

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511.3

О КОНФЕРЕНЦИИ ПАМЯТИ АНАТОЛИЯ АЛЕКСЕЕВИЧА КАРАЦУБЫ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И ПРИЛОЖЕНИЯМ

Е. А. Карацуба, М. А. Королёв, И. С. Резвякова, В. Н. Чубариков
(г. Москва)

Аннотация

В январе 2014 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН состоялась первая однодневная международная “Конференция памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям”. Целями этой конференции были представление новых и значимых результатов в различных направлениях теории чисел (особенно в тех, что связаны с творчеством А.А. Карацубы), обмен новыми теоретико-числовыми идеями и ознакомление с новыми методами и тенденциями в теории чисел.

Вторая международная Конференция была проведена Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН совместно с Московским Государственным университетом имени М. В. Ломоносова с 30 по 31 января 2015 г. Настоящая статья содержит развёрнутые аннотации докладов, прочитанных на второй Конференции.

Ключевые слова: функциональное уравнение Wilton’a, целочисленные многочлены с заданными дискриминантами, суммы с простыми числами, простые числа специального вида, примитивные целые точки, нули рядов Дирихле, гиперболическая дзета-функция решёток, асимптотическое распределение алгебраических чисел, парная корреляция нулей $\zeta(s)$, дискретная универсальность L -функций Дирихле, совместная универсальность L -функций, диофантовы спектры, постоянная Каталана, проблема круга, короткие суммы Вейля, тернарная проблема Эстермана, распределение целочисленных случайных величин, полиадические числа, показатели сходимости многомерных аддитивных проблем, суммы произведений множеств, тригонометрические суммы.

Библиография: 13 названий.

ON THE CONFERENCE TO THE MEMORY OF ANATOLY ALEXEEVITCH KARATSUBA ON NUMBER THEORY AND APPLICATIONS

V. N. Chubarikov, E. A. Karatsuba, M. A. Korolev, I. S. Rezvyakova
(Moscow)

Abstract

In January, 2014, the 1st one-day international “Conference to the Memory of A.A. Karatsuba on Number Theory and Applications” took place in Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of sciences. The aims of this conference were presentation of new and important results in different branches of number theory (especially in branches connected with works of A. A. Karatsuba), the exchange by new number-theoretical ideas and insight with new methods and tendencies in number theory. The 2nd Conference was organized by Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of sciences together with Moscow State university in January, 2015. The present paper contains wide annotations of reports of 2nd Conference.

Keywords: Wilton’s functional equation, integer polynomials with given discriminants, sums with prime numbers, primes of special type, primitive integer points, the zeros of Dirichlet series, hyperbolic zeta function of lattices, the asymptotic distribution of algebraic numbers, pair correlation of zeros of $\zeta(s)$, discrete and joint universality of Dirichlet’s L-functions, Diophantine spectra Catalan’s constant, the problem of range, short Weyl sums, ternary problem of Estermann, the distribution of integer random variables, the exponents of convergence of multidimensional additive problems, a sum of products of sets, trigonometric sums.

Bibliography: 13 titles.

“... Оставил школу и последователей. Что это за школа, что он дал своим последователям? Он завещал им искренность, самобытность, он завещал каждому быть самим собой, он дал всякой оригинальности смелость... Для последователей путь его труден: не всякая оригинальность настолько интересна, чтоб ей показываться и ею занимать... Теперь нам остается только желать, чтобы Россия производила поболее талантов, пожелать русскому уму поболее развития и простора...”

А. Н. Островский. Застольное слово о Пушкине. 1880 г.

1. Введение

Целью проведения “Конференции памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям” является представление важных и новых результатов по разным направлениям теории чисел: аналитической теории чисел, теории диофантовых приближений, вычислительных аспектов теории чисел и др., а также по приложениям теоретико-числовых методов в других областях математики и иных науках. Ещё одной задачей Конференции является обмен идеями и ознакомление с новыми тенденциями в развитии теории чисел, особенно в тех её областях, которые связаны с исследованиями и открытиями А. А. Карацубы.

2. Первая конференция

Впервые эта конференция была проведена 31 января 2014 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН в Москве.

Организационный комитет включал Е. А. Карацубу (ВЦ РАН), М. А. Королёва (МИАН) и И. С. Резвякову (МИАН).

На конференции было сделано 13 докладов, перечень которых приводится ниже¹.

М. БАЛАЗАР (*Математический институт Люмини, г. Марсель, Франция*)

“Критерии Нуман’а и Baez-Duarte для гипотезы Римана: краткий исторический обзор”;

В. И. БЕРНИК (*Институт математики НАН Белоруссии, г. Минск, Беларусь*)

“При каком значении высоты распределение алгебраических чисел является регулярным?”;

Д. В. ГОРЯШИН (*МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

“Аддитивные задачи со специальными слагаемыми”;

С. А. ГРИЦЕНКО (*МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

“О некоторых диофантовых неравенствах с простыми числами”;

А. ЛАУРИНЧИКАС (*Вильнюсский университет, г. Вильнюс, Литва*)

“Дискретная универсальность дзета-функции Римана и дзета-функции Гурвица”;

Ю. В. НЕСТЕРЕНКО (*МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

¹С аннотациями и видеозаписями выступлений докладчиков можно ознакомиться на официальной странице Конференции: <http://www.mathnet.ru/conf511>.

“О рациональных приближениях постоянной Каталана”;

Д. А. ПОПОВ (*Научно-исследовательский институт физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

“О формуле Вейля для оператора Лапласа на компактных поверхностях”;

З. Х. РАХМОНОВ (*Институт математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, г. Душанбе, Таджикистан*)

“Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел”;

П. З. РАХМОНОВ (*МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

“Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа”;

И. С. РЕЗВЯКОВА (*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия*)

“Об одном доказательстве плотностной теоремы Сельберга”;

Г. В. ФЁДОРОВ, (*МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

“О распределении значений функции делителей”;

В. Н. ЧУБАРИКОВ (*МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

“Многомерные аддитивные задачи”;

И. Д. ШКРЕДОВ (*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия*)

“О тригонометрической сумме Хейльбронна”.

3. Вторая конференция

Вторая конференция памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям проходила 30 и 31 января 2015 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (30 января) и на механико-математическом факультете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (31 января) в Москве.

В Организационный комитет вошли Е. А. Карацуба (ВЦ РАН), М. А. Королёв (МИАН), И. С. Резвякова (МИАН) и В. Н. Чубариков (МГУ).

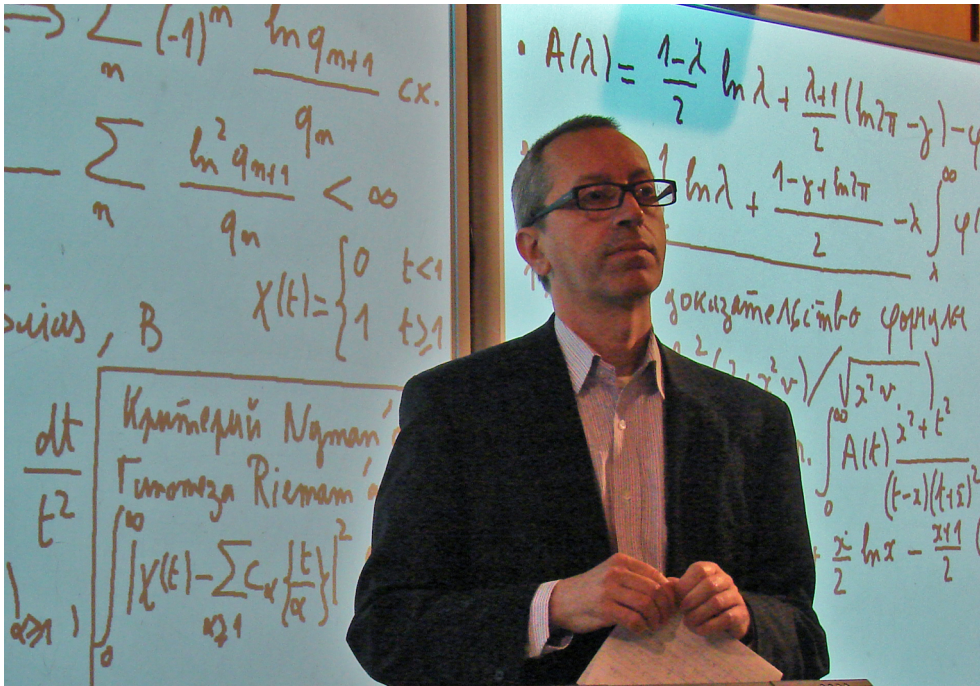
В течение двух дней на конференции было сделано 20 докладов, развёрнутые аннотации которых приводятся ниже².

$\Longleftrightarrow$

М. БАЛАЗАР (*Institut de Mathématiques de Marseille, г. Марсель, Франция*)

²С аннотациями и видеозаписями выступлений докладчиков можно ознакомиться на официальной странице Конференции: <http://www.mathnet.ru/conf594>.

Об одном приближённом функциональном уравнении Wilton'a (по совместной работе с В. Martin)



Мишель Балазар

Определим функцию $\psi(x; v)$ равенством

$$\psi(x; v) = \sum_{n \leq v} \frac{\tau(n)}{n} \exp(2\pi i n x),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n . В 1933 г. Дж. Р. Вильтон вывел следующее приближённое функциональное уравнение

$$\psi(x; v) - x \bar{\psi}(x^{-1}; x^2 v) = F(x) + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{x} + \left(\gamma - \ln 2\pi + \frac{\pi i}{2} \right) \ln \frac{1}{x} + O_K((x^2 v)^{-0.2}),$$

которое справедливо при $0 < x \leq 1$, $v \geq 1$, $x^2 v \geq K$. Слагаемое $F(x)$ в правой части равенства представляет собой некоторую функцию, непрерывную на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Пользуясь этим соотношением, Вильтон нашёл необходимые и достаточные условия сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi n x), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n} \cos(2\pi n x),$$

которые формулируются в терминах свойств последовательности $\{q_n\}$ знаменателей подходящих дробей числа x .

Положим

$$A(\lambda) = \int_0^{+\infty} \{t\}\{\lambda t\} \frac{dt}{t^2}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi nx).$$

В 2005 г. Л. Баэз-Дуарте (L. Báez-Duarte), Б. Лондри (B. Landreau), Э. Сайас (E. Saias) и докладчик в совместной работе получили следующие равенства, связывающие функции $A(\lambda)$ и $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{2}(1-\lambda) \ln \lambda + \frac{1}{2}(1+\lambda)(\ln 2\pi - \gamma) - \varphi(\lambda) - \lambda\varphi(\lambda^{-1}), \\ A(\lambda) &= \frac{1}{2} \ln \lambda + \frac{1}{2}(1-\gamma + \ln 2\pi) - \lambda \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(t) \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

Автор доклада совместно с Б. Мартин (B. Martin) предприняли новое исследование свойств функции $A(\lambda)$ и на этом пути смогли

1) получить новое, более простое доказательство приближённого уравнения Вильтона для $\psi(x; v)$, не использующее (в отличие от оригинальной работы Вильтона) формулы Г. Ф. Вороного. При этом остаточный член в уравнении удалось оценить величиной порядка $(x^2 v)^{-0.5} \ln^2(2 + x^2 v)$;

2) получить явные выражения функции $F(x)$:

$$\begin{aligned} \Re F(x) &= 2x \cdot \text{v.p.} \int_0^{\infty} A(t) \frac{x^2 + t^2}{(t-x)(t+x)^2} \frac{dt}{t} - \\ &\quad - x \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{x} + (\ln 2\pi - \gamma) \ln \frac{1}{x} - c_0 \right) - c_0 \\ \Im F(x) &= \pi \left(A(x) + \frac{x}{2} \ln x - \frac{1}{2} (\ln 2\pi - \gamma)(x+1) \right), \end{aligned}$$

где

$$c_0 = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2} \ln^2 2\pi + \frac{1}{2} \gamma^2 + \gamma \ln 2\pi + 2\gamma_1,$$

γ_1 — постоянная Стильтьеса (T.J. Stieltjes) порядка 1:

$$\gamma_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} \ln^2 n \right).$$

$$\Longleftrightarrow$$

В. И. БЕРНИК (*Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь*)

Точные оценки количества целочисленных многочленов с заданными дискриминантами (по совместной работе с Н. В. Бударинной и Ф. Гётце)³

³Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: Н. В. Бударина, В. И. Берник, Х. О'Доннелл *Как зависят дискриминанты целочисленных многочленов от взаимного расположения корней?* (стр. 153 — 162).



Василий Иванович Берник

Для многочлена произвольной степени $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ высоты $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ с корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ дискриминант $D(P)$ определяется так:

$$D = D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Существует и другая форма записи D в виде определителя порядка $2n-1$. Для натурального $Q > 1$ и $v \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq n-1$ определим класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = n, H(P) \leq Q, 0 < |D| < Q^{2n-2-2v}\}.$$

Оценки количества многочленов $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ важны во многих задачах теории диофантовых приближений.

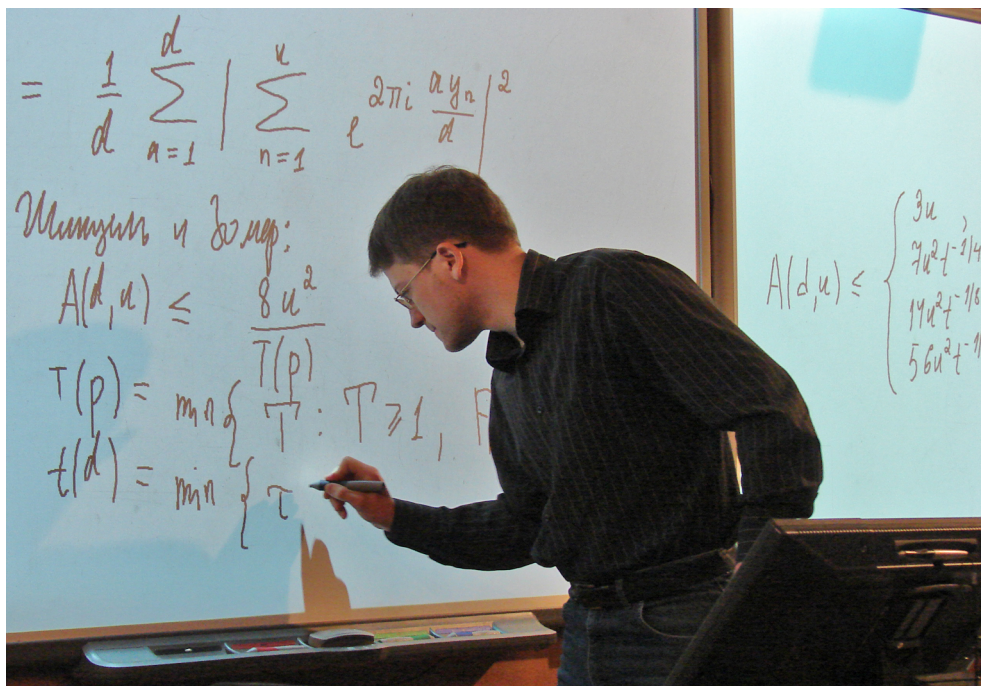
В докладе были приведены известные и недавно полученные оценки сверху и снизу для $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$, основанные на метрической теории диофантовых приближений зависимых величин, и, в частности, оценка

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) \gg Q^{n+1-\frac{n+2}{n}v}.$$

$\Longleftrightarrow$

А. Н. ВАСИЛЬЕВ (Казахстанский филиал МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Астана, Казахстан)

О суммах, составленных из простых чисел и членов линейных рекуррент специального вида



Антон Николаевич Васильев

Согласно классической теореме Н. П. Романова (1934), множество натуральных чисел n , представимых суммой $p + a^m$, где p — простое, $a \geq 2$ — фиксированное целое число, имеет положительную плотность.

Последовательность вида $\{a^m\}$ является линейной рекуррентной последовательностью первого порядка. Примером линейной рекуррентной последовательности второго порядка служит последовательность $\{F_m\}$ чисел Фибоначчи.

В. Н. Чубариков поставил следующую задачу: доказать аналог теоремы Романова для множества чисел $n = p + F_m$. Эта задача была решена докладчиком и независимо К. Ли (K. S. Enoch Lee). Для её решения докладчиком был применён следующий подход, восходящий к П. Эрдешу (P. Erdős) и основанный на изучении величины $A(d, u)$.

Именно, пусть d — бесквадратное число. По определению, малый d -период последовательности Фибоначчи $t = t(d)$ определяется как наименьший из номеров m таких, что F_m делится на d . Далее, большой d -период $T = T(d)$ определяется как наименьшее среди целых чисел $\tau \geq 1$ со следующим свойством: $F_{m+\tau} \equiv F_m \pmod{d}$ для любого номера m .

Величина $A(d, u)$ определяется как сумма $a_1^2 + \dots + a_u^2$, где a_j — число членов последовательности F_m , $m = 1, 2, \dots, u$, таких, что $F_m \equiv j \pmod{d}$. Для $A(d, u)$ докладчиком были получены следующие оценки:

$$A(d, u) \leq \begin{cases} 3u - 2, & \text{если } u < \sqrt{t} + 1, \\ 7u^2 t^{-1/4}, & \text{если } \sqrt{t} + 1 \leq u < t^{3/4}, \\ 14u^2 t^{-1/8}, & \text{если } t^{3/4} \leq u \leq T, \\ 56u^2 t^{-1/8}, & \text{если } u > T. \end{cases}$$

В заключительной части выступления были сформулированы следующие задачи:

1) доказать аналог теоремы Романова для множества чисел $n = p + c_m$, где $c_m = \binom{2m}{m}$ — центральный биномиальный коэффициент. Последовательность чисел c_m имеет ту же плотность, что и последовательность 2^m , однако её члены не удовлетворяют никакому линейному рекуррентному соотношению фиксированного порядка.

2) доказать аналог теоремы Ю. В. Линника о представимости любого чётного числа суммой двух простых и конечного числа степеней двойки, а именно, доказать разрешимость при любом достаточно большом n (удовлетворяющем некоторым естественным арифметическим условиям) уравнения

$$n = p_1 + p_2 + y_{m_1} + \dots + y_{m_k},$$

где $\{y_m\}$ — линейная рекуррентная последовательность порядка ≥ 2 , а k — некоторое фиксированное число.

$\Longleftrightarrow$

Д. В. ГОРЯШИН (*МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

Распределение простых чисел специального вида по арифметическим прогрессиям

Доклад посвящён следующему результату автора, который обнаруживает некоторую нерегулярность в распределении простых чисел специального вида по арифметическим прогрессиям.

Пусть $1 \leq a < k$, $(a, k) = 1$. Тогда для любого фиксированного $A > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{p \leq x, p \equiv a \pmod{k} \\ p-1 \text{ — бесквадратное}}} 1 = c(a, k) \sum_{\substack{p \leq x, \\ p-1 \text{ — бесквадратное}}} 1 + O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right),$$

где

$$c(a, k) = \frac{\sum_{l|(k, a-1)} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, k)=1}}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(kn^2/l)}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n\varphi(n)}},$$

а постоянная в знаке O зависит лишь от a и k .



Дмитрий Викторович Горяшин

Величина $s(a, k)$ зависит не только от k , но и от числа a . Скажем, при $(a - 1, k) = 1$ она совпадает с

$$\frac{1}{k} \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\varphi(k)} \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)^{-1}$$

и, следовательно, отлична от $1/\varphi(k)$.



О. А. ГОРКУША (*Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, г. Хабаровск, Россия*)

Совместное распределение примитивных целых точек в замкнутой области⁴

Пусть t_0 — фиксированное число с условием $0 < t_0 < \pi/4$, $r(t)$ — функция, положительная на отрезке $[0, t_0]$. Обозначим через Ω область на плоскости Oxy , заданную в полярных координатах r, t неравенствами вида $0 \leq r \leq r(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, а через Ω_R — область, которая получается из Ω растяжением в R раз относительно начала координат.

⁴Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: О. А. Горкуша *Совместное распределение примитивных целых точек в замкнутой области* (стр. 163 — 175).



Ольга Александровна Горкуша

Пусть $F(\Omega, R)$ — множество примитивных точек области Ω_R , то есть целочисленных точек $A_j = (x_j, y_j)$ со взаимно простыми координатами, упорядоченных в порядке возрастания отвечающих им углов $\theta_j = \arctg(x_j/y_j)$ (соседние отрезки OA_j, OA_{j+1} оказываются, таким образом, сторонами фундаментальных параллелограммов целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$).

В 2000 г. Ф.П. Бока (F.P. Boca), К. Кобели (C. Kobeli) и А. Захареску (A. Zaharescu) ([12]) нашли предельное распределение углов между соседними лучами OA_j, OA_{j+1} , то есть предельное распределение величин $N(\theta_{j+1} - \theta_j)$, $j = 1, 2, \dots, N - 1$, где $N = \#F(\Omega, R)$.

В 2009 г. А. В. Устинов ([9]) обнаружил, что задача о распределении углов $\theta_{j+1} - \theta_j$ легко решается, если известно совместное распределение длин нормированных сторон фундаментальных параллелограммов, то есть величин $\delta_k = d_k(\cos \theta_k)/(Rr(\theta_k))$, $k = j, j + 1$, где $d_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$. В связи с этим им было исследовано множество

$$\Phi(\alpha, \beta; R, t_0) = \{(A_j, A_{j+1}) \in F^2(\Omega_R) : \delta_j \leq \alpha, \delta_{j+1} \leq \beta, \theta_{j+1} \leq t_0\}$$

и для случая треугольной области ($r(t) = 1/\cos t$) доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. При любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ справедливо равенство:

$$\frac{\#\Phi(\alpha, \beta; R, t_0)}{\#F(\Omega, R)} = I(\alpha, \beta) + O(R^{-1/2}(\ln R)^3),$$

где

$$I(\alpha, \beta) = 2 \int_0^\alpha \int_0^\beta [\xi + \eta \geq 1] d\xi d\eta,$$

$[X] = 1$, если утверждение X истинно, и $[X] = 0$ в противном случае.

Автором доклада получено следующее обобщение теоремы А. В. Устинова.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r(t) \in C^3[0, t_0]$, и пусть при $0 \leq t \leq t_0$ выполнены следующие условия: 1) $x(t) = r(t) \cos t$ убывает, $y(t) = r(t) \sin t$ — возрастает; 2) производные $x'(t), y'(t)$ конечны; 3) $\psi^2(t) + (\psi'(t))^2 \neq 0$, где $\psi(t) = x''(t) - 2x'(t) \operatorname{tg} t$. Тогда

$$\frac{\#\Phi(\alpha, \beta; R, t_0)}{\#F(\Omega, R)} = I(\alpha, \beta) + O(R^{-1/3}(\ln R)^{2/3}),$$

причём в случае, когда $\psi(t)$ не имеет нулей на отрезке $[0, t_0]$, остаточный член в этой формуле оценивается как $O(R^{-1/2+\varepsilon})$.



С. А. ГРИЦЕНКО (МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия)

В. Н. ЧУБАРИКОВ (МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия)

О нулях одного класса рядов Дирихле, не имеющих эйлера произведения



Сергей Александрович Гриценко

Самым известным рядом Дирихле является дзета-функция Римана. В полуплоскости $\Re s > 1$ она определяется равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Дзета-функция Римана удовлетворяет функциональному уравнению

$$\zeta(s) = \rho(s)\zeta(1-s), \quad \text{где} \quad \rho(s) = \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(s/2)} \pi^{s-1/2},$$

из которого следует, что везде, кроме критической полосы $0 < \Re s < 1$, она выражается через сумму ряда Дирихле. В критической полосе $\zeta(s)$ допускает иное аналитическое выражение и имеет бесконечно много нулей. Риман высказал гипотезу о том, что все эти нули лежат на критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$.

Пусть $N_0(T)$ – число нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ на промежутке $(0, T]$. В 1914 г. Г. Х. Харди (G. H. Hardy) доказал, что на критической прямой лежит бесконечно много нулей $\zeta(s)$, то есть что $N_0(T) \rightarrow +\infty$. В 1921 г. Г. Х. Харди и Дж. И. Литтлвуд (J. E. Littlewood) доказали, что $N_0(T) > c_1 T$, где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. В 1942 г. А. Сельберг (A. Selberg) получил оценку вида $N_0(T) > c_2 T \ln T$, $c_2 > 0$, которая является правильной по порядку.

Основной идеей, позволившей Сельбергу доказать эту выдающуюся теорему, явилось использование “успокаивающего множителя” (“mollifying factor”), умножение на который ведёт к понижению порядка роста второго момента дзета-функции на критической прямой:

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \sim T \ln T, \quad \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) \varphi^2(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \ll T.$$

Для построения успокаивающего множителя Сельберг существенно воспользовался наличием у дзета-функции Римана эйлерова произведения

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Для арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения, правильных по порядку нижних оценок для числа их нулей на отрезках критической прямой $\Re s = 1/2$ пока не получено. Простейшим рядом Дирихле такого рода является функция Дэвенпорта–Хейльбронна (H. Davenport, H. Heilbronn) $f(s)$,

$$f(s) = \frac{1}{2} (1 - i\kappa) L(s, \chi_1) + \frac{1}{2} (1 + i\kappa) L(s, \bar{\chi}_1),$$

где

$$\kappa = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1},$$

а χ_1 — неглавный характер Дирихле по модулю 5 с условием $\chi_1(2) = i$. Функция Дэвенпорта–Хейльбронна удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа, но не имеет эйлерова произведения.

Пусть $N(\sigma, T; f)$ — число её нулей в полосе $\Re s > \sigma$, $0 < \Im s \leq T$. До 1980 г. о поведении $N(\sigma, T; f)$ было известно следующее: 1) $N(\sigma, T; f) > c_3 T$, где $c_3 > 0$ (Г. Дэвенпорт и Г. Хейльбронн, 1936 г.); 2) При $1/2 < a < b \leq 1$

$$c_4 T \leq N(a, T; f) - N(b, T; f) \leq c_5 T \quad (\text{С. М. Воронин, 1976 г.})$$

В 1980 г. С. М. Воронин доказал, что

$$N_0(T; f) > T \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\ln \ln \ln \ln T}\right),$$

где $N_0(T; f)$ — число нулей ϱ функции Дэвенпорта–Хейльбронна $f(s)$ таких, что $\Re \varrho = 1/2$, $0 < \Im \varrho \leq T$.

Тем самым С. М. Воронин впервые установил, что на критической прямой лежит “аномально много” нулей арифметического ряда Дирихле без эйлерова произведения. Для решения этой задачи С. М. Воронин разработал оригинальный метод, основанный на приближениях рядов Дирихле отрезками их эйлеровых произведений. В некоторых случаях такие приближения эффективнее, чем приближения отрезками самих рядов Дирихле.

Современное состояние аналитической теории чисел таково, что отрезки эйлеровых произведений приходится брать весьма короткими. Этим обусловлено то обстоятельство, что метод Воронина пока что даёт неточные оценки. По-видимому, полную свою силу этот метод проявит, если появится возможность работать с более длинными отрезками эйлеровых произведений. Для иллюстрации метода С. М. Воронина ниже приводится одна из его центральных лемм.

Пусть $y = (\ln T)^{0.01}$, χ_1, χ_2 — различные примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2 соответственно. Пусть, далее,

$$P(s, \chi_j) = \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда существует абсолютная постоянная $c_0 > 0$ такая, что мера множества

$$\left\{t \in (0, T] \mid \left|P\left(\frac{1}{2} + it, \chi_1\right)\right| > \exp\left(\sqrt{\ln \ln y}\right), \left|P\left(\frac{1}{2} + it, \chi_2\right)\right| < \exp\left(-\sqrt{\ln \ln y}\right)\right\}$$

превосходит $c_0 T$.

Для доказательства С. М. Воронин проследил за совместным распределением сумм

$$\sum_{p \leq y} \frac{\chi_1(p)}{p^{1/2+it}}, \quad \sum_{p \leq y} \frac{\chi_2(p)}{p^{1/2+it}}.$$

Его метод, таким образом, вбирает в себя информацию не только о распределении модулей частичных эйлеровых произведений, но и о распределении их аргументов.

В 1989 г. мощный импульс этой тематике придал Анатолий Алексеевич Карацуба. Он создал новый метод, позволивший получать оценки снизу для числа нулей линейных комбинаций аналогов функции Харди, соответствующих L -функциям Дирихле. А. А. Карацуба получил принципиально более точные оценки, чем те, что были до него. Например, он доказал для функции Дэвенпорта–Хейльбронна, что

$$N_0(T; f) > T(\ln T)^{1/2-\varepsilon}.$$

Оба автора доклада имели счастливую возможность общаться с Анатолием Алексеевичем и учиться у него в период, когда он разрабатывал и совершенствовал свой ставший классическим метод. Этот метод, сложный как в идейном, так и в техническом плане, содержит ряд оригинальных взаимосвязанных идей, принадлежащих А. А. Карацубе.

Основная из этих идей состоит в частичном успокоении каждого слагаемого из линейной комбинации одним и тем же успокаивающим множителем. Анатолий Алексеевич всегда подчёркивал, что успех его метода и точность получающихся оценок напрямую зависят от общего множителя эйлеровых произведений L -функций Дирихле, входящих в линейную комбинацию.

Рассмотрим, например, функцию Дэвенпорта–Хейльбронна. При $\Re s > 1$ имеем равенства

$$\begin{aligned} L(s, \chi_1) &= \prod_{p \equiv 1 \pmod{5}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv -1 \pmod{5}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \times \\ &\quad \prod_{p \equiv 2 \pmod{5}} \left(1 - \frac{i}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv -2 \pmod{5}} \left(1 + \frac{i}{p^s}\right)^{-1}, \\ L(s, \bar{\chi}_1) &= \prod_{p \equiv 1 \pmod{5}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv -1 \pmod{5}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \times \\ &\quad \prod_{p \equiv 2 \pmod{5}} \left(1 + \frac{i}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv -2 \pmod{5}} \left(1 - \frac{i}{p^s}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что общим множителем обоих выражений является произведение

$$\prod_{p \equiv 1 \pmod{5}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv -1 \pmod{5}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Доля простых чисел, участвующих в нём, асимптотически равна $1/2$. Этим и обуславливается то, что повышающий множитель в оценке А. А. Карацубы имеет вид $(\ln T)^{1/2-\varepsilon}$.

Основной результат авторов доклада формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА. Пусть χ_1, χ_2 – примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2 соответственно, такие, что $\chi_1 \neq \chi_2$.

Пусть, далее, $Z(t, \chi_1), Z(t, \chi_2)$ – аналоги Z -функции Харди, отвечающие L -функциям Дирихле $L(s, \chi_1), L(s, \chi_2)$. Пусть, наконец,

$$g(t) = a_1 Z(t, \chi_1) + a_2 Z(t + t_0, \chi_2),$$

где a_1, a_2, t_0 – вещественные числа, $0 < t_0 < e^{\sqrt{\ln \ln \ln T}}$.

Тогда для числа $N_0(g; T)$ нулей вещественной функции $g(t)$ на промежутке $(0, T]$ справедлива оценка:

$$N_0(g; T) > T \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\ln \ln \ln T}\right).$$

Доказательство проводится методом Воронина. Метод Карацубы в данном случае неприменим, поскольку эйлеровы произведения функций $L(s, \chi_1)$ и $L(s + it_0, \chi_2)$ не содержат общего множителя.

$\Longleftrightarrow$

Н. М. ДОБРОВОЛЬСКИЙ (Тульский государственный педагогический институт им. Л.Н. Толстого, г. Тула, Россия)

О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток⁵



Николай Михайлович Добровольский

⁵Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: Н. М. Добровольский *О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток* (стр. 176 – 190).

В докладе был дан обзор нерешённых проблем теории гиперболической дзета-функции решёток, которая задаётся в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha > 1$ рядом

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^{-\alpha},$$

где $\bar{x} = \max(1, |x|)$. При $s = 1$ гиперболическая дзета-функция решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

$\Longleftrightarrow$

Д.В. КОЛЕДА (*Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь*)

Асимптотическое распределение алгебраических чисел на вещественной оси⁶

Обозначим через $\mathbb{A}_n$ множество алгебраических чисел степени n . Распределение элементов множеств $\mathbb{A}_n$ и $\mathbb{A}_n \cap \mathbb{R}$ представляет собой значительный интерес в теории чисел и особенно в теории диофантовых приближений. До недавнего времени даже для алгебраических чисел второй степени не было известно, насколько часто они попадают в произвольный промежуток в зависимости от его положения и длины.

Пусть $H(\alpha)$ – высота алгебраического числа α , определяемая как высота его минимального многочлена. Проблема распределения сводится к исследованию функции

$$\Phi_n(Q, x) = \#\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap \mathbb{R} : H(\alpha) \leq Q, \alpha < x\}.$$

Недавно докладчиком была найдена точная асимптотика функции $\Phi_n(Q, x)$ при $Q \rightarrow +\infty$. При этом, фактически, была корректно определена и явно описана функция плотности алгебраических чисел на вещественной прямой. В докладе приводятся результаты автора о распределении вещественных алгебраических чисел и, в частности, следующая

ТЕОРЕМА. *Существует непрерывная положительная функция $\varphi_n(x)$, такая что для любых действительных a и b , $-\infty < a < b < +\infty$, верно равенство*

$$\Phi_n(Q, b) - \Phi_n(Q, a) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_a^b \varphi_n(x) dx + O(Q^n (\ln Q)^{\ell(n)}),$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $\ell(n) = 0$ при $n \geq 3$, $\ell(n) = 1$ при $n = 2$, а постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от степени n . При этом существует бесконечно много промежутков $[a, b]$, для которых остаточный член имеет порядок $O(Q^n)$.

⁶Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: Д. В. Коледа *Об асимптотике распределения алгебраических чисел при возрастании их высот* (стр. 191 – 204).

Функция $\varphi_n(x)$ удовлетворяет следующим функциональным уравнениям

$$\varphi_n(-x) = \varphi_n(x), \quad x^2 \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0),$$

и при вещественных x её можно вычислить по формуле

$$\varphi_n(x) = \int_{D_n(x)} \left| \sum_{k=1}^n k p_k x^{k-1} \right| dp_1 \dots dp_n,$$

$$\text{где } D_n(x) = \left\{ (p_n, \dots, p_1) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |p_i| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^n p_k x^k \right| \leq 1 \right\}.$$

$$\iff$$

М.А. КОРОЛЁВ (МИАН им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия)

О парной корреляции нулей $\zeta(s)$



Максим Александрович Королёв

Пусть $\beta > 0$, и пусть $N(T; \beta)$ — число пар (γ, γ_1) ординат нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ с условиями

$$0 < \gamma, \gamma_1 \leq T, \quad 0 < \gamma - \gamma_1 \leq \frac{2\pi\beta}{\ln T}.$$

Для ряда задач представляет интерес поведение величины $N(T; \beta)$ при $T \rightarrow +\infty$ и различных $\beta = \beta(T)$.

Можно доказать, что для всякой функции $r = r(u)$, преобразование Фурье которой тождественно равно нулю вне отрезка $[-1, 1]$, из гипотезы Римана следует равенство

$$\begin{aligned} \sum_{0 < \gamma, \gamma_1 \leq T} r\left((\gamma - \gamma_1) \frac{\ln T}{2\pi}\right) w(\gamma - \gamma_1) = \\ = \frac{T}{2\pi} (\ln T) \left(r(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right) r(u) du + \delta(T) \right), \end{aligned}$$

где

$$w(u) = \frac{4}{4 + u^2}, \quad \delta(T) \ll \frac{\|\hat{r}\|_1}{\ln T} + \frac{\|\hat{r}\|_2}{\sqrt{\ln T}} + \left(\frac{X}{\ln T}\right)^2 \|r\|_1 + \int_{|u| > X} |r(u)| du,$$

X — произвольное число с условием $1 \ll X \ll \ln T$, $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. Отказ от указанного выше ограничения на $\hat{r}$ позволил бы положить в этом соотношении $r(u) = \chi_{(0, \beta]}(u)$ и получить в итоге следующее соотношение

$$N(T; \beta) \sim N(T) \int_0^\beta \left\{1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right\} du,$$

которое является одной из форм гипотезы Х. Л. Монтгомери (H. L. Montgomery) о парной корреляции нулей $\zeta(s)$. Из него, в частности, при достаточно большом β следовало бы соотношение

$$\frac{N(T; \beta)}{N(T)} \sim \beta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi^2\beta} + \frac{\sin 2\pi\beta}{4\pi^3\beta^2} - \frac{\cos 2\pi\beta}{4\pi^4\beta^3} + \dots$$

Приближение характеристической функции фиксированного отрезка функциями Берлинга–Сельберга (А. Beurling, 1930's; А. Сельберг, 1974), преобразование Фурье которых обладает необходимым свойством финитности, позволило Э. Карнейро, В. Чанди, Ф. Литтману и М. Б. Милиновичу (Е. Carneiro, V. Chandee, F. Littmann, M. B. Milinovich, 2014) вывести из гипотезы Римана оценку вида

$$\beta - \frac{7}{6} + \frac{1}{2\pi^2\beta} + O(\beta^{-2}) + o(1) \leq \frac{N(T; \beta)}{N(T)} \leq \beta + \frac{1}{2\pi^2\beta} + O(\beta^{-2}) + o(1)$$

при

$$\beta \geq \beta_0 > 0, \quad \beta = o\left(\sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}}\right).$$

Это уточняет оценку остаточного члена $O(1)$ в безусловной формуле А. Фуджи (А. Fujii, 1999), согласно которой $N(T; \beta)/N(T) = \beta + O(1)$ при любом $\beta > 0$.

Некоторое видоизменение рассуждений из работы Х. Л. Монтгомери, в ходе которых ему удалось получить асимптотику для функции

$$F(x; T) = \sum_{0 < \gamma, \gamma_1} x^{i(\gamma - \gamma_1)} w(\gamma - \gamma_1)$$

при $1 \leq x \leq T$, позволяет несколько уточнить результат четырёх авторов. Именно, рассмотрение вместо $F(x; T)$ функции

$$F(x; T; k) = \sum_{0 < \gamma, \gamma_1} x^{i(\gamma - \gamma_1)} \hat{k}(\gamma - \gamma_1), \quad k = k(u),$$

и оптимальный выбор весовой функции k позволяют показать, что приведённые выше двусторонние неравенства для $N(T; \beta)/N(T)$ остаются справедливыми и в области $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\beta = o(\ln T)$.

$\Longleftrightarrow$

А. ЛАУРИНЧИКАС (*Вильнюсский университет, г. Вильнюс, Литва*)

Совместная дискретная универсальность L -функций Дирихле⁷



Антанас Лауринчикас

В 1975 г. С. М. Воронин открыл одно очень интересное свойство дзета-функции Римана $\zeta(s)$, которое он назвал “универсальностью”. Его суть состоит в

⁷Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: А. Лауринчикас, Д. Корсакене, Д. Шяучюнас *Совместная дискретная универсальность L -функций Дирихле II* (стр. 205 — 218).

том, что любая функция $f(s)$ из достаточно широкого класса аналитических функций может быть сколь угодно хорошо приближена “сдвигами” $\zeta(s+i\tau)$ дзета-функции Римана. Этим же свойством универсальности обладают и функции $L(s, \chi)$, отвечающие характерам Дирихле.

Чтобы сформулировать современный вариант теоремы Воронина, необходимо ввести следующие обозначения. Пусть, как обычно, $s = \sigma + it$, $\mathcal{D}$ — вертикальная полоса вида $0.5 < \sigma < 1$ в комплексной плоскости, $\mathcal{K}$ — класс компактных подмножеств полосы $\mathcal{D}$, обладающих связным дополнением. Для компакта $K \in \mathcal{K}$ через $H_0(K)$ станем обозначать класс функций, непрерывных и не обращающихся в нуль на K , аналитических внутри K . Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L(s, \chi)$ — функция Дирихле, $K \in \mathcal{K}$, $f \in H_0(K)$. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |L(s + i\tau, \chi) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Иными словами, множество “сдвигов”, приближающих $f(s)$, имеет положительную нижнюю плотность.

Следует отметить, что и до работ С. М. Воронина существование объектов (степенных рядов, целых функций), обладающих аналогами свойства универсальности, устанавливалось в работах М. Фекете (М. Fekete), Дж. Д. Биркгофа (G. D. Birkhoff). Но это были чистые теоремы существования. Поэтому дзета-функция Римана — первый явно заданный объект, обладающий свойством универсальности.

Оказывается, что L -функции Дирихле обладают ещё более интересным свойством совместной универсальности. Оно выражается в том, что набор из нескольких аналитических функций может быть приближен набором сдвигов нескольких L -функций Дирихле. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\chi_1, \dots, \chi_r$ — попарно неэквивалентные характеры Дирихле⁸, $K_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, \dots, r$ — произвольные компактные множества, $f_j \in H_0(K_j)$ — произвольные фиксированные аналитические функции. Тогда для любого заданного $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Чтобы набор функций, сдвигами которых приближаются аналитические функции $f_j(s)$, обладал свойством совместной универсальности, элементы этого набора должны быть в некотором смысле “независимы”. В теореме 2 это достигается наложением условия попарной неэквивалентности характеров Дирихле.

⁸Характеры Дирихле χ_1 и χ_2 называются неэквивалентными, если они порождены различными примитивными характерами.

Следует отметить, что утверждение, подобное теореме 2, было по сути установлено С. М. Ворониным при доказательстве функциональной независимости L -функций Дирихле (1975), хотя и не было им явно сформулировано.

В теоремах 1 и 2 сдвиг τ может принимать любые действительные значения. Если ограничиться значениями τ из некоторого дискретного множества (скажем, из арифметической прогрессии $0, h, 2h, 3h, \dots$, где $h > 0$ — фиксированное число), то соответствующая задача о “дискретной универсальности” оказывается более сложной.

Дискретная универсальность L -функций Дирихле была установлена индийским математиком Б. Багчи (B. Bagchi, 1981) в его диссертации. Современная версия теоремы Багчи имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 3. Пусть характеры Дирихле χ_j , множества K_j и аналитические функции f_j , $j = 1, 2, \dots, r$, удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда для любых фиксированных положительных чисел h и ε справедливо неравенство:

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(s + ikh, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Величина сдвига kh в теореме 3 одинакова для всех L -функций Дирихле $L(s, \chi_j)$. Возникает следующий вопрос:

сохранится ли свойство совместной дискретной универсальности в случае, когда величины сдвигов каждой из функций будут различны?

Эта задача оказывается ещё более сложной. Этот вопрос допускает положительный ответ, если ограничиться особым классом таких сдвигов.

По заданным положительным числам $h_1, \dots, h_r$ определим множество

$$L(h_1, \dots, h_r; \pi) = \{h_1 \ln p : p \in \mathcal{P}\} \cup \dots \cup \{h_r \ln p : p \in \mathcal{P}\} \cup \{\pi\},$$

где $\mathcal{P}$ — множество простых чисел. Основной результат докладчика состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 4. Пусть характеры Дирихле χ_j , множества K_j и аналитические функции f_j , $j = 1, 2, \dots, r$, удовлетворяют условиям теоремы 2, и пусть числа $h_1, \dots, h_r$ таковы, что множество $L(h_1, \dots, h_r; \pi)$ линейно независимо над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(s + ikh_j, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

А. Дубицкасом было доказано, что для всех наборов $(h_1, \dots, h_r) \in \mathbb{R}_+^r$, за исключением наборов, образующих множество меры нуль по Лебегу, множество $L(h_1, \dots, h_r; \pi)$ будет линейно независимо над полем $\mathbb{Q}$. К сожалению, до

настоящего времени даже в случае $r = 2$ не удалось построить пример набора, обладающего таким свойством.

$\Longleftrightarrow$

Р. МАЦАЙТЕНЕ (*Шауляйский университет, Шауляйский государственный колледж, г. Шауляй, Литва*)

Совместная универсальность L -функций класса Сельберга и дзета-функций Гурвица с периодическими коэффициентами⁹



Рената Мацайтене

В первоначальном доказательстве теоремы С. М. Воронина об универсальности использовались аналог теоремы Б. Римана о перестановках членов условно сходящихся рядов в гильбертовом пространстве, приближения дзета-функции Римана значениями конечного эйлерова произведения, а также классическая теорема Л. Кронекера (L. Kronecker) о приближениях.

Иной подход, основанный на использовании предельных теорем для слабой сходимости вероятностных мер на пространствах аналитических функций, а также теоремы С. Н. Мергеляна о приближении аналитической функции многочленами в комплексной области, был предложен Б. Багчи.

В дальнейшем удалось установить универсальность различных классов функций, заданных рядами Дирихле, не имеющими эйлерова произведения. При-

⁹Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: Р. Мацайтене *Совместная универсальность L -функций класса Сельберга и дзета-функций Гурвица с периодическими коэффициентами* (стр. 219 — 231).

мером такой функции служит дзета-функция Гурвица

$$\zeta(s; \alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^s}, \quad \Re s > 1,$$

где $0 < \alpha \leq 1$ — фиксированное число. Лишь в частных случаях $\zeta(s; \alpha)$ выражается через дзета-функцию Римана и, следовательно, обладает эйлеровым произведением: $\zeta(s; 1) = \zeta(s)$, $\zeta(s; \frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s)$. Дзета-функция Гурвица обладает свойством “сильной универсальности”, которое заключается в том, что её сдвигами можно приближать аналитические функции, имеющие нули в критической полосе. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. (Б. Багчи, А. Reich, А. Лауринчикас). Пусть $\mathcal{K}$ — класс компактных подмножеств полосы $\frac{1}{2} < \Re s < 1$, обладающих связным дополнением, $K \in \mathcal{K}$. Пусть, далее, $H(K)$ — класс функций, непрерывных в K и аналитических внутри K , $f \in H(K)$. Пусть, наконец, α — трансцендентное или рациональное число, отличное от 1 и $\frac{1}{2}$. Тогда для любого положительного ε справедливо неравенство

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Доказательство аналогичного утверждения для случая, когда α является иррациональным алгебраическим числом, остаётся до сих пор открытой проблемой.

Обобщением дзета-функции Гурвица $\zeta(s; \alpha)$ является дзета-функция Гурвица $\zeta(s; \alpha; \mathfrak{A})$ с периодическими коэффициентами. Здесь $\mathfrak{A} = \{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ — последовательность комплексных чисел, периодическая с наименьшим периодом $q \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$,

$$\zeta(s; \alpha; \mathfrak{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n + \alpha)^s}, \quad \Re s > 1.$$

Равенством

$$\zeta(s; \alpha; \mathfrak{A}) = \frac{1}{q^s} \sum_{k=0}^{q-1} a_k \zeta\left(s; \frac{k + \alpha}{q}\right)$$

функция $\zeta(s; \alpha; \mathfrak{A})$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Единственной её особенностью является простой полюс в точке $s = 1$ с вычетом, равным

$$a = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} a_k$$

(в случае $a = 0$ эта функция будет целой). Частными случаями $\zeta(s; \alpha; \mathfrak{A})$, отвечающими $a_n \equiv 1$ и $a_n = e^{2\pi i \lambda n}$, где λ — рациональное число, будут, соответ-

ственно, дзета-функция Римана и дзета-функция Лерха (M. Lerch) $L(s; \alpha, \lambda)$,

$$L(s; \alpha, \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda n}}{(n + \alpha)^s}, \quad \Re s > 1.$$

Введём следующие обозначения. Пусть $r \geq 2$ — целое число, $l_j, j = 1, \dots, r$ — некоторые натуральные числа. Для всякой пары (j, l) , где $1 \leq l \leq l_j$, рассмотрим последовательность $\mathfrak{A}_{j,l} = \{a_{n,j,l}\}_{n=0}^{+\infty}$ комплексных чисел, периодическую с периодом $q_{j,l}$. Через q_j станем обозначать наименьшее общее кратное периодов $q_{j,l}, l = 1, \dots, l_j$. Далее, пусть

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1,j,1} & a_{1,j,2} & \dots & a_{1,j,l_j} \\ a_{2,j,1} & a_{2,j,2} & \dots & a_{2,j,l_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q_j,j,1} & a_{q_j,j,2} & \dots & a_{q_j,j,l_j} \end{pmatrix}$$

— матрица размера $q_j \times l_j$.

Пусть, наконец, для заданных $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ через $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ обозначено множество всех чисел вида $\ln(n + \alpha_j)$, где $j = 1, \dots, r, n \geq 0$ — целое число. Имеет место следующая теорема о совместной сильной универсальности, принадлежащая А. Лауринчикасу и С. Скерстонайте (S. Skerstonaitė; 2009):

ТЕОРЕМА 2. Пусть множество $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независимо над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, и пусть $\text{rank } A_j = l_j \leq q_j, j = 1, \dots, r$. Пусть, далее, $K_{j,l} \in \mathcal{K}, f_{j,l} \in H(K_{j,l})$ для $j = 1, \dots, r, l = 1, \dots, l_j$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \alpha_j, \mathfrak{A}_{j,l}) - f_{j,l}(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Ещё одно направление в рассматриваемой проблематике связано с так называемой “смешанной совместной универсальностью” и состоит в доказательстве возможности одновременного приближения нескольких аналитических функций одними и теми же сдвигами дзета-функции Римана и функций, определяемых рядами Дирихле, не имеющих эйлерова произведения. Пример такого утверждения даётся следующей теоремой Х. Мишу (H. Mishou, 2007).

ТЕОРЕМА 3. Пусть α — трансцендентное число, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}, f_1 \in H_0(K_1), f_2 \in H(K_2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + i\tau; \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Смешанная совместная универсальность для $\zeta(s)$ и наборов

$$\zeta(s; \alpha_1, \mathfrak{A}_{1,l}), \dots, \zeta(s; \alpha_r, \mathfrak{A}_{r,l}), \quad l = 1, \dots, l_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

(где каждой периодической последовательности $\mathfrak{A}_{j,l}$, $l = 1, \dots, l_j$, отвечает один и тот же параметр α_j), была установлена в 2010 г. Й. Генисом (J. Genys), С. Рачкаускаене (S. Račkauskienė), Д. Шяучюнасом (D. Šiaučiūnas) и автором доклада.

Аналогичные утверждения, в которых роль $\zeta(s)$ выполняют L -функции, отвечающие нормированным параболическим формам Гекке (zeta-functions of normalized Hecke cusp forms), L -функции, отвечающие формам - собственным функциям всех операторов Гекке (zeta-functions of newforms) и L -функции, соответствующие автоморфным формам с характером Дирихле и являющиеся собственными функциями всех операторов Гекке (zeta-functions of newforms with Dirichlet character) были установлены, соответственно, А. Лауринчикасом, Д. Шяучюнасом (2012), Р. Мацайтене (2012) и В. Поцевичене (V. Rosėvičienė, 2014).

В 1991 г. А. Сельберг ввёл в рассмотрение класс $\mathcal{S}$ функций

$$L(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

которые удовлетворяют ряду условий, а именно:

- “условие Рамануджана”: $a(n) \ll n^\varepsilon$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$;
- “аналитическое продолжение”: $(s-1)^r L(s)$ является целой функцией конечного порядка для некоторого целого $r \geq 0$;
- наличие функционального уравнения вида $\Lambda_L(s) = \overline{w \Lambda_L(1-\bar{s})}$, где

$$\Lambda_L(s) = Q^s L(s) \prod_{j=1}^l \Gamma(\lambda_j s + \mu_j),$$

Q, w, μ_j — комплексные числа с условиями $|w| = 1$, $\Re \mu_j \geq 0$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, l$;

- наличие эйлерова произведения вида

$$L(s) = \prod_p \exp \left(\sum_{\alpha=0}^{+\infty} \frac{b(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right),$$

где $b(p^\alpha) \ll p^{\alpha\theta}$ при некотором фиксированном $\theta < \frac{1}{2}$.

В 2002 г. Й. Штойдинг (J. Steuding) установил свойство универсальности для функций $L(s)$ из класса $\mathcal{S}$, которые удовлетворяют дополнительным условиям, а именно:

- сомножители эйлерова произведения для $L(s)$ имеют “полиномиальный” вид, то есть

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{c_j(p)}{p^s} \right)^{-1},$$

где $c_j(p)$ — комплексные числа;

— условие роста среднеквадратичного коэффициентов (далее — “условие I”), согласно которому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa$$

для некоторой положительной постоянной κ . Позже (2010 г.) Й. Штойдинг совместно с Х. Нагоши (Н. Nagoshi) доказали универсальность всех функций класса Сельберга, которые удовлетворяют одному лишь условию I.

Основным результатом автора доклада является следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $L(s)$ принадлежит классу Сельберга $\mathcal{S}$ и удовлетворяет условию I. Пусть также $d_L = 2(\lambda_1 + \dots + \lambda_l)$, $\mathcal{K}_L$ — класс компактных подмножеств полосы

$$\max \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L} \right) < \Re s < 1,$$

обладающих связным дополнением, $K \in \mathcal{K}_L$, $f \in H_{0,L}(K)$. Пусть, далее, числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ алгебраически независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, и пусть для определённых выше матриц A_j справедливы равенства: $\text{rank } A_j = l_j$ ($j = 1, \dots, r$). Пусть, наконец, множества $K_{j,l}$ и функции $f_{j,l}$ — те же, что в теореме 2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |L(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{j,l}} |\zeta(s + i\tau; \alpha_j, \mathfrak{A}_{j,l}) - f_{j,l}(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

$\Longleftrightarrow$

Н. Г. МОЩЕВИТИН (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия)

О некоторых диофантовых спектрах

Пусть α — вещественное иррациональное число, $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ — его разложение в непрерывную дробь ($a_n \geq 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$). Определим функцию $\psi_\alpha(t)$ при вещественных $t \geq 1$ равенством

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|,$$

где $\|\xi\|$ — расстояние от ξ до ближайшего целого числа. Эта функция является кусочно постоянной, невозрастающей и терпит разрывы в точках q_n , $n = 1, 2, \dots$, являющихся знаменателями подходящих дробей $p_n/q_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ числа α .



Николай Германович Мощевитин

Спектром Лагранжа $\mathbb{L}$ называется множество вещественных чисел λ , для каждого из которых существует иррациональное число α с условием

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda.$$

Известно, что спектр Лагранжа имеет “дискретную” часть, состоящую из точек

$$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \dots$$

(при этом $1/\sqrt{5}$ является наибольшим элементом $\mathbb{L}$), а также “непрерывную” часть, которая содержит некоторый отрезок $[0, \lambda^*]$, называемый лучом Холла. Подсчёт точного значения λ^* был предпринят Г. А. Фрейманом (1975).

Наряду со спектром Лагранжа рассматривается спектр Дирихле $\mathbb{D}$, который определяется как множество чисел d , для каждого из которых существует иррациональное число α такое, что

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = d.$$

Известно, что спектр Дирихле целиком содержится в отрезке

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}, 1 \right],$$

причём его левый конец является наименьшим элементом $\mathbb{D}$ (G. Szekeres, 1937), и что $\mathbb{D}$ целиком содержит некоторый отрезок $[d^*, 1]$. Нахождение точного значения величины $d^* < 1$ до сих пор остаётся открытой проблемой.

Доклад посвящён одной задаче, связанной с функцией Минковского $\mu_\alpha(t)$ и отвечающему ей спектру Минковского $\mathbb{M}$ (основные результаты доклада опубликованы в статье ([13])).

Согласно классической теореме Лежандра, если для фиксированного иррационального α несократимая дробь P/Q удовлетворяет неравенству

$$\left| \alpha - \frac{P}{Q} \right| < \frac{1}{2Q^2},$$

то она является подходящей дробью α . Обратное утверждение неверно, и этот факт указывает на некоторое несовершенство аппарата классических цепных дробей. (Этот недостаток был устранён Г. Минковским (H. Minkowski, 1901), который предложил рассматривать вместо дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ иную дробь, некоторые элементы которой могут иметь и отрицательные значения.)

Пусть $Q_0 < Q_1 < \dots < Q_n < \dots$ - последовательность, составленная из знаменателей тех подходящих дробей P/Q числа α , для которых неравенство $|\alpha - P/Q| < 1/(2Q^2)$ всё же имеет место. Тогда для всякого t из промежутка $Q_n \leq t \leq Q_{n+1}$ значение функции Минковского определяется равенством

$$\mu_\alpha(t) = \frac{Q_{n+1} - t}{Q_{n+1} - Q_n} \|Q_n \alpha\| + \frac{t - Q_n}{Q_{n+1} - Q_n} \|Q_{n+1} \alpha\|.$$

(Несложно заметить, что график кусочно-линейной функции $\mu_\alpha(t)$ может быть проинтерпретирован в терминах выпуклой оболочки графика функции $\psi_\alpha(t)$).

Спектр Минковского $\mathbb{M}$ определяется как множество тех $m \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует иррациональное число α с условием

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t \mu_\alpha(t) = m.$$

Основным результатом автора доклада является

ТЕОРЕМА. *Минимальный и максимальный элементы спектра $\mathbb{M}$ равны, соответственно, $1/4$ и $1/2$.*

До сих пор, однако, неизвестно, совпадает ли $\mathbb{M}$ с отрезком $[1/4, 1/2]$ или нет.

Принципиальная трудность задач, связанных со структурой спектра Минковского, вызвана следующим обстоятельством. Если p_n/q_n — подходящая дробь числа α , то справедливо равенство:

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)}.$$

где $\alpha_{n+1} = [a_n, a_{n+1}, \dots]$, $\alpha_n^* = [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$. Следовательно,

$$q_n \|q_n \alpha\| = L(\alpha_{n+1}, \alpha_n^*), \quad \text{где} \quad L(x, y) = \frac{1}{x+y}.$$

Таким образом, для исследования структуры спектра Лагранжа необходимо исследовать значения функции $L(x, y)$ для соответствующих x и y .

Можно показать, что для спектров Дирихле и Минковского соответствующие задачи сводятся к исследованию свойств функции $D(x, y) = \frac{y}{x+y}$ и пары функций

$$\frac{x+y+1}{4}, \quad \frac{(1-xy)^2}{4(1+xy)(1-x)(1-y)}$$

в единичном квадрате $[0, 1]^2$.

Отличительной особенностью спектров Лагранжа и Дирихле является то, что наибольшие значения функций $L(x, y)$ и $D(x, y)$ достигаются на отдельных точках квадрата, в то время как соответствующий максимум, отвечающей спектру Минковского, достигается на двух кривых

$$x + 1/y = 2 \quad \text{и} \quad y + 1/x = 2,$$

исходящих из точки $(1, 1)$. Последнее обстоятельство не позволяет применить к исследованию спектра $\mathbb{M}$ технику (именуемую в этой тематике “техникой изоляции”), с помощью которой удаётся изучить структуру спектров Лагранжа и Дирихле.

Ю. В. НЕСТЕРЕНКО (*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

$\Longleftrightarrow$

О постоянной Каталана

Постоянная Каталана G определяется равенством

$$G = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} - \dots$$

Это одна из классических постоянных, таких, как e , π , константа Эйлера γ . Впервые она возникла в работах Э. Ш. Каталана (E.-C. Catalan) в середине XIX в. До сих пор открытой проблемой является доказательство иррациональности G .

Пусть α — вещественное число, рациональное или иррациональное. Задав-шись натуральным $q \geq 1$, всегда можно отыскать целое число p так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q}.$$



Юрий Валентинович Нестеренко

Известно, что для доказательства иррациональности α достаточно доказать подобное неравенство с ε/q в правой части, где ε — сколь угодно малое фиксированное число. Для этого, в свою очередь, используют разные конструкции рациональных приближений к α (ряды, интегралы и т.д.).

В 2002 г. В. В. Зудилин доказал следующее интегральное равенство:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-0.5}(1-x)^n y^n (1-y)^{n-0.5}}{(1-xy)^{n+1}} dx dy = (-1)^n (u_n G - v_n),$$

в котором u_n, v_n — рациональные числа. Интеграл в левой части равенства мал и экспоненциально убывает с ростом n . Зудилину удалось исследовать некоторые арифметические свойства чисел u_n и v_n . Впоследствии они были уточнены в работах Зудилина, Ривоаля (Т. Rivoal) и Краттенталера (С. Krattenthaler), и появилась возможность доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Существует эффективная конструкция бесконечной последовательности рациональных чисел p/q , удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

Конечно, это неравенство сильно уступает даже тривиальному неравенству $|G - p/q| \leq q^{-1}$, однако главное достоинство этого утверждения состоит в том, что последовательность рациональных приближений строится эффективно.

Главная цель доклада — обобщить приведённое выше интегральное представление Зудилина для рациональных приближений постоянной G , доказать теорему 1 и некоторые другие результаты.

Обобщённая гипергеометрическая функция $F(z)$, зависящая от параметров $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_{m-1}$, определяется рядом

$$F(z) = {}_mF_{m-1} \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_{m-1} \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_\nu \dots (a_m)_\nu}{(b_1)_\nu \dots (b_{m-1})_\nu} \frac{z^\nu}{\nu!}.$$

Здесь и далее $(a)_\nu$ — символ Похгаммера: $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1) \dots (a+\nu-1)$ при $\nu \geq 1$. Параметры a_j, b_j предполагаются отличными от отрицательных целых чисел. Ряд для $F(z)$ сходится абсолютно при $|z| < 1$, а в случае, когда $\operatorname{Re}(b_1 + \dots - a_m) > 0$ — и при $|z| \leq 1$. Для $F(z)$ имеет место и интегральное представление вида

$$F(z) = \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b_j - a_j)} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\prod_{j=1}^{m-1} x_j^{a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-zx_1 \dots x_{m-1})^{a_m}} dx_1 \dots dx_{m-1},$$

которое справедливо при $|\arg(1-z)| < \pi$.

Ещё в начале XX столетия Н. Нильсен (N. Nielsen) и С. Рамануджан (S. Ramanujan) открыли тождества, в которых постоянная Каталана выражается через значения гипергеометрической функции ${}_3F_2$:

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{2^{2\nu}}{(2\nu+1)^2} \binom{2\nu}{\nu}^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(1)_\nu}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right)} = 2G.$$

В рассуждениях автора доклада ключевую роль играют функции

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu} z^\nu = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \frac{\arcsin \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu (2\nu + \frac{1}{2})} z^\nu = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| z \right)$$

(Очевидно, подстановка $z = 1$ в равенство для $f_2(z)$ приводит к равенству Нильсена).

Функции $f_1(z), f_2(z)$ возникают при рассмотрении интеграла, подобного интегралу Зудилина, но более общего вида. Так, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть a, b — целые числа, $2b > 3a > 0$. Тогда для любого z ,

$|z| \leq 1$, справедливо тождество:

$$J(z) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{a-0.5}(1-x)^{b-a}y^a(1-y)^{b-a-0.5}}{(1-zxy)^{a+1}} dx dy = \\ = A\left(\frac{1}{z}\right)f_1(z) + B\left(\frac{1}{z}\right)f_2(z) - C\left(\frac{1}{z}\right),$$

в котором $A(x), B(x)$ — многочлены с рациональными коэффициентами, а $C(x)$ — некоторая рациональная функция.

Функции A, B и C имеют вид:

$$A(x) = \sum_{j=0}^{b-a} A_j x^j, \quad B(x) = \sum_{j=0}^{b-a} B_j x^j, \\ C(x) = \sum_{j=0}^{b-a} \sum_{\nu=0}^{a+j-1} A_j \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu} x^{j-\nu} + \sum_{j=0}^{b-a} \sum_{\nu=0}^{a+j-1} B_j \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right)} x^{j-\nu}.$$

Коэффициенты A_j, B_j этих разложений могут быть вычислены явно. Раскрывая подынтегральное выражение по формуле бинома и интегрируя по x, y , получим равенство

$$J(z) = \sum_{\nu=a}^{+\infty} \frac{\nu!}{\left(\frac{3}{2}\right)_\nu} R(\nu) z^{\nu-a},$$

в котором R — рациональная функция,

$$R(x) = \frac{(b-a)!}{a!} \left(\frac{3}{2}\right)_{b-a-1} \frac{x(x-1)\dots(x-a+1)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(x+b-a+\frac{1}{2}\right)^2} = \\ = \sum_{j=0}^{b-a} \frac{(x+1)\dots(x+j)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)_{j+1}} \left(A_j + \frac{B_j}{x+j+\frac{1}{2}}\right).$$

Важным обстоятельством является то, что сумма

$$\sum_{j=0}^{b-a} A_j = A(1)$$

совпадает с вычетом $R(x)$ в точке $x = \infty$ и потому равна нулю. Таким образом, при подстановке $z = 1$ в равенство для $J(z)$ особенность $f_1(z)$ в точке $z = 1$ уничтожается нулём $A(z)$. В итоге получается равенство

$$J(1) = 4B(1)G - C(1),$$

в котором $B(1), C(1)$ — рациональные числа, а величина $J(1)$ достаточно мала. Это равенство и позволяет в дальнейшем сконструировать последовательность рациональных приближений к постоянной Каталана.

Однако для этого необходимо знать некоторые арифметические свойства величин $B(1), C(1)$. Следующая теорема даёт верхние оценки для знаменателей рациональных чисел A_j, B_j .

ТЕОРЕМА 3. Для любого целого j , $0 \leq j \leq b - a$, справедливы включения:

$$4^{b-j} B_j \in \mathbb{Z}, \quad 4^{b-j} D_{2b-2a} A_j \in \mathbb{Z},$$

где $D_m = [1, 2, \dots, m]$ — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, m$.

Первое включение следует из явной формулы

$$B_j = (-1)^{a+1} 2^{-2b+2j+1} \frac{(2a+2j)! j! (2b-2a)!}{a! (a+j)! (b-a-j)! (b-a-j)! (2j)! (2j)!}$$

и того факта, что при любых целых $u \geq v \geq 1$ число

$$\frac{(2u)!v!}{u!(2v)!(u-v)!}$$

является целым. Второе включение доказывается сложнее и использует рекуррентное соотношение, связывающее A_j с B_j .

Заменяя во всех предыдущих рассуждениях a и b величинами an и bn , где a, b — фиксированные целые числа, а n неограниченно возрастает, можно получить последовательность рациональных приближений к постоянной Каталана вида

$$q_n = 4^{bn} D_{2(b-a)n}^2 B(1) \in \mathbb{Z}, \quad p_n = 4^{bn} D_{2(b-a)n}^2 C(1) \in \mathbb{Z},$$

и для них $r_n = q_n G - p_n = 4^{bn} D_{2(b-a)n}^2 J(1)$.

Значение $B(1)$ легко поддаётся изучению; асимптотика интеграла

$$J(1) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{an-0.5} (1-x)^{(b-a)n} y^{an} (1-y)^{(b-a)n-0.5}}{(1-xy)^{an+1}} dx dy, \quad n \rightarrow +\infty,$$

может быть найдена методом Лапласа. В итоге для величины

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln |r_n|}{\ln q_n}$$

получается точное равенство вида

$$\sigma = \frac{(c+1) \ln 4 + 4c + g(\eta)}{(c+1) \ln 4 + 4c + h(\xi)},$$

в котором

$$c = \frac{b}{a} - 1, \quad \xi = \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 4c} - c + 2}, \quad \eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4+c}{c}},$$

$$g(\eta) = 2 \ln \eta + 2c \ln(1-\eta) - \ln(1-\eta^2), \quad h(\xi) = \ln(1+\xi) - 2c \ln\left(1 - \frac{\xi}{c}\right).$$

Функция $\sigma = \sigma(c)$ достигает минимума, равного $0.475720\dots$, в точке c , очень близкой к единице: $c = 1.00669\dots$. Беря $a = 1$, $b = 2$, будем иметь: $c = 1$. Получающиеся при этом рациональные приближения совпадают с теми, что были построены Зудилиным. В этом случае

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad h(\xi) = 5 \ln \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad g(\eta) = 5 \ln \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

и значение σ , действительно, оказывается меньшим $\frac{1}{2}$:

$$\sigma = 0.475726\dots$$

Несложно теперь проверить, что для так определённой последовательности рациональных приближений p_n/q_n будет выполнено неравенство теоремы 1:

$$\left| G - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{q_n}}.$$

Беря $a = 4$, $b = 7$, получим

$$\begin{aligned} c = \frac{3}{4}, \quad \xi = \frac{3}{16}(-5 + \sqrt{57}) = 0.4780\dots, \quad \eta = \frac{1}{6}(-3 + \sqrt{57}) = 0.4780\dots, \\ g(\eta) = \ln \left(\frac{1}{12} \sqrt{3303 - 437\sqrt{57}} \right) = -1.8277\dots, \\ h(\xi) = \ln \left(\frac{1}{12} \sqrt{3303 + 437\sqrt{57}} \right) = 1.9126\dots, \end{aligned}$$

откуда $\sigma = 0.49031\dots < \frac{1}{2}$. Таким образом, и отвечающая этому выбору a, b последовательность рациональных приближений удовлетворяет неравенству теоремы 1.

Однако эта последовательность имеет одно преимущество. Построенные таким образом числа p_n, q_n имеют очень большой общий делитель. Поэтому дробь p_n/q_n (после сокращения) имеет знаменатель, существенно меньший, чем q_n .

Этот общий делитель определяется следующим образом. Положим

$$\Omega = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6} \right) \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right) \cup \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6} \right)$$

и определим величину Δ равенством

$$\Delta = \prod_{\{n/p\} \in \Omega} p.$$

Наконец, обозначим

$$v_n = \frac{4^{7n+1} D_{8n} D_{6n} B(1)}{\Delta}, \quad u_n = \frac{4^{7n} D_{8n} D_{6n} C(1)}{\Delta}, \quad r_n = v_n G - u_n.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln |r_n|}{\ln v_n} = 0.44555 \dots < \frac{9}{20}$$

и, следовательно,

$$0 < \left| G - \frac{u_n}{v_n} \right| < v_n^{-11/20}.$$

Определённые таким образом числа v_n являются целыми. По-видимому, то же справедливо и для последовательности чисел u_n . Это утверждение проверено для всех $n \leq 350$, однако в общем случае доказать его пока не удаётся. Таким образом, получается следующая условная

ТЕОРЕМА 4. *Если числа u_n — целые для всех $n \geq 1$, то указанная конструкция даёт бесконечную последовательность рациональных чисел p/q , удовлетворяющих неравенству*

$$0 < \left| G - \frac{p}{q} \right| < q^{-11/20}.$$

$\Longleftrightarrow$

Д. А. ПОПОВ (*Научно-исследовательский институт физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*)

О поведении величины $P(x)$ на коротких интервалах



Дмитрий Александрович Попов

Пусть $r(n)$ — количество представлений целого числа $n \geq 1$ суммой двух квадратов целых чисел. Как известно, проблема круга состоит в изучении поведения величины

$$P(x) = \sum_{a^2+b^2 \leq x} 1 - \pi x = \sum_{n \leq x} r(n) - \pi x, \quad x \rightarrow +\infty,$$

и, в частности, в доказательстве оценки $P(x) = O(x^{1/4+\varepsilon})$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. Долгую историю этой проблемы составляют работы, в которых последовательно уменьшалось значение величины θ в оценке $P(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$. Один из последних в этой тематике результатов принадлежит Н. М. Хаксли (N. M. Huxley): $\theta = 131/416 \approx 0.3149$. Для величины $P(x)$ имеется ряд омега-теорем. В частности, известно, что $P(x) = \Omega(x^{1/4}(\ln x)^{1/4})$.

Особое направление в проблеме круга образуют задачи, связанные с исследованием поведения $P(x)$ на коротких промежутках изменения x , то есть на промежутках вида $|x - n| \leq n^{1-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$. Основная цель доклада состояла в том, чтобы показать, как из различных предположений о поведении функции $P(x)$ на коротких промежутках получаются “локальные” оценки, то есть оценки величины $|P(n)|$.

Отправной точкой в исследованиях такого рода служит “усечённая” формула Вороного–Харди, согласно которой величина $P(x)$ при любом $N \geq 1$ представляется суммой $P_N(x) + O(\Delta_N(x))$, где

$$P_N(x) = \sum_{1 \leq m \leq N} \varphi_m(x), \quad \varphi_m(x) = -\frac{x^{1/4}}{\pi} \frac{r(m)}{m^{3/4}} \cos\left(2\pi\sqrt{mx} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\Delta_N(x) = c_0(\varepsilon)(N^\varepsilon + N^{-1/2}x^{1/2+\varepsilon}). \quad (1)$$

Положим для дальнейшего

$$\bar{r}(n) = \exp\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right),$$

так что $0 \leq r(n) \leq \bar{r}(n)$ для всех достаточно больших n . Далее, обозначим через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(N)$ множество целых чисел $n \geq 1$, для которых $r(n) \neq 0$ и, кроме того, имеет место неравенство

$$|P(n)| \geq c_1(\Delta_N(n) + \bar{r}(n)),$$

где $c_1 > 8$ — некоторая фиксированная постоянная.

Далее, зафиксируем некоторую постоянную $c_2 > 0$ и для всякого достаточно большого целого $n \in \mathcal{A}$ определим величину $s = s(n)$ так, чтобы неравенство

$$|P(x) - P(n)| \leq 0.5|P(n)|$$

выполнялось на всём промежутке вида $|x - n| \leq c_2|P(n)|^s/\bar{r}(n)$. Ввиду оценки Г. Ф. Вороного $P(n) = O(n^{1/3})$ всюду далее можно предполагать, что $s \leq 3$.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Если $n \in \mathcal{A}(N)$ и $s(n) \leq 2 - \gamma$ при некотором $\gamma > 0$, то

$$|P(n)| \leq c_3 (n \bar{r}^3(n) \ln^2 n)^{\frac{1}{s+2}}, \quad c_3 = c_3(\gamma) > 0.$$

Если же $2 \leq s(n) \leq 3$ и при этом $|P(n)| \geq c_4 n^{1/(2s)}$, то

$$|P(n)| \leq c_5 n^{1/4} r^{3/2}(n) \ln n.$$

Докладчиком был также сформулирован так называемый “принцип локализации”, который состоит в следующем.

Пусть $1 \ll \sigma \leq 0.5n$. Тогда справедливо равенство

$$P(n) = \frac{1}{2\sigma} \int_{n-\sigma}^{n+\sigma} (P(n) - P(x)) dx + B,$$

где

$$B \leq \begin{cases} c_6 n^{1/2} \sigma^{-1/2} r(n/\sigma^2), & \text{если } \sigma \leq \sqrt{n}/(2\pi), \\ c_7 n^{3/4} \sigma^{-1}, & \text{если } \sigma > \sqrt{n}/(2\pi). \end{cases}$$

Из полученных результатов следует интересное наблюдение. Предположим, что $|P(n)| \geq c_8 n^{1/4}$, и при этом в точке $x = n$ функция $P(x)$ имеет “широкий максимум”, то есть неравенство

$$|P(x) - P(n)| \leq 0.5|P(n)|$$

выполняется на всём промежутке $|x - n| \leq n^{0.5-\varepsilon}$. Тогда оказывается, что

$$|P(n)| \leq c_9 n^{1/4+\varepsilon},$$

то есть на всём рассматриваемом промежутке проблема круга решена.

Особое значение этому наблюдению придаёт следующий факт. Известно, что всякий промежуток вида $n \leq x \leq 2n$ содержит $k \gg \sqrt{n} (\ln n)^5$ непересекающихся промежутков $U_1, \dots, U_k$, длина каждого из которых превышает $\sqrt{n} (\ln n)^{-5}$, таких, что на каждом из них выполняется неравенство $|P(x)| \geq c_{10} n^{1/4}$. Если бы удалось доказать, что каждый из интервалов U_j , $j = 1, \dots, k$, покрывается одним “широким максимумом” функции $|P(x)|$, то это привело бы к решению проблемы круга.

$\Longleftrightarrow$

З. Х. РАХМОНОВ (*Институт математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, г. Душанбе, Таджикистан*)

Короткие тригонометрические суммы Вейля¹⁰

¹⁰Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: З. Х. Рахмонов, Н. Н. Назрублюев, А. О. Рахимов *Короткие суммы Г. Вейля и их приложения* (стр. 232 — 247).



Зарулло Хусенович Рахмонов

И. М. Виноградов первым начал изучать тригонометрические суммы, переменная суммирование в которых принимает значения из “коротких интервалов”. Такие суммы возникают при решении аддитивных задач с “почти равными” слагаемыми. В 1937 г. он впервые для линейной тригонометрической суммы с простыми числами вида

$$S(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \exp(2\pi i \alpha n),$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \tau$$

нашёл нетривиальную оценку при $x^{2/3+\varepsilon} < y \leq x$ и $e^{c(\ln \ln x)^2} \ll q \ll x^{1/3}$.

В 1951 г. К. Б. Хаселгров (С. В. Haselgrove) получил нетривиальную оценку суммы $S(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = \frac{63}{64}$ и произвольном q . Её следствием явилась теорема о разрешимости уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

в “почти равных” слагаемых, то есть в простых числах с условием $|p_j - N/3| \leq N^\theta$, $j = 1, 2, 3$. В настоящее время наилучший результат в этой тематике принадлежит Жиа Чаохуа ($\theta = \frac{7}{12}$, Jia Chao-hua, 1998).

В 1981 г. Р. Вон (R. Vaughan) получил ряд утверждений о приближении суммы Г. Вейля (H. Weil) вида

$$T_n(\alpha; x) = \sum_{m \leq x} e^{2\pi i \alpha m^n}, \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau.$$

Так, он доказал, что

$$T_n(\alpha, x) = \frac{S(a, q)}{q} \int_0^1 e^{2\pi i \lambda t^n} dt + O(q^{0.5+\varepsilon}(1+x^n|\lambda|)^{0.5}).$$

Если же $|\lambda| \leq (2nqx^{n-1})^{-1}$ (то есть, если α очень хорошо приближается рациональным числом), то

$$T_n(\alpha, x) = x \frac{S(a, q)}{q} \int_0^1 e^{2\pi i \lambda t^n} dt + O(q^{0.5+\varepsilon}).$$

Воспользовавшись этими соотношениями, он получил в 1986 г. асимптотическую формулу в проблеме Варинга для 8 кубов.

Короткие тригонометрические суммы Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e^{2\pi i \alpha m^n}, \quad \sqrt{x} \ll y \ll \frac{x}{\ln x}$$

были исследованы З. Х. Рахмоновым и его учениками для случаев $n = 2, 3, 4$. Следующая теорема даёт оценку $T_n(\alpha; x, y)$ при произвольном n .

ТЕОРЕМА 1 (З. Х. Рахмонов, Н. Н. Назрублюев, А. О. Рахимов, 2013). Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\lambda \geq 0$. Тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq (2q)^{-1}$ справедливо равенство

$$T_n(\alpha; x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T_n(\lambda; x, y) + O(q^{0.5+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > (2q)^{-1}$ — оценка

$$T_n(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{1}{k}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Оценки коротких сумм Вейля позволяют получить ряд теорем о разрешимости некоторых диофантовых уравнений. Пусть всюду далее N обозначает достаточно большое целое число, $\mathcal{L} = \ln N$.

ТЕОРЕМА 2 (З. Х. Рахмонов, 2012). Пусть $I(N; H)$ — число представлений N суммой $p_1 + p_2 + m^3$ с условиями

$$\left| p_j - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad \left| m^3 - \frac{N}{3} \right| \leq H.$$

Пусть, далее, $\varrho(N; p)$ — число решений сравнения $x^3 \equiv N \pmod{p}$. Тогда при $H \geq N^{5/6} \mathcal{L}^{10}$ справедлива асимптотическая формула

$$I(N, H) = \frac{3\mathfrak{S}H^2}{\sqrt[3]{3N}\mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N}\mathcal{L}^3}\right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\varrho(N, p)}{(p-1)^2}\right).$$

ТЕОРЕМА 3 (З. Х. Рахмонов, К. И. Мирзоабдугафуров, 2008). Пусть $J(N; H)$ — число представлений N суммой девяти кубов натуральных чисел x_j с условиями

$$\left| x_j - \left(\frac{N}{9} \right)^{\frac{1}{3}} \right| \leq N^{\frac{1}{3} - \frac{1}{30} + \varepsilon}, \quad j = 1, \dots, 9.$$

Тогда

$$J(N; H) = \frac{B_3 \mathfrak{S}(N) H^8}{\sqrt[3]{N^2}} + O\left(\frac{H^8}{\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}^8} \right), \quad B_3 = \frac{259\,723 \sqrt[3]{3}}{2\,240}, \quad \mathfrak{S}(N) \geq c_1 > 0.$$

ТЕОРЕМА 4 (З. Х. Рахмонов, А. З. Азамов, 2011). Пусть $J(N; H)$ — число представлений N суммой 17 биквадратов натуральных чисел x_j с условиями

$$\left| x_j - \left(\frac{N}{17} \right)^{\frac{1}{4}} \right| \leq N^{\frac{1}{4} - \frac{1}{108} + \varepsilon}, \quad j = 1, \dots, 17.$$

Тогда

$$J(N; H) = \frac{B_4 \mathfrak{S}(N) H^{16}}{\sqrt[4]{N^3}} + O\left(\frac{H^{16}}{\sqrt[4]{N^3} \mathcal{L}^{16}} \right),$$

$$B_4 = \frac{455\,518\,671\,766\,086\,477 \sqrt[4]{3}}{83\,691\,159\,552\,000} \approx 45568.35, \quad \mathfrak{S}(N) \geq c_2 > 0.$$

ТЕОРЕМА 5 (З. Х. Рахмонов, Н. Н. Назрубллоев, 2014). Пусть $J(N; H)$ — число представлений N суммой 33 пятых степеней натуральных чисел x_j с условиями

$$\left| x_j - \left(\frac{N}{33} \right)^{\frac{1}{5}} \right| \leq N^{\frac{1}{5} - \frac{1}{340} + \varepsilon}, \quad j = 1, \dots, 33.$$

Тогда

$$J(N; H) = \frac{B_5 \mathfrak{S}(N) H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}} + O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4} \mathcal{L}} \right),$$

$$B_5 = \frac{\sqrt[5]{33^4}}{5 \cdot 32!} \sum_{k=0}^{16} (-1)^k \binom{33}{k} (33 - 2k)^{32}, \quad \mathfrak{S}(N) \geq c_3 > 0.$$

⟷

П. З. РАХМОНОВ (МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия)

Обобщённая тернарная проблема Эстермана с почти равными слагаемыми¹¹



Парвиз Зарулюевич Рахмонов

В 1937 г. Т. Эстерман (T. Estermann) получил асимптотическую формулу для числа решений уравнения $p_1 + p_2 + n^2 = N$, где p_1, p_2 — простые числа, n — натуральное число. В связи с этим В. Н. Чубариков поставил следующую задачу. Рассмотрим уравнение Эстермана, в котором слагаемое n^2 заменено на $[n^c]$, где $c > 1$ — нецелое фиксированное число. Требуется исследовать его при более жёстких условиях на переменные, а именно в случае, когда слагаемые “почти равны”. Иными словами, требуется найти асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N$$

с дополнительными условиями

$$\left| p_j - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad \left| [n^c] - \frac{N}{3} \right| \leq H$$

при возможно меньшем $H = H(N)$. Эта задача называется обобщённой тернарной проблемой Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми.

¹¹Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: П. З. Рахмонов *Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми* (стр. 248 — 253).

Основным результатом докладчика является

ТЕОРЕМА. Пусть N достаточно велико, $\mathcal{L} = \ln N$, c - нецелое фиксированное число с условиями

$$c > \frac{4}{3} + \mathcal{L}^{-0.3}, \quad \|c\| \geq 3c(2^{[c]+1} - 1) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}.$$

Тогда при $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2$ для числа $I(N, H)$ решений указанного уравнения справедлива асимптотическая формула:

$$I(N, H) = \frac{18}{3^{\frac{1}{c}c}} \cdot \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}\right).$$

В основе доказательства этой теоремы лежат следующие утверждения о поведении ряда “коротких” тригонометрических сумм. Положим

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \exp(2\pi i \alpha [n^c]), \quad S(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \exp(2\pi i \alpha n).$$

Пусть, далее, $x \geq x_0$, $\mathcal{L}_x = \ln x$, $A > 1$ - произвольное фиксированное число, c - нецелое число с условиями

$$1.1 < c \leq (\ln \mathcal{L}_x - \ln(6A \ln \mathcal{L}_x)) / \ln 2, \quad \|c\| \geq (2^{[c]+1} - 1)(A + 1) \frac{\ln \mathcal{L}_x}{\mathcal{L}_x},$$

и пусть $y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}_x^A$. Тогда при $|\alpha| \leq x^{1-c} y^{-1} \mathcal{L}_x^A$ для $S_c(\alpha; x, y)$ справедлива асимптотическая формула вида

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \int_{x-y}^x \exp(2\pi i \alpha (t^c - 0.5)) dt + O(y \mathcal{L}_x^{-A} |\sin \pi \alpha|),$$

а при $x^{1-c} y^{-1} \mathcal{L}_x^A < |\alpha| \leq 0.5$ - оценка

$$S_c(\alpha; x, y) \ll y \mathcal{L}_x^{-A}.$$

Наконец, если $y \geq x^{5/8} e^{(\ln x)^{0.67}}$, $|\alpha| \leq xy^{-2}$, то для суммы $S(\alpha; x, y)$ справедливо следующее равенство:

$$S(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi \alpha y}{\pi \alpha} \exp(2\pi i \alpha (x - 0.5y)) + O(y e^{-(\ln \ln x)^4}).$$

$\Longleftrightarrow$

Г. В. ФЁДОРОВ (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Институт системных исследований (ВНИИСИ) РАН, г. Москва, Россия)

О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним арифметическим неравенством



Глеб Владимирович Фёдоров

Пусть $p(n)$ — общее количество разбиений числа n на слагаемые, являющиеся натуральными числами, и пусть $p_k(n)$ — количество таких разбиений n на k слагаемых.

В 1942 году Ф. К. Аурук, С. Човла и Х. Гупта (F. C. Auluck, S. Chowla, H. Gupta) сформулировали ряд гипотез о значении параметра $k = k(n)$, при котором функция $p_k(n)$ принимает асимптотически наибольшее значение при $n \rightarrow +\infty$, а также о промежутках монотонности функции $p_k(n)$ по параметру k .

В 1941 г. П. Эрдеши и Дж. Ленер (J. Lehner) доказали, что “нормальное” число слагаемых k для разбиений числа n при $n \rightarrow \infty$ асимптотически равно $c^{-1}\sqrt{n} \ln n$, где $c = \pi\sqrt{2/3}$. Более точно, они доказали, что при $k = c^{-1}\sqrt{n} \ln n + x\sqrt{n}$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{p(n)} = \exp\left(-\frac{2}{c} e^{-\frac{cx}{2}}\right), \quad \text{где} \quad P_k(n) = \sum_{m=1}^k p_m(n),$$

причём правая часть последнего равенства представляет собой функцию распределения вероятностей.

В 1946 г. Эрдеши нашёл, что максимальное значение $p_k(n)$ достигается при

$$k = k_{\text{cr}} = c^{-1} \sqrt{n} (\ln n) + a\sqrt{n} + o(\sqrt{n}), \quad \text{где} \quad a = \frac{2}{c} \ln \frac{c}{2}.$$

Точки максимума функции $p_k(n)$ представляют интерес для критических состояний в модели бозе-конденсата В. П. Маслова. Если параметр k отвечает числу частиц бозе-газа, а n (с точностью до некоторого множителя) — его

энергии, то

$$\sum_{i \geq 0} k_i = k, \quad \sum_{i \geq 0} i k_i = n,$$

где k_i — количество частиц на i -ом уровне энергии. Требуется определить, при каком значении k число решений системы, интерпретируемое в задаче с бозе-конденсатом в терминах энтропии Хартли (R. V. L. Hartley), будет максимальной, или, что то же, найти наиболее вероятное распределение частиц при заданной энергии. Ответом на вопрос будет в данном случае значение $k = k_{\text{cr}}(n)$.

В. П. Маслов и В. Е. Назайкинский рассмотрели задачу о распределении тождественных частиц по целочисленным уровням энергии при условии ограниченности сверху суммарной энергии n .

При этом предполагалось, что числа заполнения (числа частиц на уровнях энергии) могут принимать либо произвольные целые неотрицательные значения (“бозе-частицы”), либо значения из конечного множества $0, 1, 2, \dots, R$ (так называемые парастатистики). Например, в последнем случае при $R = 1$ говорят, что частицы подчиняются статистике Ферми–Дирака.

Именно, пусть $d > 1$ — целое число (размерность системы). Каждой точке целочисленной решётки $\mathbb{Z}_+^d$ сопоставляется целое число $N_{i_1 \dots i_d}$ из множества $\{0, 1, \dots, R_i\}$, где $i = i_1 + \dots + i_d$. Для заданного положительного M рассматриваются всевозможные наборы $\{N_{i_1 \dots i_d}\}$, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{i_1, \dots, i_d} (i_1 + \dots + i_d) N_{i_1 \dots i_d} \leq M.$$

В предположении, что все эти наборы являются равновероятными, В. П. Маслов и В. Е. Назайкинский вычислили значение $\mathcal{N} = \mathcal{N}(M)$, вблизи которого “концентрируется” большинство значений суммы

$$\sum_{i_1, \dots, i_d} N_{i_1 \dots i_d},$$

а также нашли асимптотическую формулу для энтропии $S = \ln \mathcal{N}(M)$ при $M \rightarrow +\infty$.

Автором доклада было рассмотрено следующее обобщение этой задачи.

Пусть G — свободный моноид с образующими $\omega_1, \dots, \omega_t$. Всякому целочисленному вектору $\bar{\nu} \in \mathbb{Z}_+^{kt}$ вида

$$\bar{\nu} = ((\nu_{1,1}, \dots, \nu_{t,1}), \dots, (\nu_{1,k}, \dots, \nu_{t,k}))$$

сопоставляется целое число $n = n_{\theta_1 \dots \theta_k}$ с условием $0 \leq n \leq R_\beta$, где

$$\beta = \theta_1 \dots \theta_k, \quad \theta_j = \omega_1^{\nu_{1,j}} \dots \omega_t^{\nu_{t,j}}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Далее, пусть

$$n_\beta = \sum_{\beta = \theta_1 \dots \theta_k} n_{\theta_1 \dots \theta_k},$$

и пусть $\Omega(\beta)$ — аналог арифметической функции $\Omega(m)$, равной числу простых делителей m , взятых с учётом кратности. Для некоторого целого $Q \geq 1$ положим

$$N_Q = \sum_{\Omega(\beta) \leq Q} n_\beta.$$

Пусть $\mathcal{N}(M, Q)$ — количество всевозможных наборов $\{n_{\theta_1 \dots \theta_k}\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\Omega(\beta) \leq Q} \Omega(\beta) n_\beta \leq M.$$

Наконец, для чисел N и Δ определим количество $\mathcal{N}(M, Q, N, \Delta)$ наборов $\{n_{\theta_1 \dots \theta_k}\}$ таких, что

$$|N_Q - N| > \Delta, \quad \sum_{\Omega(\beta) \leq Q} \Omega(\beta) n_\beta \leq M.$$

Задача состоит в том, чтобы при различных условиях на число Q (например, $Q = Q(M) \rightarrow +\infty$ при $M \rightarrow +\infty$) определить число $N = N(M; Q)$ (если оно существует), для которого найдётся $\Delta = \Delta(M, Q, N) = o(N)$ такое, что при $M \rightarrow +\infty$ вероятность

$$\mathbf{P}(M, Q, N, \Delta) = \frac{\mathcal{N}(M, Q, N, \Delta)}{\mathcal{N}(M, Q)}$$

стремится к нулю. (Задача, рассмотренная В. П. Масловым и В. Е. Назайкинским, оказывается частным случаем, отвечающим $t = 1$ и $Q = M$).

Пусть $R_\beta = +\infty$ при $\Omega(\beta) \leq Q$, и пусть по заданному M числа b и N определяются равенствами

$$M = \sum_{\Omega(\beta) \leq Q} \frac{\Omega(\beta) \tau_k(\beta)}{e^{b\Omega(\beta)} - 1}, \quad N = \sum_{\Omega(\beta) \leq Q} \frac{\tau_k(\beta)}{e^{b\Omega(\beta)} - 1},$$

где $\tau_k(\beta)$ — очевидное обобщение арифметической функции делителей. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Для любых фиксированных чисел $h > 0$ и $0 < \varepsilon < 0.5$ существует постоянная $c_h(\varepsilon) > 0$ такая, что*

$$\mathbf{P}(M, Q, N, \Delta) \leq \frac{c_h(\varepsilon)}{N^h}$$

при $\Delta = O(N^{0.5+\varepsilon})$.

Допустим теперь, что на величину N_Q наложено условие $N_Q = L$, причём $N = o(L)$, $L < M$. Тогда для подавляющего большинства вариантов имеет место скопление “аномально” большого числа частиц на самом нижнем уровне

энергии, в то время как числа частиц на остальных уровнях близки к распределению бозе-газа. В этом случае говорят, что для данной модели имеет место явление, известное как бозе-конденсат. Для асимптотического значения энтропии верна

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S = \ln \mathcal{N}(M, Q)$, и пусть $R_\beta \leq +\infty$ при $\Omega(\beta) \leq Q$. Тогда справедлива следующая асимптотическая формула:

$$S = bM + \sum_{\omega(\beta) \leq Q} \tau_k(\beta) \ln \frac{1 - e^{-b\Omega(\beta)(R_\beta+1)}}{1 - e^{-b\Omega(\beta)}} + O(\ln b).$$

Доказательства обеих теорем опираются на тождество

$$\sum_{\Omega(\beta)=Q} \tau_k(\beta) = \binom{Q+kt-1}{kt-1}.$$

В частном случае, когда $R_\beta = +\infty$ для всех β , а параметры k , t и Q удовлетворяют условию

$$\binom{Q+kt}{kt} = o\left(\frac{M}{Q}\right),$$

уравнение на параметр b принимает вид

$$M = \sum_{m \leq Q} \frac{m}{e^{bm} - 1} \binom{m+kt-1}{kt-1} = \frac{1}{b} \binom{Q+kt}{kt} (1 + O(bQ)).$$

Следовательно,

$$b = \frac{1}{M} \binom{Q+kt}{kt} \left(1 + O\left(\frac{Q}{M} \binom{Q+kt}{kt}\right)\right) = o\left(\frac{1}{Q}\right),$$

$$S = \binom{Q+kt}{kt} \left(\ln M - \ln \binom{Q+kt}{kt} + O(\ln Q)\right).$$

$\Longleftrightarrow$

В. Г. ЧИРСКИЙ (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский педагогический государственный университет, г. Москва, Россия)

Полиадические числа их приложения¹²

¹²Затронутые в докладе вопросы подробно освещены в опубликованной в настоящем номере журнала статье: В. Г. Чирский *Арифметические свойства целых полиадических чисел* (стр. 254 – 264).



Владимир Григорьевич Чирский

Элементы $\mathfrak{a}$ кольца $\mathfrak{G}$ полиадических чисел допускают каноническое представление вида

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!, \quad \text{где } a_n = 0, 1, \dots, n.$$

Полиадические числа были введены, по-видимому, немецким алгебраистом Х. Прюфером (Е. Р. Н. Prüfer) в связи с его исследованиями по теории групп. Различным аспектам теории полиадических чисел (как арифметическим, так и топологическим) посвящены работы В. Я. Куликова, А. Г. Постникова, Е. В. Новосёлова, А. А. Фомина и его школы.

Первая часть доклада была посвящена связи полиадических чисел с чисто практической задачей представления (записи) натуральных чисел возможно более экономным способом.

Известно, например, что наряду с g -ичной записью числа $N \in \mathbb{N}$ вида

$$N = \sum_{n=1}^r a_n g^n, \quad 0 \leq a_n \leq g-1,$$

рассматривается разложение чисел с использованием двух оснований, т.е. запись в виде суммы слагаемых вида $2^a 3^b$, где a, b — неотрицательные целые числа (так называемые разложение DBNS), а также разложение с помощью цепи с двойным основанием, то есть разложение

$$N = \sum_{i=1}^r s_i 2^{a_i} 3^{b_i}, \quad \text{где } s_i = \pm 1, \quad a_1 \geq \dots \geq a_r \geq 0, \quad b_1 \geq \dots \geq b_r \geq 0.$$

Докладчиком и Р. Ф. Шакировым (2013) было установлено, что длина r разложения DBNS не превосходит

$$\frac{c \log_2 N}{\log_2 \log_2 N},$$

где постоянная c приближённо равна 5.7. Оценок такого рода для разложения с помощью цепи с двойным основанием в настоящее время не получено.

Наряду с указанными, можно рассмотреть так называемое полиадическое (факториальное) разложение числа N вида

$$N = \sum_{n=0}^r a_n n!, \quad a_n = 0, 1, \dots, n.$$

Прямым следствием формулы Стирлинга оказывается следующая верхняя оценка длины r такого разложения (В. Г. Чирский, В. Ю. Матвеев, 2013):

$$r \leq (1 + o(1)) \frac{\ln N}{\ln \ln N}.$$

Численный эксперимент показывает, однако, что в среднем разложения с помощью двух оснований оказываются всё же короче полиадического разложения. Однако объём вычислений, связанных с отысканием такого разложения, в полиадическом случае оказывается существенно меньше.

Вторая часть доклада связана со следующей задачей, продиктованной необходимостью построения хороших датчиков псевдослучайных чисел. Предположим, что $\{a_n\}$ — периодическая последовательность натуральных чисел. Известно, что из неё можно получить непериодическую последовательность, рассмотрев последовательные цифры числа

$$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$$

(это можно доказать несколькими способами: как элементарно, так и с применением метода Зигеля–Шидловского)

Этот способ построения непериодической последовательности имеет существенное неудобство, связанное с необходимостью деления на очень большие числа. В связи с этим возникла идея рассматривать цифры чисел вида

$$\sum_{n=0}^r a_n n!, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Численный эксперимент показывает, что массивы цифр, образуемые таким образом, при достаточно большом r успешно проходят многие тесты “на случайность”.

Естественным образом возникает вопрос: в каком случае числа такого вида порождают в заданном поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ непериодические последовательности? В такой постановке эта задача оказывается весьма сложной. Иллюстрацией тому служит, например, известная гипотеза Д. Курепы (D. Kurepa, 1971), согласно которой сумма $0! + 1! + 2! + \dots + (p-1)!$ не делится на p ни для какого простого p , или, что то же,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} n! \right|_p = 1$$

(здесь $|\cdot|_p$ - норма в $\mathbb{Q}_p$).

Известно, что

$$|n!|_p = p^{-\delta_n}, \quad \delta_n = \frac{n - s_n}{p-1},$$

где s_n — сумма цифр в p -ичном разложении n . Поэтому $|a_n n!|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Последнее означает, что ряды

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$$

сходятся в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Поэтому всякому полиадическому числу $\mathbf{a}$ можно поставить в соответствие бесконечномерный вектор $\mathbf{a} = (a_2, a_3, a_5, \dots, a_p, \dots)$, компонента a_p которого равна сумме ряда, представляющего $\mathbf{a}$, в $\mathbb{Q}_p$.

На множестве таких векторов вводится покомпонентное сложение и умножение. В частности, если $P(x)$ — полином с целыми коэффициентами, то $P(\mathbf{a})$ определяется как вектор с компонентами $P(a_p)$.

Число $\mathbf{a}$ естественно назвать трансцендентным, если для всякого ненулевого многочлена P вектор $P(\mathbf{a})$ имеет хотя бы одну ненулевую компоненту или, что то же, $P(a_p) \neq 0$ по крайней мере для одного простого числа p .

Наряду с понятием трансцендентности вводятся ещё два понятия: бесконечной и глобальной трансцендентности. Первое означает, что для всякого ненулевого многочлена P имеется бесконечно много простых p с условием $P(a_p) \neq 0$. Наконец, полиадическое число $\mathbf{a}$ называется глобально трансцендентным, если $P(a_p) \neq 0$ для любого ненулевого P и для всякого простого числа p .

По аналогии с лиувиллиевыми числами, можно привести примеры глобально алгебраически независимых и трансцендентных чисел. Но значительно больший интерес представляло бы доказательство глобальной трансцендентности полиадических чисел, представляющих собой некоторые аналоги классических постоянных, например, так называемые “числа Эйлера” ϵ (см. ниже). В настоящее время к решению такого рода задач не видно подходов.

Однако найденная автором доклада модификация метода Зигеля–Шидловского позволяет доказывать бесконечную трансцендентность некоторых чисел. Одним из полученных в этом направлении результатов является следующий.

ТЕОРЕМА. Пусть a_n — периодическая последовательность неотрицательных целых чисел. Тогда полиадическое число вида

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$$

является бесконечно трансцендентным. В частности, бесконечно трансцендентным является так называемое “число Эйлера”

$$\mathfrak{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} n!.$$

$\Longleftrightarrow$

В. Н. ЧУБАРИКОВ (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия)

О показателях сходимости многомерных аддитивных проблем



Владимир Николаевич Чубариков

Настоящий доклад посвящён свойствам особого интеграла и особого ряда многомерной аддитивной проблемы. Эти величины представляют собой средние значения степени модуля тригонометрического интеграла и полной рациональной тригонометрической суммы.

В 1978 г. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба и автор доклада доказали следующие теоремы о показателе сходимости среднего значения модуля однократного тригонометрического интеграла.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число. Тогда интеграл $\theta = \theta(k; n)$ вида

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)} dx \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_1$$

сходится при $2k > 0.5n(n+1) + 1$ и расходится при $2k \leq 0.5n(n+1) + 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n > \dots > m \geq 1$ – натуральные числа, $m + \dots + n < 0.5n(n+1) + 1$. Тогда интеграл $\theta' = \theta'(k; n)$ вида

$$\theta' = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_m x^m)} dx \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_m$$

сходится при $2k > m + \dots + n$ и расходится при $2k \leq m + \dots + n$.

Доказательство этих утверждений основано на следующей оценке.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq 1$ – натуральное число, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – вещественные числа, $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x$,

$$H = H(f) = \min_{a \leq x \leq b} \left\{ \sum_{s=1}^n \left| \frac{1}{s!} f^{(s)}(x) \right|^{1/s} \right\}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)} dx \right| \leq \min \{b - a, 6en^3 H^{-1}\}.$$

В 1952 г. Хуа Ло-кен (Hua Luogeng) нашёл показатель сходимости среднего значения полных рациональных тригонометрических сумм (особого ряда в проблеме Терри). Пусть $n \geq 3$,

$$f(x) = \frac{a_1}{q_1} x + \dots + \frac{a_n}{q_n} x^n, \quad (a_1, q_1) = \dots = (a_n, q_n) = 1, \quad q = q_1 \dots q_n.$$

Тогда полная рациональная тригонометрическая сумма $S = S(q; f)$ имеет вид

$$S = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i f(x)}.$$

Особым рядом $\sigma = \sigma(k; n)$ в проблеме Терри называется выражение

$$\sigma = \sum_{q_n=1}^{+\infty} \dots \sum_{q_1=1}^{+\infty} \sum_{a_n=0}^{q_n-1} \dots \sum_{a_1=0}^{q_1-1} \left| \frac{S(q; f)}{q} \right|^{2k},$$

где штрих в знаке суммирования означает, что a_s пробегает приведённую систему вычетов по модулю q_s ($s = n, \dots, 1$). Имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Особый ряд $\sigma = \sigma(k; n)$ сходится при $2k > 0.5n(n+1) + 2$ и расходится при $2k \leq 0.5n(n+1) + 2$.*

В 1981 г. автор доклада доказал для случая “выщербленного” многочлена

$$f(x) = \frac{a_m}{q_m} x^m + \dots + \frac{a_n}{q_n} x^n,$$

где $n \geq 3$, $1 \leq m < \dots < n$ и $m + \dots + n < 0.5n(n+1) + 1$,

что особый ряд $\sigma' = \sigma'(k; n)$ вида

$$\sigma' = \sum_{q_n=1}^{+\infty} \dots \sum_{q_1=1}^{+\infty} \sum'_{a_n=0}^{q_n-1} \dots \sum'_{a_1=0}^{q_1-1} \left| \frac{S(q; f)}{q} \right|^{2k}$$

сходится при $2k > m + \dots + n + 1$ и расходится при $2k \leq m + \dots + n + 1$.

В основе доказательства этих утверждений лежит следующая теорема Хуа Ло-кена.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $g(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, a – корень $g(x)$ по простому модулю p кратности m , и пусть u – наибольшая степень p , делящая все коэффициенты многочлена $h(x) = g(px + a)$. Тогда число корней многочлена $p^{-u}h(x)$ по модулю p (с учётом кратности) не превосходит m .*

Значительный интерес представляют обобщения перечисленных задач на многомерный случай. Так, при выводе асимптотической формулы для количества решений диофантовой системы уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n,$$

где $n \geq 2, k, r \geq 1$ – натуральные числа, $P \rightarrow +\infty$ – вещественный параметр, а каждое неизвестное $x_{i,j}$ принимает все целые значения от 1 до P , возникает задача об оценке показателя сходимости особого ряда $\sigma = \sigma(k; n, r)$. В этом случае особый ряд σ имеет вид

$$\sigma = \sum_{q(n, \dots, n)=1}^{+\infty} \dots \sum_{q(0, \dots, 1)=1}^{+\infty} \sum'_{a(n, \dots, n)=1}^{q(n, \dots, n)} \dots \sum'_{a(0, \dots, 1)=1}^{q(0, \dots, 1)} 1 \times \\ \times \left| \frac{1}{q^r} \sum_{x_1=1}^q \dots \sum_{x_r=1}^q \exp \{ 2\pi i F(x_1, \dots, x_r) \} \right|^{2k},$$

где

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^n \dots \sum_{t_r=0}^n \frac{a(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}$$

— многочлен с рациональными коэффициентами, штрих в знаках суммирования означает, что $(a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)) = 1$, и, кроме того,

$$q = \prod_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} q(t_1, \dots, t_r), \quad q(0, \dots, 0) = 1, \quad a(0, \dots, 0) = 0.$$

Показателем сходимости $\lambda = \lambda(n, r)$ особого ряда σ называется точная нижняя грань значений величины $2k$, при которых σ сходится.

Пусть $n \geq 2, r \geq 1, Q \geq 1$ — натуральные числа,

$$G(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^n \dots \sum_{t_r=0}^n b(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}$$

— многочлен с целыми коэффициентами, в совокупности взаимно простыми с Q , и пусть

$$S(Q) = S(Q; G) = \sum_{x_1=0}^Q \dots \sum_{x_r=0}^Q \exp \left\{ 2\pi i \frac{G(x_1, \dots, x_r)}{Q} \right\}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|S(Q; G)| \leq e^{7nr} 3^{rv(Q)} (\tau(Q))^{r-1} Q^{r-1/n}.$$

Пользуясь этой оценкой, автор доклада установил, что особый ряд сходится при $2k > nm$, где $m = (n+1)^r$, и расходится при

$$2kr \leq rT + 1, \quad T = \sum_{t_1=0}^n \dots \sum_{t_r=0}^n \min(t_1, \dots, t_r) = \sum_{l=1}^n l^r.$$

Для суммы минимумов T докладчиком найдено явное выражение вида

$$T = \frac{1}{r+1} \sum_{s=1}^{r+1} \binom{r+1}{s} B_{r+1-s} (n+1)^s,$$

где B_l — числа Бернулли, следствием которого оказывается асимптотическое равенство

$$T \sim \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, для величины λ получаются двусторонние оценки вида

$$n(n+1)^r > \lambda > T \sim \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1}.$$

Другим многомерным аналогом упомянутых в начале доклада задач является проблема отыскания показателя сходимости особого многомерного интеграла.

Пусть $n \geq 2$, $r \geq 2$, и пусть

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^n \dots \sum_{t_r=0}^n \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}, \quad \alpha(0, \dots, 0) = 0,$$

— многочлен от r переменных с вещественными коэффициентами. Пусть, далее, $\bar{\alpha} = \{\alpha(t_1, \dots, t_r) \mid (t_1, \dots, t_r) \neq (0, \dots, 0)\} \in \mathbb{R}^{m-1}$, $m = (n+1)^r$ — упорядоченный набор коэффициентов F , и пусть

$$I_r(\bar{\alpha}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i F(x_1, \dots, x_r)} dx_1 \dots dx_r.$$

Показателем сходимости $\Lambda = \Lambda(n, r)$ особого интеграла

$$\theta = \theta(n, r; k) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |I_r(\bar{\alpha})|^{2k} d\bar{\alpha}$$

называется точная нижняя грань значений $2k$, для которых θ сходится.

Пользуясь оценкой

$$|I_r(\bar{\alpha})| \leq \min \{1, 32^r \alpha^{-1/n} \ln^{r-1}(\alpha + 2)\},$$

в которой α — максимум модулей коэффициентов многочлена F , докладчик доказал, что $\Lambda < nm = n(n+1)^r$. Кроме того, автор доклада показал, что для величины Λ имеет место нижняя оценка, аналогичная нижней оценке показателя сходимости λ особого ряда, а именно:

$$\Lambda > T \sim \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1}.$$

В заключение докладчик особо подчеркнул, что трудности при оценках показателей сходимости особых интегралов в многомерных аддитивных проблемах связаны, помимо прочего, с тем, что в настоящее время не известно какого-либо многомерного аналога упомянутой выше теоремы 3.

$\Longleftrightarrow$

И.Д. ШКРЕДОВ (*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва, Россия*)

Теория сумм произведений множеств и тригонометрические суммы



Илья Дмитриевич Шкредов

Доклад посвящён феномену “сумм произведений” из аддитивной комбинаторики, а также его приложениям к задачам теории чисел.

Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо с операциями сложения $(+)$ и умножения $(*)$, A — конечное подмножество элементов $\mathcal{R}$. Образует множества

$$A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\} \quad \text{и} \quad A * A = \{a_1 * a_2 : a_1, a_2 \in A\}.$$

Спрашивается, насколько мощности $|A + A|$, $|A * A|$ больше мощности $|A|$ множества A ?

Если $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, A — арифметическая прогрессия, то от сложения мощность вырастет лишь в 2 раза. Аналогично, если A — геометрическая прогрессия, то умножение также увеличит мощность в 2 раза. Существует ли такое множество A , которое не слишком увеличивается как от сложения, так и от умножения?

Феномен сумм произведений состоит, грубо говоря, в том, что такое возможно лишь в исключительном случае: если предположить, что

$$\max\{|A + A|, |A * A|\} \ll |A|^{1+\varepsilon}$$

для сколь угодно малого фиксированного ε , то множество A имеет “большое” пересечение с некоторым подкольцом в $\mathcal{R}$ (очевидно, подкольца от операций сложения и умножения “не вырастают”). Это естественное алгебраическое препятствие оказывается единственным.

В первой части доклада автор дал краткий обзор результатов для случая $\mathcal{R} = \mathbb{R}$. Хотя первые оценки здесь были получены К. Фордом (K. Ford) и

М. Б. Натансоном (M. B. Nathanson), подход, дающий “правильное понимание” такого рода задач, был предложен Г. Элекешем (G. Elekes, 1997). Он доказал, что от “удвоения”, множество A вырастает очень сильно:

$$\max\{|A + A|, |A * A|\} \gg |A|^{5/4}$$

(эта оценка верна безо всяких оговорок, поскольку любое подкольцо в $\mathbb{R}$ является бесконечным, а A — конечное множество) Главное, Элекеш увидел, что эта задача на самом деле — геометрическая. Геометрический подход в дальнейшем разрабатывался многими авторами и сейчас наилучший результат здесь принадлежит Дж. Шоймоши (J. Solymosi, 2008): показатель $\frac{5}{4}$ он заменил на $\frac{4}{3} - \varepsilon$.

Существует гипотеза, принадлежащая П. Эрдешу и Е. Семереди (E. Szemerédi), согласно которой

$$\max\{|A + A|, |A * A|\} \gg |A|^{2-\varepsilon}$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Это неравенство очень близко к наилучшему возможному, поскольку очевидно, что этот максимум не превосходит $|A|^2$.

В чём состоял геометрический подход Элекеша? Предположим, что имеется семейство прямых $\mathcal{L}$ на плоскости, причём любые две прямые семейства имеют ровно одну общую точку. Обозначим множество точек пересечения прямых из $\mathcal{L}$ через $\mathcal{P}$ и определим величину $I = I(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ как “число инцидентий”, т.е. число пар (p, l) , где $p \in \mathcal{P}$ — точка, $l \in \mathcal{L}$ — прямая, причём $p \in l$. Тривиальная оценка числа I имеет вид: $I \leq |\mathcal{P}| \cdot |\mathcal{L}|$. Однако замечательная теорема Семереди-Троттера (W.T. Trotter) утверждает, что на самом деле верна гораздо более точная оценка

$$I \ll (|\mathcal{P}| \cdot |\mathcal{L}|)^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{L}|.$$

Слагаемые $|\mathcal{P}|, |\mathcal{L}|$, как правило, малы по сравнению с первым членом, однако не могут быть опущены. Они отвечают “вырожденным” случаям: ситуации, когда, грубо говоря, все точки лежат на одной прямой, и двойственной ей ситуации, когда все прямые проходят через одну точку.

Имея конечное множество $A \subset \mathbb{R}$, Элекеш рассмотрел в качестве множества точек множество $\mathcal{P} = (A + A) \times (A * A)$, а в качестве множества прямых — семейство $\mathcal{L} = \{l_{a,b}\}$, где $l_{a,b}$ — прямая вида $\{(x, y) : y = a(x - b)\}$, $a, b \in A$. При фиксированных a и b такая прямая содержит все точки из $\mathcal{P}$ вида $(b + c, ac)$, где c пробегает всё множество A . Следовательно, $I \gg |A|^3$. С другой стороны, из теоремы Семереди-Троттера следуют оценки

$$|A|^3 \ll (|\mathcal{P}| \cdot |\mathcal{L}|)^{2/3} \ll |A + A|^{2/3} \cdot |A * A|^{2/3} \cdot |A|^{4/3},$$

откуда и получается приведённая выше оценка Элекеша.

Этот результат обобщался в различных направлениях. Так, Элекеш, Натансон и Ружа (I. Z. Rusza) доказали (1995 г.), что

$$\max\{|A + A|, |f(A) + f(A)|\} \gg |A|^{5/4},$$

где f — произвольная выпуклая (или вогнутая) функция. Эта теорема допускает небольшое уточнение:

ТЕОРЕМА 1 (L. Li, O. Roche-Newton, 2012; И. Д. Шкредов, 2014). *Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$*

$$\max\{|A + A|, |f(A) + f(A)|\} \gg |A|^{\frac{5}{4} + \frac{5}{396} - \varepsilon}.$$

Гипотеза Эрдеша–Семереди не доказана даже в том случае, когда известно, что множество $A * A$ не очень велико. Наилучшие в настоящее время оценки даются следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 2 (L. Li, O. Roche-Newton, 2012; И. Д. Шкредов, 2014). *Пусть $A \subset \mathbb{R}$, и пусть $|A * A| \leq M|A|$. Тогда*

$$|A + A| \gg_M |A|^{\frac{58}{37} - \varepsilon}, \quad |A - A| \gg_M |A|^{\frac{8}{5} - \varepsilon}.$$

Ещё одна важная характеристика множества A — аддитивная энергия $E_2(A)$. Она равна числу решений уравнения

$$a_1 - a'_1 = a_2 - a'_2$$

в числах $a_1, a'_1, a_2, a'_2 \in A$. Более общо, для двух множеств A и B аддитивную энергию $E_2(A, B)$ полагают равной числу решений уравнения

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2, \quad a_1, a_2 \in A, \quad b_1, b_2 \in B.$$

Аддитивная энергия связана с суммой (разностью) множеств неравенством Коши–Буняковского:

$$|A|^4 \leq E_2(A) |A \pm A|.$$

Если удаётся что-то сказать о величине $E_2(A)$, то это автоматически приводит к соответствующему результату для суммы (разности) множеств. Имеет место

ТЕОРЕМА 3 (И. Д. Шкредов, 2013). *Пусть $A \subset \mathbb{R}$, и пусть $|A * A| \leq M|A|$. Тогда*

$$E_2(A) \ll M^{\frac{14}{13}} |A|^{\frac{32}{13} + \varepsilon}.$$

А. Балог (A. Balog, 2011) принадлежит следующий вариант гипотезы Эрдеша–Семереи: для любого конечного множества $A \subset \mathbb{R}$ справедливы оценки

$$|A * (A + A)| \gg |A|^{2-\varepsilon}, \quad |A * A + A| \gg |A|^{2-\varepsilon}.$$

Применение теоремы Семереи–Троттера позволяет поставить в правой части величину $|A|^{3/2}$. Это результат в настоящее время удалось уточнить.

ТЕОРЕМА 4 (В. Murphy, О. Roche-Newton, И. Д. Шкредов, 2014). *Справедлива оценка*

$$|A * (A + A)| \gg |A|^{\frac{3}{2} + \frac{1}{178}}.$$

Подобного улучшения можно добиться и в двойственной задаче:

ТЕОРЕМА 5 (И. Д. Шкредов, 2015) *Справедлива оценка*

$$|A * A + A| \gg |A|^{\frac{3}{2} + c},$$

где $c > 0$ — некоторая положительная постоянная.

Здесь же получают и новые оценки для мощностей множеств $A * A + A * A$, $A : A + A : A$ и др.

Вторая часть доклада посвящена случаю, когда $\mathcal{R} = \mathbb{F}_p$. В конечном поле $\mathbb{F}_p$ нет нетривиальных подколец, и поэтому из рассмотрения необходимо заранее исключить случай, когда A “близко” к $\mathbb{F}_p$. Это обеспечивается следующим требованием: $|A| < p^{1-\varepsilon}$. Для таких множеств A уже имеет место феномен сумм произведений. Более точно, справедлива

ТЕОРЕМА 6. (J. Bourgain, N.H. Katz, Т. Tao, 2004; J. Bourgain, А. А. Глибчук, С. В. Конягин, 2006). *Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$\max\{|A + A|, |A * A|\} \gg_{\varepsilon} |A|^{1+\delta}.$$

Если мощность A достаточно велика, $|A| \gg p^{2/3}$, то

$$\max\{|A + A|, |A * A|\} \gg |A|^{1/2} p^{1/2},$$

причём эта оценка является точной (М. З. Гараев, 2007, 2008). Поэтому наибольший интерес представляют малые значения $|A|$. В случае, когда $|A| \leq \sqrt{p}$, имеются оценки максимума с явно вычисленными значениями δ : $\frac{1}{14}$ (М. З. Гараев), $\frac{1}{13}$ (Н. Кац, Ч.-И. Шен (C.-Y. Shen)), $\frac{1}{12}$ (Ж. Бургейн, М. З. Гараев). Наилучший до последнего времени результат принадлежал Рудневу (М. Rudnev, 2011): $\delta = \frac{1}{11} - \varepsilon$.

Аналог гипотезы Эрдеша–Семереди для конечного поля формулируется следующим образом: если $A \subset \mathbb{F}_p$, $|A| < \sqrt{p}$, то

$$\max\{|A + A|, |A * A|\} \gg |A|^{2-\varepsilon}.$$

Пусть $A, B \subset \mathbb{F}_p$. Аддитивная энергия множеств A и B может быть выражена через тригонометрические суммы:

$$E_2(A, B) = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p \left| \sum_{a \in A} e^{2\pi i \frac{ar}{p}} \right|^2 \left| \sum_{b \in B} e^{2\pi i \frac{br}{p}} \right|^2.$$

Вместе с тем, для “среднего значения” аддитивной энергии имеет место оценка, принадлежащая Ж. Бургейну, А. А. Глибичуку и С. В. Конягину (2006):

$$\sum_{b \in B} E_2(A, bA) \ll |A|^2 |B| p^{-\delta}.$$

Здесь $A, B \subset \mathbb{F}_p$ удовлетворяют условию $|A|, |B| \ll p^{1-\varepsilon}$, а $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ — некоторая положительная постоянная.

Поэтому естественно ожидать, что оценки такого рода позволят получить и оценки для тригонометрических сумм. Это удалось сделать Ж. Бургейну, С. В. Конягину и А. А. Глибичуку (2006). В частности, им удалось показать, что в случае, когда Γ — мультипликативная подгруппа $\mathbb{F}_p$ с условием $|\Gamma| \gg p^\varepsilon$, то тригонометрическая сумма по этой подгруппе оценивается уже со степенным понижением:

$$\sum_{a \in \Gamma} e^{2\pi i \frac{a\xi}{p}} \ll |\Gamma| p^{-\delta}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0.$$

Ранее аналитическими методами подобные оценки удавалось получать лишь в случае, когда $|\Gamma| \gg p^{1/4+\varepsilon}$. Этот результат находит многочисленные приложения в криптографии, теоретической информатике, теории динамических систем и теории чисел.

Основные результаты автора доклада основаны на следующей теореме:

ТЕОРЕМА 7 (М. Rudnev). Пусть P — множество точек (в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{F}_p$), Π — множество плоскостей. Пусть, далее, k_P — максимальное число точек P , лежащих на одной прямой, образованной пересечением каких-либо двух плоскостей из Π , k_Π — максимальное число плоскостей из Π , имеющих общую прямую. Тогда для числа $I = I(P, \Pi)$ инцидентий между точками и плоскостями справедлива следующая оценка:

$$I \ll (|P| \cdot |\Pi|)^{3/4} + k_P |\Pi| + k_\Pi |P|.$$

Вот несколько следствий этого результата.

ТЕОРЕМА 8 (О. Roche-Newton, М. Rudnev, И. Д. Шкредов, 2014). Если $A \subset \mathbb{F}_p$, $|A| < p^{5/8}$, то

$$\max\{|A + A|, |A * A|\} \gg |A|^{6/5}.$$

ТЕОРЕМА 9 (О. Roche-Newton, М. Rudnev, И. Д. Шкредов, 2014). Пусть g — первообразный корень по модулю p , $X, Y < p^{2/3}$. Тогда для любого a , $(a, p) = 1$, справедлива оценка

$$\sum_{x \leq X} \sum_{y \leq Y} \exp\left(2\pi i \frac{ag^{x+y}}{p}\right) \ll (XY)^{13/16} p^{1/8}.$$

ТЕОРЕМА 10 (О. Roche-Newton, М. Rudnev, И. Д. Шкредов, 2014). Пусть g — первообразный корень по модулю p , N — целое число. Тогда для любого a , $(a, p) = 1$, справедлива оценка

$$\sum_{n \leq N} \exp\left(2\pi i \frac{ag^n}{p}\right) \ll \min\{p^{1/8} N^{5/8}, p^{1/4} N^{3/8}\}.$$

Несложно проверить, что последняя оценка влечёт равномерное распределение величин ag^n , $1 \leq n \leq N$, по модулю p уже при $N \gg p^{1/3+\varepsilon}$. Это является усилением предыдущего результата С. В. Конягина и И. Е. Шпарлинского ($N \gg p^{1/2-c}$), $c \approx 0.0005$. Следует отметить, что классическими аналитическими методами аналогичное утверждение получалось лишь в случае $N \gg p^{1/2+\varepsilon}$.

$\Longleftrightarrow$

4. Заключение

На последней сессии второй “Конференции памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям” было предложено утвердить эту конференцию в качестве ежегодного зимнего мероприятия и, кроме того, образовать ежегодную летнюю конференцию по теории чисел, посвящённую юбилеям выдающихся российских теоретико-числовиков.

Участники конференции поддержали это предложение, реализация которого должна способствовать привлечению внимания как специалистов, так студентов и аспирантов к такой важнейшей области математики, как теория чисел. Усилению московской школы по аналитической теории чисел должна также способствовать работа давно и успешно функционирующего семинара учеников А. А. Карацубы профессоров В. Н. Чубарикова и С. А. Гриценко.

Школа аналитической теории чисел А. А. Карацубы, ведущая начало от таких классиков науки как К. Ф. Гаусс и К. Вейерштрасс, и имеющая предшественников в лице А. О. Гельфонда, Н. М. Коробова и патриарха отечественной

науки И. М. Виноградова, продолжает свою жизнь и развитие в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН и на Механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. В. Бударина, В. И. Берник, Х. О'Доннелл Как зависят дискриминанты целочисленных многочленов от взаимного расположения корней? // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 153 – 162.
2. О. А. Горкуша Совместное распределение примитивных целых точек в замкнутой области // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 163 – 175.
3. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176 – 190.
4. Д. В. Коледа Об асимптотике распределения алгебраических чисел при возрастании их высот // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 191 – 204.
5. А. Лауринчикас, Д. Корсакене, Д. Шяучюнас Совместная дискретная универсальность L -функций Дирихле II // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 205 – 218.
6. Р. Мацайтене Совместная универсальность L -функций класса Сельберга и дзета-функций Гурвица с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 219 – 231.
7. З. Х. Рахмонов, Н. Н. Назрублюев, А. О. Рахимов Короткие суммы Г. Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 232 – 247.
8. П. З. Рахмонов Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 248 – 253).
9. А. В. Устинов О распределении точек целочисленной решетки // Дальневосточный математический журнал. 2009. Т. 9, № 1–2. С. 176–181.
10. А. В. Устинов О числе решений сравнения $xy \equiv l(mod q)$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 5. С. 186–216.
11. В. Г. Чирский Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 254 – 264).

12. Boca F. P., Cobeli C., Zaharescu A. Distribution of lattice points visible from the origin // *Comm. Math. Phys.* 2000. Vol. 20. P. 433–470.
13. N. G. Moshchevitin On Minkowski diagonal continued fraction // *Anal. Probab. Methods Number Theory, Proceedings of the conference in Palanga, Sept. 2011, Anal. Probab. Methods Number Theory*, pp. 193–202 (2012). E. Manstavicius et al. (Eds), preprint is available at arXiv:1202.4622v2 (2012).

REFERENCES

1. Н. В. Бударина, В. И. Берник, Х. О’Доннелл Как зависят дискриминанты целочисленных многочленов от взаимного расположения корней? // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 153 – 162.
2. О. А. Горкуша Совместное распределение примитивных целых точек в замкнутой области // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 163 – 175.
3. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176 – 190.
4. Д. В. Коледа Об асимптотике распределения алгебраических чисел при возрастании их высот // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 191 – 204.
5. А. Лауринчикас, Д. Корсакене, Д. Шяучюнас Совместная дискретная универсальность L -функций Дирихле II // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 205 – 218.
6. Р. Мацайтене Совместная универсальность L -функций класса Сельберга и дзета-функций Гурвица с периодическими коэффициентами // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 219 – 231.
7. З. Х. Рахмонов, Н. Н. Назрублюев, А. О. Рахимов Короткие суммы Г. Вейля и их приложения // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 232 – 247.
8. П. З. Рахмонов Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 248 – 253).
9. Ustinov, A. 2009, "On the distribution of integer points.", *Far Eastern Mathematical Journal*, vol. 9, № 1–2, Khabarovsk, pp. 176–181.
10. Ustinov, A., 2009, "On the number of solutions of the congruence $xy = l(mod q)$.", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 20, no. 5, St. Petersburg, pp. 813–836.

11. В. Г. Чирский Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 254 — 264).
12. Boca, F. P., Cobeli, C. & Zaharescu, A. 2000, "Distribution of lattice points visible from the origin.", *Comm. Math. Phys.*, vol. 20, pp. 433–470.
13. Moshchevitin, N. G. 2012, "On Minkowski diagonal continued fraction", *Anal. Probab. Methods Number Theory, Proceedings of the conference in Palanga, Sept. 2011, Anal. Probab. Methods Number Theory, pp. 193–202 (2012). E. Manstavicius et al. (Eds), preprint is available at arXiv:1202.4622v2 (2012).*

Вычислительный центр РАН,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
Получено 21.02.2015 г.