечивают процесс ползучести и таким способом медленный рост необратимых деформаций. При быстром росте необратимых деформаций в условиях пластического течения вязкие свойства выступают в качестве механизма, тормозящего данное течение. Накопление необратимых деформаций, таким образом, происходит последовательно: первоначально в процессе ползучести, далее при пластическом течении и, наконец, снова за счет ползучести материала (при разгрузке). На упругопластических границах, продвигающихся по деформируемому материалу, происходит перемена в механизме роста необратимых деформаций с ползучести на пластичность и наоборот. Такая перемена возможна только в условиях непрерывности необратимых деформаций и скоростей их изменения, что накладывает требование о согласованности в определениях скоростей необратимых по распределению напряжений, то есть на законы ползучести и пластичности. Смена механизмов производства необратимых деформаций означает разное задание источника в дифференциальном уравнении изменения (переноса) этих деформаций, следовательно необратимые деформации не разделяются на пластические и деформации ползучести. С целью наибольшей обозримости соотношений модели принимается гипотеза о независимости термодинамических потенциалов (внутренняя энергия,

[1]Белых Сергей Викторович, проректор по науке и инновационной работе, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, prorector-nir@knastu.ru

[2]Буренин Анатолий Александрович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, mail@imim.ru

[3]Ковтанюк Лариса Валентиновна, заведующая лабораторией механики необратимого деформирования, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, lk@iacp.dvo.ru

[4]Прокудин Александр Николаевич, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, prokudin@imim.ru

свободная энергия) от необратимых деформаций. Следствием принятия гипотезы получен аналог формулы Мурнагана, классическое положение упругопластичности о том, что напряжения в материале полностью задаются уровнем и распределением обратимых деформаций. Основные положения предлагаемой модели иллюстрируются решением в ее рамках краевой задачи о движении упруговязкопластического материала в трубе за счет изменяющегося перепада давления.

Ключевые слова: большие деформации, упругость, вязкоупругость, пластичность, разгрузка.

Библиография: 31 название.

ON ACCOUNT OF VISCOUS PROPERTIES OF MATERIALS IN THE THEORY OF LARGE ELASTOPLASTIC STRAINS

S. V. Belykh, A. A. Burenin,L. V. Kovtanyuk, A. N. Prokudin

Abstract

A geometrically and thermodynamically consistent mathematical model of large strains of materials with elastic, viscous and plastic properties is proposed. It is believed that at the stage of a strain, which precedes the plastic flow and during unloading, the viscous material properties provide the creep process and thus a slow growth of irreversible strains. While rapid growth of irreversible strains under plastic flow conditions, viscous properties act as a mechanism that retards the flow. The accumulation of irreversible strains, therefore, occurs successively: initially, in the creep process, then under plastic flow and, finally, again due to creep of the material (during unloading). On the elastoplastic boundaries advancing along the deformable material, there is a change in the growth mechanism of irreversible strains from creep to plasticity and vice versa. Such a change is possible only under conditions of continuity of irreversible strains and their change rates, which imposes the requirement of consistency in the definitions of irreversible stress distribution rates, i.e., the laws of creep and plasticity. Changing the production mechanisms of irreversible strains means various setting up of the source in the differential equation of the change (transfer) of these strains, hence irreversible strains are not divided into plastic strains and creep strains. To maximize the visibility of the model's correlations, the hypothesis on the independence of thermodynamic potentials (internal energy, free energy) on irreversible strains is accepted. As a consequence of the hypothesis, an analog of the Murnaghan formula is obtained, the classical position of the elastoplasticity is that the stresses in the material are completely determined by the level and distribution of reversible strains. The main provisions of the proposed model are illustrated by the solution in its framework of the boundary value problem of the elastoviscoplastic material motion in a pipe due to a varying pressure drop.

Keywords: large deformations, elasticity, viscoelasticity, plasticity, unloading.

Bibliography: 31 titles.

1. Введение

Существуют технологии интенсивного формоизменения материалов, техническими условиями которых не допускаются высокие скорости процесса. В таких операциях (их называют холодной формовкой) формоизменение достигается за счет преимущественно медленного процесса ползучести [1]. Скорости роста необратимых деформаций ползучести задаются уровнем и распределением напряжений в деформируемом материале. Однако и уровень и распределение напряжений существенным образом зависит от наличия хотя бы малых по объему областей пластического течения, полностью избавиться от которых невозможно, так как они необходимо присутствуют в местах воздействия на материал оснасткой. Следовательно расчетное прогнозирование подобных технологический обязано опираться на математическую модель больших деформаций, одновременно учитывающую и медленный процесс ползучести и более быстрый процесс пластического течения.

Современные пакеты прикладных программ основываются, чаще всего, на предложении Р. Хилла [2] проводить расчеты в скоростях деформирования, принимая аддитивное разложение скоростей деформаций на упругую и пластическую составляющие: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}$ [2]. Такой же подход переносится на случай больших деформаций [3]. При этом скорость пластических деформаций определяется с помощью ассоциированного закона пластического течения, а скорость упругих деформаций – с помощью модели гипоупругости [3], которая предполагает использование какой-либо объективной производной тензора напряжений Коши-Эйлера.

Такая модель оказывается не только неоднозначной вследствие произвола в выборе объективной производной, но и геометрически и термодинамически некорректной [5]. При ее использовании необходимо отслеживать непрерывность перемещений на упругопластических границах, так как иначе можно получить необъяснимые физические эффекты в расчетах. . Однако указанные недостатки практически не сказываются на результатах, когда упругие деформации являются малыми [6]. Теория используется во многих конечно-элементных пакетах и применяется для моделирования процессов обработки металлов давлением [7].

Геометрически безупречной является модель, предложенная Е. Ли [8], в которой разделение полных деформаций на обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие связывается с мультипликативным разделением градиента деформаций: $F = F^{e}F^{p}$. Такое разделение предполагает использование разгруженной конфигурации, где обратимые деформации отсутствуют. Недостижимость такой конфигурации при разгрузке и ее возможная неединственность [10] существенно затрудняют постановку краевых задач основанную на такой модели. Но привлекательность такого подхода из-за его геометрической и термодинамческой корректности привела к попыткам его использования в численных расчетах конечных упругопластических деформаций и упругого отклика [10, 11]. Стоит отметить, что в рамках данной модели больших деформаций практически неизвестны точные решения простых модельных задач.

Также отметим теорию многократного наложения больших деформаций [12], разрабатываемую под руководством В.А. Левина. Программная реализация [13] теории выполнена в рамках CAE для прочностного инженерного анализа Фидесис и, в частности, позволяет решать задачи, в которых при конечных деформациях в процессе нагружения непрерывно или скачкообразно изменяются границы и граничные условия.

Моделирование больших упругопластических деформаций в рамках деформационной теории пластичности, включая методы расчетов можно найти в монографиях [14, 15].

В работе используется математическая модель больших упругопластических деформаций, предложенная в [16] и подробно обоснованная в [17]. Достоинством подхода, принятого в [16, 17], является выполнение положений классической теории упругопластичности, состоящих в том, что тензор необратимых деформаций в условиях деформирования, предваряющего течение, и при разгрузке неизменен, а напряжения полностью задаются уровнем и распределением обратимых деформаций.

Для следования последнего потребовалось принять гипотезу о независимости термодинамических потенциалов (внутренняя энергия, свободная энергия) от необратимых деформаций. Именно эти обстоятельств позволили в рамках модели [16, 17] поставить и получить решения, включая точные, ряда краевых задач теории больших деформаций [18-22]. Обобщение модели на неизотермический случай проведено в [23], первое решение краевой задачи в рамках такой обобщенной модели получено в [24].

2. Кинематика больших деформаций

Движение точки деформируемого тела в прямоугольной системе декартовых координат зададим зависимостями:

$$\begin{aligned} a_i &= a_i(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_i &= x_i - a_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t - время, a_i - координаты точки в отсчетной конфигурации тела, когда деформации и напряжения в нем равны нулю (свободное состояние), x_i - координаты данной точки в актуальном состоянии (переменные Эйлера), u_i - компоненты вектора перемещений.

Для компонент $a_{i,j} = \partial a_i / \partial x_j$ тензора дисторсии и компонент $g_{ij} = a_{k,i} a_{k,j}$ метрического тензора имеем дифференциальные уравнения их изменения (переноса) в форме:

$$
\begin{aligned}
&\frac{da_{i,j}}{dt} + a_{i,k}v_{k,j} = 0;\\
&\frac{dg_{i,j}}{dt} + g_{ik}v_{k,j} + v_{k,j}g_{kj} = 0;\\
&v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Для компонент $d_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij})$ тензора деформаций Альманси согласно (1, 2) следует уравнение переноса вида:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dd_{i,j}}{dt} + d_{ik}v_{k,j} + v_{k,j}g_{kj} = \varepsilon_{ij};\\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Уравнение переноса для тензора деформаций принципиально отлично от уравнений изменения для тензора дисторсии и метрического тенора наличием в нем источника в правой части, каким является тензор скоростей деформаций Эйлера. Если тензор дисторсии и метрический тензор сохраняются, то деформации производятся при движении рассматриваемой точки тела по своей траектории. Деформации не изменяются, когда $\varepsilon_{ij} = 0$. В этом случае тело движется как жесткое целое. Уравнения переноса тензора деформаций и метрического тензора можно переписать в виде:

$$
\frac{\overline{D}d_{ij}}{\overline{D}t} = \varepsilon_{ij}; \frac{\overline{D}g_{ij}}{\overline{D}t} = 0 \tag{4}
$$

где символом $\frac{\overline{D}}{\overline{D}t}$ обозначена объективная производная в смысле Коттера-Ривлина. При $\varepsilon_{ij} = 0$ последняя переходит в объективную производную Яумана:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\hat{D}g_{ij}}{\hat{D}t} = \frac{dg_{ij}}{dt} + g_{ik}\omega_{kj} + \omega_{ki}g_{kj} = 0\\
&\frac{\hat{D}d_{ij}}{\hat{D}t} = \frac{dd_{ij}}{dt} + d_{ik}\omega_{kj} + \omega_{ki}d_{kj} = 0\\
&\omega_{ij} = v_{i,j} - \varepsilon_{ij}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Тензор вращений ω_{ij} задает мгновенную угловую скорость вращения твердого тела, когда деформации в нем не изменяются $\varepsilon_{ij} = 0$. В основании кинематических построений Е. Ли [8] при формулировании книематики упругопластического деформирования стояло предложение о введение наряду с начальной (свободное состояние) и актуальной конфигурациями деформируемого тела еще и конфигурацию разгруженного состояния, такую, чтобы в ней отсутствовали обратимые деформации. Очевидно, что в любом упругопластическом процессе достижение такой конфигурации неосуществимо, так как для этого пришлось бы разбить тело на бесконечно малые объемы и снять любые нагрузки с последних. иначе после снятия внешней нагрузки в теле наряду с необратимыми деформациями всегда будут присутствовать обратимые и, как следствие, напряжения будут отличными от нуля. Данные напряжения называют остаточными. Они могут играть положительную роль, обеспечивая, например, натяг в сборке, но чаще приходится проводить специальные технологические операции (отпуск, отжиг) с целью снизить их уровень. В представлении Е. Ли данное состояние служит самому определению обратимых и необратимых деформаций и позволяет осуществить построение геометрически непротиворечивой кинематики. В наших обозначениях данное предложение следует записать в форме:

$$g_{ij} = g^p_{ik} g^e_{kj} = \frac{\partial a_m}{\partial b_i}\frac{\partial a_m}{\partial b_k}\frac{\partial b_n}{\partial x_k}\frac{\partial b_n}{\partial x_j} \tag{6}$$

В (6) b_i - координаты точки деформируемой среды в состоянии полной разгрузки тела, когда в нем отсутствуют обратимые деформации. Разделение деформаций на свои составляющие предстает зависимостями:

$$g_{ij} = (\delta_{ik} - 2e^p_{ik})(\delta_{kj} - 2e^e_{kj}) \tag{7}$$

Данные соотношения непосредственно следуют из (6), а тензоры с компонентами e^e_{ij} и e^p_{ij} определяются в качестве тензоров обратиимых и необратимых составляющих полных деформаций.

Для компонент тензора дисторсии и метрического тензора g_{ij} введем представление

$$\begin{gathered} a_{i,j} = Y_{i,k}(\delta_{kj} - e_{kj}) \\ g_{ij} = a_{s,i}a_{s,j} = (\delta_{ik} - e_{ik})(\delta_{km} - 2p_{km})(\delta_{mj} - e_{mj}) \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь δ_{ij} - компоненты единичного тензора (символы Кронекера).

Для тензора p_{ij} из (2) непосредственно следует:

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - Y_{m,i}Y_{m,j})$$

Таким образом, введенный в (8) тензор с компонентами p_{ij} является симметричным $p_{ij} = p_{ji}$. Но тензор с компонентами e_{ij}, в общем случае представленный в (8), может и не быть симметричным; первое равенство из (8) не является полярным разложением тензора дисторсии. Исходя из (1) и (8), возможно записать уравнения изменения для введенных в (8) тензоров.

$$\begin{aligned} \frac{de_{ij}}{dt} &= v_{i,j} - b_{ij} - e_{ik}v_{k,j} + b_{ik}e_{kj} \\ \frac{dp_{ij}}{dt} &= \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) - p_{ik}b_{kj} + b_{ki}p_{kj} \\ b_{ij} &= -Y^{-1}_{ik}\frac{dY_{kj}}{dt} \end{aligned} \tag{9}$$

Потребуем теперь, чтобы тензор с компонентами e_{ij} был симметричным. Это возможно только при условии, следующем из (9)

$$b_{km}(\delta_{mj} - e_{mj}) - (\delta_{km} - e_{km})b_{mj} = (\delta_{km} - e_{km})v_{m,j} - v_{m,k}(\delta_{mj} - e_{mj}) \tag{10}$$

Таким образом для симметрии $e_{ij} = e_{ji}$ тензора в (9) требуется выполнение условия (10). Иначе, тензор с компонентами b_{km} не может быть произвольным, а обязан удовлетворять зависимостям (10), и только в этом случае $e_{ij} = e_{ji}$. Тензорное равенство (10) в таком случае следует рассматривать в качестве уравнения для b_{km}. Решением данного уравнения является:

$$b_{ij} = r_{ij} + (\delta_{ik} - e_{ik})t_{kj} \tag{11}$$

В решении (11) t_{kj} – компоненты произвольного, но симметричного тензора: $t_{kj} = t_{jk}$. Тензор с компонентами r_{ij} является кососимметричным $r_{ij} = -r_{ji}$ и для него

$$\begin{gathered} r_{ij} = w_{ij} + A^{-1}[B^2(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + B(\varepsilon_{ik}e_{km}e_{mj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mj}) + e_{ik}\varepsilon_{km}e_{mn}e_{nj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mn}e_{nj} \\ v_{i,j} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + w_{ij} \\ A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3;\ B = 2 - E_1; \\ E_1 = e_{jj}; E_2 = e_{ij}e_{ji}; E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}. \end{gathered} \tag{12}$$

Зависимости (11) и (12) дают возможность переписать уравнения изменения (9) компонент e_{ij} и p_{ij} в форме

$$\begin{gathered} \frac{de_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} - t_{ij} - r_{ij} + w_{ij} - e_{ik}(\varepsilon_{kj} + w_{kj} - t_{kj}) + (r_{ik} + t_{ik})e_{kj} - e_{im}t_{mk}e_{kj} \\ \frac{dp_{ij}}{dt} = t_{ij} - \frac{1}{2}(e_{ik}t_{kj} + t_{ik}e_{kj}) + (r_{ik} - t_{ik})p_{kj} - p_{ik}(r_{kj} + t_{kj}) + p_{ik}e_{km}t_{mj} + t_{im}e_{mk}p_{kj} \end{gathered} \tag{13}$$

Положим первоначально в (11) компоненты произвольного симметричного тензора t_{ij} равными нулю. Тогда уравнения переноса (13) упрощаются

$$\begin{gathered} \frac{de_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} + w_{ik}e_{kj} - e_{ik}w_{kj} - \frac{1}{2}(e_{ik}\varepsilon_{kj} + \varepsilon_{ik}e_{kj}) + \frac{1}{2}(z_{ik}e_{kj} + e_{ik}z_{kj}) \\ \frac{dp_{ij}}{dt} = w_{ik}p_{kj} - p_{ik}w_{kj} + z_{ik}p_{kj} - p_{ik}z_{kj} \\ z_{ij} = r_{ij} - w_{ij} \end{gathered} \tag{14}$$

Если бы среда не деформировалась, то $\varepsilon_{ij} \equiv 0$, а из (12) следовало бы, что $z_{ij} = 0$. Тогда из второго равенства (14) вытекало бы, что производная Яумана от тензора с компонентами p_{ij} равна тождественно нулю и данные компоненты изменяются также, как если среда двигалась бы как жесткое целое. Но присутствие двух последних слагаемых во втором соотношении (14), отличающих его от объективной производной от p_{ij} по времени в смысле Яумана, не меняют существа этого вывода, меняя только саму объективную производную.

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \frac{dp_{ij}}{dt} - r_{ik}p_{kj} + p_{ik}r_{kj} = 0 \tag{15}$$

В отличие от производной Яумана в (15) вместо тензора вращений с компонентами w_{ij} используется другой кососимметричный тензор ($r_{ij} = -r_{ji}$), компоненты r_{ij} которого в своей главной линейной части совпадают с w_{ij}. Согласно (15) изменяются компоненты p_{ij} при неизменном в целом данном тензоре. Это обстоятельство предоставляет возможность отождествить компоненты p_{ij} с необратимыми деформациями, а случай с $t_{ij} \equiv 0$ считать процессом обратимого деформирования. При этом необратимые деформации в среде могут присутствовать, но изменяться в соответствии с (15), то есть так, как если бы среда двигалась как жесткое целое, не изменяя тензор необратимых деформаций. Наличие двух последних слагаемых во втором равенстве из (14) связано с геометрической корректностью в «выборе» объективной производной с тем, чтобы тензор необратимых деформаций с компонентами p_{ij} не менялся в случае обратимого деформирования $t_{ij} \equiv 0$. Заметим, что обратимое деформирование таким образом полностью кинематически определено, поскольку оно продолжается в течение такого промежутка времени, когда неизвестный до сих пор тензор остается нулевым ($t_{ij} \equiv 0$). Тогда же, когда необратимые деформации накапливаются, компоненты произвольного симметричного тензора t_{ij} обязаны быть определены из других условий. Заметим, наконец, что компоненты d_{ij} полных деформаций Альманси, следуя (2), вычисляются через e_{ij}, p_{ij} зависимостями:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj} \tag{16}$$

Согласно (16) при признании p_{ij} необратимыми деформациями, в качестве тензора обратимых деформаций следует считать тензор с компонентами $s_{ij} = e_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj}$

3. Определяющие законы

Рассмотрим первоначальный случай, когда необратимые деформации в среде не накапливаются, то есть в случае обратимого деформирования. Исходим из закона сохранения энергии, который запишем в форме:

$$\rho\frac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{17}$$

здесь ρ - плотность среды, e - плотность распределения внутренней энергии, q_i - компоненты вектора потока тепла, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений.

Рассматривая медленные процессы, в качестве термодинамического потенциала будем использовать свободную энергию, для плотности распределения Ψ которой имеем:

$$\begin{gathered}\Psi(e_{ij},T)=e(e_{ij},s)-sT;\\ \frac{\partial\Psi}{\partial T}=-s;\\ \frac{\partial e}{\partial s}=T.\end{gathered}\tag{18}$$

где T - температура, s - плотность распределения энтропии. В (18) принимается гипотеза о том, что термодинамические потенциалы деформирования задаются лишь консервативным механизмом деформирования, а диссипативный механизм полностью ответственен за производство энтропии. Иными словами полагаем, что Ψ не зависит от необратимых деформаций.

Подстановка (18) в (17) приводит к соотношению:

$$\rho(\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ij}}\frac{de_{ij}}{dt}+T\frac{ds}{dt})+q_{i,j}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=0\tag{19}$$

Исключив из (19) производные деформаций с помощью первого равенства из (14), его можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}(\rho(\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ij}}-\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}e_{kj}+A^{-1}B^2(e_{ik}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{km}}e_{mj}-\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}e_{km}e_{mj})+\\ A^{-1}B(e_{ik}e_{km}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{mn}}e_{nj}-\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}e_{km}e_{mn}e_{nj})+A^{-1}(e_{ik}e_{km}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{mn}}e_{nt}e_{tj}-e_{ik}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{km}}e_{mn}e_{nt}e_{tj}))\sigma_{ij})\varepsilon_{ij}\\ +\rho r_{ij}(e_{ik}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{kj}}-\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}e_{kj})+\rho T\frac{ds}{dt}+q_{i,j}=0\end{gathered}\tag{20}$$

Отсюда в силу независимости процессов, задаваемых e_{ij}, r_{ij} и T, учитывая симметрию тензора напряжений, получаем:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj}-e_{kj})\\ \rho T\frac{ds}{dt}+q_{i,j}=0\end{gathered}\tag{21}$$

Первое соотношение из (21) представляет собой аналог известной в нелинейной теории упругости формулы Мурнагана, второе - уравнение баланса энтропии в условиях обратимого деформирования. В областях, где необратимые деформации отсутствуют ($p_{ij}\equiv 0$), формула Мурнагана принимает классическую форму записи:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj}-2d_{kj})\\ d_{ij}=e_{ij}-\frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}\end{gathered}\tag{22}$$

Таким образом, напряжения через деформации вычисляются либо зависимостью (22) при отсутствии необратимых деформаций, либо первым соотношением из (21), когда необратимые деформации в среде присутствуют. При этом конкретные деформационные свойства среды обязаны определяться заданием конкретной функции $\Psi = \Psi(e_{ij}, T)$ или в случае отсутствия необратимых деформаций, функцией $\Psi = \Psi(d_{ij}, T)$. Данные функции обязаны совпадать при p_{ij}, стремящемся к нулю. Важно подчеркнуть, что формула Мурнагана задает напряжения в среде в зависимости только от обратимых деформаций, и это справедливо также и тогда, когда необратимые деформации изменяются.

Такое положение вполне аналогично классическому случаю упругопластической среды в математических моделях типа Прандтля-Рейса [26, 27]. В нашем случае задание напряжений уровнем и распределением обратимых деформаций является следствием гипотезы о независимости термодинамических потенциалов (свободная энергия, внутренняя энергия) от необратимых деформаций.

Пусть теперь $t_{ij} \neq 0$ в процессе деформирования. В таком случае в среде могут накапливаться необратимые деформации. Теперь вместо первой зависимости (14) в уравнение (19) следует подставить первую же зависимость из (13). Результат такой подстановки запишем в виде:

$$\begin{gathered}(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{ij} - e_{kj}) - \sigma_{ij})\varepsilon_{ij} + \rho T\frac{ds}{dt} + q_{j,i} = \tau_{ij}t_{ij} \\ \tau_{ij} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - 2e_{kj} + e_{km}e_{mj}) = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - s_{kj})\end{gathered} \qquad (23)$$

Как и следовало ожидать, из (23) следует формула Мурнагана (21) и уравнение баланса энтропии с источником. Перепишем последнее уравнение в канонической форме уравнения баланса:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -(T^{-1}q_j + \rho s v_j)_j - T^{-2}q_j T_{,j} + T^{-1}\tau_{ij}t_{ji} \qquad (24)$$

В (24) первое слагаемое правой части представляет собой полный поток энтропии, а два последующих задают производство энтропии за счет необратимых процессов теплопроводности и необратимого деформирования соответственно. Ограничимся далее изотермическим процессом деформирования. Обобщение на неизотермический случай, по-видимому, не встретит дополнительных сложностей, как это было в случае, где приобретение необратимых деформаций связывалось только с идеальным пластическим течением. В изотермическом случае производство энтропии осуществляется только за счет необратимого процесса деформирования, то есть за счет пластического течения, либо за счет вязкого сопротивления деформированию, либо в процессе ползучести, что также связано с учетом вязких свойств среды. Производство энтропии за счет пластичности и вязкости происходит по-разному, но его можно обобщенно представить одним соотношением:

$$D = \sigma_{ij}\gamma_{ij} \tag{25}$$

Действительно, если среда не обладает пластическими свойствами, а только вязкими, или пластические свойства не проявляются в процессах, предваряющих течение, или при разгрузке, то имеем классическое представление для источника энтропии [28]:

$$D = \sigma_{ij}e^{v}_{ij} \tag{26}$$

В случае же идеальной пластичности для производства энтропии (его часто называют диссипативной функцией) также имеем классическое представление [24]:

$$D = \sigma_{ij}e^{p}_{ij} \tag{27}$$

В (26) и (27) e^{v}_{ij} и e^{p}_{ij} соответственно скорости деформации ползучести и пластичности. Следовательно $\gamma_{ij} = \varepsilon^{v}_{ij}$ в областях, где не происходит пластическое течение и $\gamma_{ij} = e^{p}_{ij}$ при пластическом течении. Более сложное представление для γ_{ij} остается для областей течения, когда такое течение невозможно считать идеальным. Вязкие свойства среды могут тормозить течение, что часто моделируется добавлением соответствующих слагаемых в пластический потенциал (поверхность нагружения). Однако представление (25) будет справедливо и в этом случае; для γ_{ij} только следует находить более точное определение. Согласно (24, 25) в самом общем случае изотермического деформирования получаем:

$$\sigma_{ij}\gamma_{ij} = T^{-1}\tau_{ij}t_{ij} \tag{28}$$

Вместе с (21) и (23) последнее соотношение позволяет записать:

$$\begin{gathered} \tau_{ij} = T\sigma_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj}) \\ \gamma_{ij} = t_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj}) \end{gathered} \tag{29}$$

Последняя зависимость (29) связывает до настоящего времени неизвестный симметричный тензор с компонентами t_{ik} с компонентами γ_{ij} тензора скоростей необратимых деформаций p_{ij}. Исключая данный неизвестный тензор при помощи второй зависимости из (29) из уравнений изменения составляющих тензора полных деформаций (13), получим:

$$\begin{gathered} \frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}\left((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj})\right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \\ \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}. \end{gathered} \tag{30}$$

Согласно (30) материал деформируется оратимо только в случае $\gamma_{ij} = 0$. Иначе, при $\gamma_{ij} = 0$ компоненты p_{ij} изменяются также, как и при жестком движении тела. Введение объективной производной специального вида (15) служит выполнению данного требования к геометрической корректности кинематических построений.

До сих пор необратимые деформации не разделялись на деформации пластического течения и деформации ползучести. Такое различие свяжем только с механизмом их роста. Скорости роста деформаций ползучести ε_{ij}^{v} задаются уровнем и распределением напряжений в материале и отличны от нуля, если только напряжения присутствуют. Скорости пластических деформаций ε_{ij}^{p} возникают только при выходе напряженных состояний на поверхность нагружения (при выполнении условий пластического течения). Таким образом область деформирования разделяется на части в зависимости от того удовлетворяют или нет напряжения условию пластичности. При этом в области пластического течения происходит быстрый рост необратимых деформаций, а в области ползучести необратимые деформации растут более медленно. Продвигающиеся упругопластические границы, разделяющие такие области, оказываются местом изменения механизмов накопления необратимых деформаций. Отметим, что конкретизация этих механизмов ползучести или пластического течения, впрочем как и закона упругости, в части формулировки соответствующих законов может быть любой в зависимости от предпочтений конструкторов моделей и нужд технологической практики. Предыдущие фундаментальные зависимости для этого оставляют полную свободу. При этом необходимо следить, чтобы законы ползучести и законы пластического (чаще вязкопластического) течения были бы согласованы между собой так, чтобы необратимые деформации и скорости деформаций были бы непрерывны на упругопластических границах.

считаем, что вязкие свойства деформируемого материала проявляются на стадиях деформирования, предваряющих пластическое течение, и при разгрузке в форме его деформаций ползучести. В условиях пластического течения эти же свойства выступают в качестве сопротивления материала его пластическому течению. В простейшем случае при таких условиях необходимо полагать, что поверхность нагружения в пространстве напряжений имеет уравнение: $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}) = 0$. Тогда в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса имеем ассоциированный закон пластического течения в форме:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^{p} - \varepsilon_{ij}^{v_0} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \lambda(\varepsilon_{ij}^{p}, \varepsilon_{ij}^{v_0}) > 0 \tag{31}$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{v_0}$ - скорость деформаций ползучести в момент прихода в данную точку материала упругопластической границы, то есть в момент начала пластического течения. Такая скорость изменения необратимых деформаций является начальным значением для последующего их роста в условиях пластического течения. Вследствие такого обобщения условия пластичности классическое условие максимальных касательных напряжений, к примеру, приобретает вид:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^{p} - \varepsilon_k^{v_0}| \tag{32}$$

В (32) $\sigma_i, \varepsilon_k^p$ - главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, $\varepsilon_k^{v_0}$ - главные значения тензора $\varepsilon_{ij}^{v_0}$, k - предел текучести, η - коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Когда пластический потенциал кусочно-линейный, как в случае условия пластичности Треска-Сен-Венана (32), то удобно и потенциал ползучести задавать в кусочно-линейной форме [29, 30]:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}; \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|; V = B\Sigma^n \tag{33}$$

Зависимостями (33) задается двухконстантный (B, n) степенной закон ползучести Нортона. Подчеркнем еще раз ,что (32) и (33) являются простейшими и возможных и ограничений для использования иных законов пластичности и ползучести построенная математическая модель не выдвигает. Конкретизация закона упругости также может быть любой, здесь для решения конкретных задач упругий потенциал, принимая условия несжимаемости среды, будем задавать зависимостью [31]:

$$\begin{gathered} W = W(J_1, J_2) = \rho^{-1} = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b-\mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \ldots \\ J_1 = s_{jj}, J_2 = s_{ij}s_{ji}, s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} \\ \sigma_{ij} = -P_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \end{gathered} \tag{34}$$

Здесь P_1 - добавочное гидростатическое давление, μ - модуль сдвига, b, χ - упругие постоянные более высокого порядка.

4. Течение упруговязкопластической среды в цилиндрической трубе

Теперь рассмотрим пример использования введенной математической модели больших деформаций. Пусть сплошная среда занимает цилиндрическую трубу радиуса R. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z. Считаем, что деформирование среды вызвано действием градиента давления:

$$\frac{\partial P_1(\rho,\ z,\ t)}{\partial z} = -\psi(t),\ \psi(0) = 0. \tag{35}$$

Начальные и граничные условия задачи имеют вид:

$$\begin{gathered} e_{ij}|_{t=0} = p_{ij}|_{t=0} = 0 \\ \vec{u}\Big|_{\rho=R} = \vec{v}\Big|_{\rho=R} = 0 \end{gathered} \tag{36}$$

Считаем, что неизвестные вектор перемещений и скорости имеют только одну ненулевую компоненту – вертикальную. С учетом осевой симметрии получим:

$$
\begin{gathered}
u = u_z(\rho,\ t),\ v = v_z(\rho,\ t) \\
d_{\rho\rho} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2;\ d_{\rho z} = d_{z\rho} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \rho} \\
\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \rho};\ w_{z\rho} = -w_{\rho z} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \rho}
\end{gathered}
\tag{37}
$$

В качестве термодинамического потенциала использовалась свободная энергия Гельмгольца. Предполагая, что плотность распределения ψ свободной энергии не зависит от необратимых деформаций, получаем: $W = \rho_0\psi$. Тогда упругий потенциал для изотропной несжимаемой среды в виде разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния запишется в виде:

$$
\begin{gathered}
W = W(I_1, I_2) = (\alpha - \mu) I_1 + \alpha I_2 + \beta I_1^2 - \xi I_1 I_2 - \zeta I_1^3 + \ldots \\
J_1 = s_{jj},\ J_2 = s_{ij}s_{ji},\ s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}
\end{gathered}
\tag{38}
$$

здесь $\mu,\ \alpha,\ \beta,\ \xi, \chi$ – параметры материала.

Далее подставим последнее соотношение в формулы (22) и получим соотношения связывающие обратимые деформации и напряжения:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\rho\rho} = -(P_1 + 2\mu) + 2b(e_{\rho\rho} + e_{zz} + e_{\varphi\varphi}) + 2\mu e_{\rho\rho} + \mu e_{\rho z}^2 + \ldots \\
\sigma_{\varphi\varphi} = -(P_1 + 2\mu) + 2b(e_{\rho\rho} + e_{zz} + e_{\varphi\varphi}) + 2\mu e_{\varphi\varphi} - 2\mu e_{\rho z}^2 + \ldots \\
\sigma_{zz} = -(P_1 + 2\mu) + 2b(e_{\rho\rho} + e_{zz} + e_{\varphi\varphi}) + 2\mu e_{zz} + \mu e_{\rho z}^2 + \ldots \\
\sigma_{\rho z} = 2\mu e_{\rho z} + \ldots
\end{gathered}
\tag{39}
$$

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии и без учета массовых и инерционных сил:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\rho} = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho} = 0
\end{gathered}
\tag{40}
$$

Уравнения переноса для компонент тензоров необратимых и обратимых деформаций:

$$
\begin{gathered}
\gamma_{\rho\rho} = \frac{dp_{\rho\rho}}{dt} + 2\left(p_{\rho\rho}\gamma_{\rho\rho} + p_{\rho z}\left(r_{z\rho} + \gamma_{\rho z}\right)\right) \\
\gamma_{zz} = \frac{dp_{zz}}{dt} + 2\left(p_{zz}\gamma_{zz} + p_{\rho z}\left(r_{\rho z} + \gamma_{\rho z}\right)\right) \\
\gamma_{\rho z} = \frac{dp_{\rho z}}{dt} + r_{z\rho}\left(p_{\rho\rho} - p_{zz}\right) + \left(p_{\rho z}\left(\gamma_{zz} + \gamma_{\rho\rho}\right) + \gamma_{\rho z}\left(p_{zz} + p_{\rho\rho}\right)\right) \\
\gamma_{\varphi\varphi} = \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} + 2p_{\varphi\varphi}\gamma_{\varphi\varphi} \\
-\gamma_{\rho\rho} = \frac{de_{\rho\rho}}{dt} + 2r_{z\rho}e_{\rho z} \\
-\gamma_{zz} = \frac{de_{zz}}{dt} + 2r_{\rho z}e_{\rho z} \\
\varepsilon_{\rho z} - \gamma_{\rho z} = \frac{de_{\rho z}}{dt} + r_{\rho z}\left(e_{\rho\rho} - e_{zz}\right) + \\
+\frac{1}{2}\left(e_{\rho\rho}\left(\gamma_{\rho z} - \varepsilon_{\rho z}\right) + e_{zz}\left(\varepsilon_{\rho z} - \gamma_{\rho z}\right) + e_{\rho z}\left(\gamma_{zz} - \gamma_{\rho\rho}\right)\right) \\
-\gamma_{\varphi\varphi} = \frac{de_{\varphi\varphi}}{dt}
\end{gathered} \tag{41}
$$

Перейдем к определению источника необратимых деформаций. Запишем потенциал ползучести V в соответствии со степенным законом ползучести Нортона:

$$
\begin{gathered}
V\left(\sigma_{ij}\right) = B\Sigma^n\left(\sigma_1,\ \sigma_2, \sigma_3\right) \\
\Sigma = \max\left|\sigma_i - \sigma_j\right|
\end{gathered} \tag{42}
$$

где σ_i – главные значения тензора напряжений, B, n – параметры ползучести материала, определяемые экспериментально.

Величина Σ выражается через координатные напряжения следующим образом:

$$
\Sigma = \sqrt{4\sigma_{\rho z}^2 + \left(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{zz}\right)^2} \tag{43}
$$

Найдем выражения для источника деформаций ползучести:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{\rho z}^c = (-1)^n\, 2^n Bn\mu^{n-1}e_{\rho z}^{n-1}; \\
\varepsilon_{\rho\rho}^c = -\varepsilon_{zz}^c = \frac{\varepsilon_{\rho z}^c}{2}\left(\frac{e_{\rho\rho} - e_{zz}}{e_{\rho z}}\right).
\end{gathered} \tag{44}
$$

Рассмотрим модифицированный пластический потенциал Мизеса с учетом упрочнения и вязкости:

$$
f\left(\tau_{ij},\ p_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right) = \left(\tau_{ij} - cp_{ij} - \eta\varepsilon'^p_{ij}\right)\left(\tau_{ji} - cp_{ji} - \eta\varepsilon'^p_{ij}\right) - \frac{8}{3}k^2 \tag{45}
$$

где $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$, $\varepsilon'^p_{ij} = \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^p\delta_{ij}$, c – параметр материала, характеризующий проявление эффекта Баушингера, η – коэффициент вязкости пластического течения, k – предел текучести материала.

Из ассоциированного закона пластического течения получим:

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{2\lambda\left(\tau_{ij} - cp_{ij}\right)}{1 + 2\lambda\eta} \tag{46}$$

Подставляя последнее соотношение в выражение для пластического потенциала

$$f\left(\tau_{ij},\ p_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}\right)$$

найдем неизвестную функцию λ и получим выражения для скоростей пластических деформаций. Далее выразим скорости пластических деформаций через компоненты обратимых деформаций с помощью соотношений (39) и получим окончательно:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\rho\rho}^{p} = \frac{1}{3\eta}\frac{Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{Q}\left(\mu\left(4e_{\rho\rho} - 2e_{\varphi\varphi} - 2e_{zz} + 3e_{\rho z}^{2}\right) - 3cp_{\rho\rho}\right) \\
\varepsilon_{\varphi\varphi}^{p} = \frac{1}{3\eta}\frac{Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{Q}\left(\mu\left(4e_{\varphi\varphi} - 2e_{\rho\rho} - 2e_{zz} - 6e_{\rho z}^{2}\right) - 3cp_{\varphi\varphi}\right) \\
\varepsilon_{zz}^{p} = \frac{1}{3\eta}\frac{Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{Q}\left(\mu\left(4e_{zz} - 2e_{\rho\rho} - 2e_{\varphi\varphi} + 3e_{\rho z}^{2}\right) - 3cp_{zz}\right) \\
\varepsilon_{rz}^{p} = \frac{1}{\eta}\frac{Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{Q}\left(2\mu e_{rz} - cp_{\rho z}\right)
\end{gathered} \tag{47}$$

Величина Q при этом:

$$\begin{gathered}
Q = \sqrt{\frac{1}{3}\left(3c^{2}B_{1} + 2c\mu B_{2} + 2\mu^{2}B_{3}\right)} \\
B_{1} = p_{\rho\rho}^{2} + p_{\varphi\varphi}^{2} + p_{zz}^{2} + 2p_{\rho z}^{2} \\
B_{2} = 3e_{\rho z}^{2}\left(-p_{\rho\rho} + 2p_{\varphi\varphi} - p_{zz}\right) + 2e_{rr}\left(-2p_{\rho\rho} + p_{\varphi\varphi} + p_{zz}\right) + \\
+2e_{\varphi\varphi}\left(p_{\rho\rho} - 2p_{\varphi\varphi} + p_{zz}\right) + 2e_{zz}\left(p_{\rho\rho} + p_{\varphi\varphi} - 2p_{zz}\right) - 12e_{\rho z}^{2}p_{\rho z} \\
B_{3} = 12e_{\rho z}^{2} + 6e_{\rho z}^{2}\left(e_{rr} - 2e_{\varphi\varphi} + e_{zz}\right) + 4e_{\rho\rho}^{2} + \\
+4e_{\varphi\varphi}^{2} + 4e_{zz}^{2} - 4e_{rr}e_{zz} - 4e_{rr}e_{\varphi\varphi} - 4e_{rr}e_{zz} + 9e_{\rho z}^{4}
\end{gathered} \tag{48}$$

Для второго уравнения равновесия (40) с учетом (35) можно найти общее решение

$$\sigma_{\rho z}\left(\rho,\ t\right) = -\frac{\psi\left(t\right)}{2}\rho \tag{49}$$

Использовались следующие безразмерные переменные:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{R},\ \hat{z} = \frac{z}{R}, \hat{u} = \frac{u}{R}, \tau = \frac{t}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\rho_{0}}},\ \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu},\ \hat{b} = \frac{b}{\mu}, \hat{k} = \frac{k}{\mu},\ \hat{c} = \frac{c}{\mu} \tag{50}$$

где ρ_0 – плотность среды.

Рис. 1: Необратимые деформации p_{rz}

Рис. 2: Перемещения u

Рис. 3: Необратимые деформации p_{rr}

Рис. 4: Необратимые деформации p_{zz}

Рис. 5: Результаты расчетов для моментов времени τ_1, τ_2, τ_3

Параметры материала и процесса:

$$n = 3,\ \frac{BnR\mu^{n-1}\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\mu}} = 3.5, \hat{\eta} = \frac{2\sqrt{\mu}R\sqrt{\rho_0}}{\eta} = 1.0,\ \hat{b} = 4, \hat{k} = 0.00125, \hat{c} = 0.05;$$
$$\tau_1 = 16, \tau_2 = 32, \tau_3 = 48, \psi_{max} = 5 \cdot 10^{-3} \tag{51}$$

В качестве градиента давления использовалась следующая кусочно-заданную функцию:

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\psi_{max}}{2} \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{t_1}\tau - \frac{\pi}{2}\right)\right),\ 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ \psi_{max},\ \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \\ \dfrac{\psi_{max}}{2} \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{(t_3 - t_2)}(\tau - \tau_2) + \frac{\pi}{2}\right)\right),\ \tau_2 < \tau \leq \tau_3 \end{cases} \tag{52}$$

Полученная система дифференциальных уравнений (41) и первое уравнение равновесия (40) в безразмерных переменных (50) решалась численно с учетом начальных и граничных условий (36). Для аппроксимации пространственных производных используется центральная разностная схема, а производных по времени – явная схема. Граница, отделяющая область вязкоупругого деформирования от области пластического течения определялась в ходе численных расчетов с помощью следующего условия:

$$Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k = 0 \tag{53}$$

Графики необратимых деформаций $p_{\rho z}, p_{\rho\rho}, p_{zz}$ и перемещений u для моментов времени τ_1, τ_2, τ_3 изображены на рис. 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейников, А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей /А. И. Олейников, А. И. Пекарш – М. : Эком, 2009. – 109 с.

2. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 6, Issue 3, 1958, Pages 236-249
3. Truesdell C. Hypo-elasticity. J. Rat. Mech. Anal. Volume 4, 1955, Pages 83–133
4. Simo J.C., Pister K.S. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 46, Issue 2, 1984, Pages 201-215
5. Khan, A.S., Huang, S.J. Continuum Theory of Plasticity. Wiley, New York. 1995.
6. Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A. Elastoplasticity beyond small deformations. Acta Mech. 2006. 182, 31–111.
7. Firat, M., Kaftanoglu, B., Eser, O. Sheet metal forming analyses with an emphasis on the springback deformation. J. Mater. Process. Technol. 2008. 196 (1–3), 135–148.
8. Lee EH. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. ASME. J. Appl. Mech. 1969;36(1):1-6
9. Naghdi P.M. A critical review of the state of finite plasticity. ZAMP. 1990. 41, 315-394.
10. Vladimirov, I.N., Pietryga, M.P., Reese, S. Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming. Int. J. Plasticity. 2010. 26 (5), 659–687.
11. Sansour, C., Karšaj, I., Soric, J. On a numerical implementation of a formulation of anisotropic continuum elastoplasticity at finite strains. J. Comput. Phys. 2008. 227 (16), 7643–7663.
12. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и взякоупругих телах. – М.: Наука, Физматлит, 1999. – 223 с.
13. Левин В.А. Теория многократного наложения больших деформаций и ее промышленная реализация в полнофункциональной CAE для прочностного инженерного анализа // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – №2-2 – С. 156–178
14. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. – М.: Физматлит, 2013. – 319 с.
15. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

16. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 1996. – Т. 347. – №. 2. – С. 199–201

17. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последействие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк – Владивосток. : Дальнаука, 2013. – 312 с.

18. Буренин, А. А. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // ПММ. – 2003. – Т. 64. – Вып. 2 – С. 316–325

19. Буренин, А. А. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки А. А. Буренин, А. С. Устинова // Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В.А. Левина. Владивосток: Дальнаука – 2009. – С. 91–102

20. Ковтанюк, Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 2005. – Т. 400. – №. 6. – С. 764–767

21. Ковтанюк, Л. В. Вязкопластическое течение и остаточные напряжения в тяжелом слое несжимаемого материала, находящегося на наклонной плоскости / Л. В. Ковтанюк // Сб. математические модели и методы механики сплошных сред. к 60-летию А.А. Буренина. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН – 2007. – С. 120–128

22. Буренин, А. А. Развитие и торможение прямолинейного осесимметричного вязкопластического течения и упругое последействие после его остановки / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис // ПМТФ. – 2010. – №2 – С. 140–147

23. Ковтанюк, Л. В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае / Л. В. Ковтанюк // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5. – №. 1. – С. 104–117

24. Буренин, А. А. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // ДАН. – 2015. – Т. 464. – №. 3. – С. 284-287

25. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев – Владивосток.: Дальнаука, 1998. – 528 с.

26. Галин, Л. А. Упругопластические задачи / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1984. – 232 с.

27. Де Грост, С. Неравновесная термодинамика / С. де Грост, П. Мазур — М.: Мир, 1964. — 456 с.

28. Быковцев, Г. И. Об особенностях модели неустановившейся ползучести, основанной на использовании кусочно-линейных потенциалов / Г. И. Быковцев, В. М. Ярушина // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций. К 60-летию Г.И. Быковцева. Владивосток: Дальнаука – 1998. – С. 9-26

29. Буренин, А. А. Плоское напряженное состояние в условиях нелинейной неустановившейся ползучести / А. А. Буренин, В. М. Ярушина // Дальневосточный математический журнал. – 2002. – Т. 3. – №. 1. – С. 64–78

30. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

REFERENCES

1. Olejnikov, AI & Pekarsh, AI 2009, *Integrirovannoe proektirovanie processov izgotovleniya monolitnyh panelej [Integrated design of monolithic panel manufacturing processes]*, Ekom, Moscow.

2. Hill, R. 1958, "A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 6, no. 3, pp. 236–249, doi: 10.1016/0022-5096(58)90029-2

3. Truesdell, C. 1955, "Hypo-elasticity", Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 4, pp. 83–133.

4. Simo, J. C., & Pister, K. S. 1984, "Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 46, no. 22, pp. 201–215, doi: 10.1016/0045-7825(84)90062-8

5. Khan, AS & Huang, S 1995 Continuum Theory of Plasticity, Wiley, New York.

6. Xiao, H., Bruhns, O. T., & Meyers, A. 2006, "Elastoplasticity beyond small deformations", Acta Mechanica, vol. 182, no. 1–2, pp. 31–111, doi: 10.1007/s00707-005-0282-7

7. Firat, M., Kaftanoglu, B., & Eser, O. 2008, "Sheet metal forming analyses with an emphasis on the springback deformation", Journal of Materials Processing Technology, vol. 196, no. 1–3, pp. 135–148, doi: 10.1016/j.jmatprotec.2007.05.029

8. Lee, E. H. 1969, "Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains", Journal of Applied Mechanics, vol. 36, no. 1, pp. 1–6. doi: 10.1115/1.3564580

9. Naghdi, P. M. 1990, "A critical review of the state of finite plasticity", Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP, vol. 41, no. 3, pp. 315–394, doi: 10.1007/BF00959986

10. Vladimirov, I. N., Pietryga, M. P., & Reese, S. 2010, "Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming", International Journal of Plasticity, vol. 26, no. 5, pp. 659–687. doi: 10.1016/j.ijplas.2009.09.008

11. Sansour, C., Karšaj, I., & Sorić, J. 2008, "On a numerical implementation of a formulation of anisotropic continuum elastoplasticity at finite strains", Journal of Computational Physics, vol. 227, no. 16, pp. 7643–7663, doi: 10.1016/j.jcp.2008.04.025

12. Levin VI 1999, Mnogokratnoe nalozhenie bolshih deformacij v uprugih i vyazkouprugih telah [Multiple superposition of large deformations in elastic and viscoelastic bodies], Nauka:Fizmatlit, Moscow.

13. Levin V.I. 2013 "The theory of multiple superposition of large deformations and its industrial implementation in a full-featured CAE for strength engineering analysis", Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Yestestvennyye nauki. , no. 2-2, pp. 156-178

14. Markin, AA & Sokolova, Myu 2013, Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniya [Thermomechanics of elastoplastic deformation], Fizmatlit, Moscow.

15. Pozdeyev, A.A, Trusov, PV & Nyashin, YuI 1986 Bol'shiye uprugo-plasticheskiye deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large elastic-plastic deformations: theory, algorithms, applications], Nauka, Moscow.

16. Burenin, A.A., Bykovtsev, G.I. & Kovtanyuk, L.V. 1996, "One simple model for elastoplastic medium at finite deformations", Doklady akademii nauk, vol. 347, no. 2, pp. 199-201

17. Burenin, AA & Kovtanyuk, LV 2013, Bol'shiye neobratimyye deformatsii i uprugoye posledeystviye [Large irreversible deformations and elastic aftereffects], Dal'nauka, Vladivostok.

18. Burenin, A.A., Kovtanyuk, L.V., Polonik, M.V. 2003, "Forming a one-dimensional residual stress field in the vicinity of a cylindrical defect of continuity of an elastoplastic medium", Prikladnaya matematika i mekhanika, vol. 64, no. 2, pp. 316-325.

19. Burenin, A.A. & Ustinova A.S. "Development and inhibition of viscoelastic viscous flow with the calculation of elastic response after stopping flow and unloading", "Progress in Continuum Mechanics" to the 70th anniversary of VA. Levin. Vladivostok, 2009, pp. 91-102.

20. Kovtanyuk, L.V. 2005, “On extrusion of elastoviscoplastic material through a rigid cylindrical matrix”, Doklady akademii nauk, vol. 400, no. 6, pp. 764-767.

21. Kovtanyuk, L.V. “Viscoplastic flow and residual stresses in a heavy layer of incompressible material located on an inclined plane”, “Mathematical models and methods of continuum mechanics” to the 60th anniversary of AA. Burenin. Vladivostok, 2007, pp. 120-128.

22. Burenin, A.A., Kovtanyuk, L.V. & Mazelis A.L. 2010, “Development and inhibition of a rectilinear axisymmetric viscoplastic flow and elastic aftereffect after its stoppage”, Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, vol. 51, no. 2, pp. 140-147.

23. Kovtanyuk, L.V. 2004, “Modeling of large elastoplastic deformations in the non-isothermal case”, Dal’nevostochnyy matematicheskiy zhurnal, vol. 5, no. 1, pp. 104-117.

24. Burenin, A.A., Kovtanyuk, L.V. & Panchenko G.L. 2015 “Nonisothermal motion of an elastoviscoplastic medium through a pipe under a changing pressure drop”, Doklady akademii nauk, vol. 464, no. 3, pp. 284-287.

25. Bykovtsev, GI & Ivlev, DD 1998, Teoriya plastichnosti [Theory of plasticity], Dal’nauka, Vladivostok.

26. Galin, LA 1984, Uprugoplasticheskiye zadachi [Elastic-plastic problems], Nauka, Moscow.

27. De Groot, SR & Mazur, P 1969, Non-Equilibrium Thermodynamics, North-Holland.

28. Bykovtsev, GI & Yarushina, VM “On the features of the unsteady creep model based on the use of piecewise linear potentials”, “Problems of mechanics of continuous media and structural elements” to the 60th anniversary of G.I. Bykovtsev, Dal’nauka, Vladivostok, 1998, pp. 9-26

29. Burenin, A.A. & Yarushina, V.M. 2002, “Plane stress state under nonlinear unsteady creep”, Dal’nevostochnyy matematicheskiy zhurnal, vol. 3, no. 1, pp. 64-78

30. Lurie, A.I. 1980, Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity], Nauka, Moscow.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017