

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК Том 18 Выпуск 3

УДК 539.4, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-72-87

### ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД<sup>1</sup>

А. А. Барях<sup>2</sup>, Н. А. Самоделкина<sup>3</sup>

#### Аннотация

Пластичное деформирование горных пород и формирование поля остаточных деформаций связано с образованием трещин сдвига и отрыва. Для условий объемного напряженного состояния предложен критерий прочности (пластичности), учитывающий совместное действие двух видов разрушения (сдвиг и отрыв) и базирующийся на ассоциированном законе течения. Построенные критериальные соотношения верифицированы при описании результатов механических испытаний горных пород. Получено приемлемое соответствие расчетных и экспериментальных разрушающих напряжений и деформаций. Разработанный алгоритм определения предельных напряжений, упругих и пластических деформации достаточно просто численно реализуется в трехмерных задачах математического моделирования процессов деформирования и разрушения крупномасштабных горнотехнических объектов.

*Ключевые слова:* критерий прочности (пластичности), горные породы, трехмерные задачи, пластические деформации, численное моделирование.

*Библиография:* 15 названий.

### ABOUT ONE CRITERIA OF STRENGTH OF ROCKS

А. А. Baryakh, N. A. Samodelkina

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №16-17-00101.

<sup>2</sup>Барях Александр Абрамович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, bar@mi-perm.ru

<sup>3</sup>Самоделкина Надежда Анатольевна, ведущий научный сотрудник Горного института УрО РАН, samolelkina@mi-perm.ru

### Abstract

Plastic deformation of rocks and generation of residual deformation field are related to shear and tensile cracks formation. For conditions of three-dimensional stress state a strength (yield) criterion is proposed that takes into consideration combined effect of two kinds of failure (shear and tensile failure) and is based on associated flow rule. The developed criteria relations were verified during description of results of rocks mechanical tests. Acceptable concordance between calculated and experimental values of breaking stresses and strains was obtained. Developed algorithm for critical stresses, elastic and plastic deformations determining is easy enough for numerical realization in three-dimensional problems of mathematical modelling of deformation and failure processes of large-scale mine technical objects.

*Keywords:* strength (yield) criterion, rocks, three-dimensional problems, plastic deformation, numerical simulation.

*Bibliography:* 15 titles.

## 1. Введение

Пластичный характер деформирования горных пород и формирование поля остаточных деформаций, как правило, связаны с образованием трещин сдвига и отрыва и последующим полным разрушением в виде дезинтеграции. В этой связи переход в режим пластичности для горных пород, зачастую, отождествляется с их предельным состоянием.

Существует множество подходов к описанию предельных состояний твердых деформируемых тел [1-4 и др.]. В практике механики горных пород наиболее часто рассматриваются хорошо опробованные критерии Мизеса, Кулона-Мора [5]. Их применение при математическом моделировании, в основном ограничивается условиями плоского деформированного состояния, поскольку для трехмерных задач реализация этих условий связана с определенными трудностями [6].

В данной работе рассмотрен критерий прочности (пластичности) для трехмерных задач, вид которого подобен критериям Боткина А.И. [7] и Миролюбова И.Н. [8]. Предложенный критерий не требует сложного параметрического обеспечения, легко программируется и обеспечивает достаточно простой алгоритм численной реализации при трехмерном математическом моделировании.

## 2. Критерий прочности

Процесс разрушения твердого тела в локальной области может быть связан с образованием трещин сдвига под действием касательных напряжений,

величина которых достаточно полно характеризуется интенсивностью напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 2}, \quad (1)$$

и трещин отрыва под действием нормальных напряжений, уровень которых определяется шаровым тензором

$$I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (2)$$

( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ).

Рассмотрим критерий прочности, учитывающий совместное действие двух видов разрушения (сдвиг и отрыв):

$$\sigma_i^2 + bI = c. \quad (3)$$

Параметры  $b$  и  $c$  определим на основании испытаний горных пород при простейших напряженных состояниях.

При одноосном сжатии:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{сж}$ .

При одноосном растяжении:  $\sigma_1 = \sigma_{раст}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ .

Подставляя последние выражения последовательно в (1)-(2), а затем в (3), получим систему уравнений относительно параметров  $b$  и  $c$ :

$$\begin{cases} \sigma_{сж}^2 - b\sigma_{сж} = A \\ \sigma_{раст}^2 + b\sigma_{раст} = A \end{cases},$$

решением которой являются следующие соотношения:

$$b = \sigma_{сж} - \sigma_{раст}, A = \sigma_{сж}\sigma_{раст}. \quad (4)$$

Подставляя выражения (4) в (3), получаем критерий прочности (пластичности) в следующем виде:

$$F = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_{сж}\sigma_{раст} \quad (5)$$

При  $F < 0$  напряженно-деформированное состояние соответствует упругой модели деформирования; при  $F > 0$  - пластической модели деформирования, при  $F = 0$  выражение (5) определяет поверхность предельных напряжений, представленную на рис.1

Предельная поверхность - параболоид вращения относительно оси  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ : внутренние точки соответствуют упругому состоянию. Здесь и далее растягивающие напряжения принимают положительные значения, сжимающие - отрицательные.

### 3. Сопоставление критериев прочности (пластичности)

Наиболее часто применяемым критерием прочности (пластичности) для горных пород является критерий прочности Кулона, согласно которому условием разрушения за счет образования трещин сдвига является выполнение

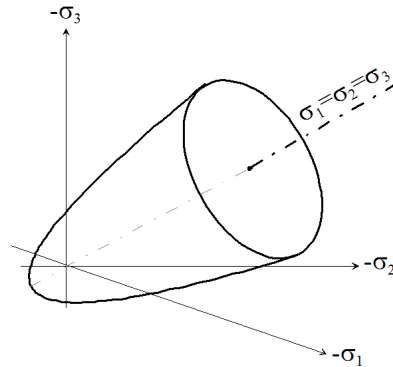


Рис. 1: Поверхность предельных напряжений

неравенства:

$$\tau_{\max} \geq \tau_{\text{пр}} = C + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi. \quad (6)$$

Касательное ( $\tau_{\max}$ ) и нормальное ( $\sigma_n$ ) напряжения определяются на площадках, где отношение  $\tau_{\max}/\tau_{\text{пр}}$  достигает максимального значения.

Критерий прочности, основанный на параболической огибающей кругов Мора [9], построенной по известным значениям их пределов прочности на растяжение ( $\sigma_{\text{раст}}$ ) и сжатие ( $\sigma_{\text{сж}}$ ), имеет следующий вид:

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{пр}}} = \frac{\tau_{\max}}{\sqrt{(\sigma_{\text{раст}} + \sigma_n)[2 \cdot \sigma_{\text{раст}} - 2\sqrt{\sigma_{\text{раст}}(\sigma_{\text{раст}} + \sigma_{\text{сж}}) + \sigma_{\text{сж}}]}} \geq 1 \quad (7)$$

В области растяжения предельное напряжение ограничивается пределом прочности на растяжение:

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{раст}}. \quad (8)$$

Критерии прочности (6) и (7) не учитывают среднюю компоненту главных напряжений -  $\sigma_2$ , а полностью определяются максимальным и минимальным напряжениями  $\sigma_1, \sigma_3$ :

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}; \sigma_n = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}. \quad (9)$$

Сопоставление предложенного критерия прочности (пластичности) (5) и критериев (6) и (7) проводили для условий плоского деформированного (ПДС) и плоского напряженного (ПНС) состояний.

Для ПДС  $\varepsilon_2 = 0$ , а следовательно из закона Гука  $\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$  ( $\nu$ -коэффициент Пуассона). Для ПНС  $\sigma_2 = 0$ , исключая таким образом из выражения (5)  $\sigma_2$ , получаем следующее представление критерия (5):

$$A\sigma_1^2 + B\sigma_1 + C = 0, \quad (10)$$

где для ПДС:  $A = 1 - \nu + \nu^2$ ;

$$B = \sigma_3(2\nu^2 - 2\nu - 1) + (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(1 + \nu);$$

$$C = \sigma_3^2(\nu^2 - \nu + 1) + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})(1 + \nu)\sigma_3 - \sigma_{сж}\sigma_{раст},$$

а для ПНС:  $A = 1$ ;

$$B = -\sigma_3 + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст});$$

$$C = \sigma_3^2 + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})\sigma_3 - \sigma_{сж}\sigma_{раст}.$$

Задаваясь последовательно значением  $\sigma_3$  и вычисляя из квадратного уравнения (10) величину  $\sigma_1$ , эти значения  $\sigma_1, \sigma_3$  будут определены в соответствии с критерием (5) предельное состояние.

Результаты сопоставления полученных оценок приведены на рис.2.

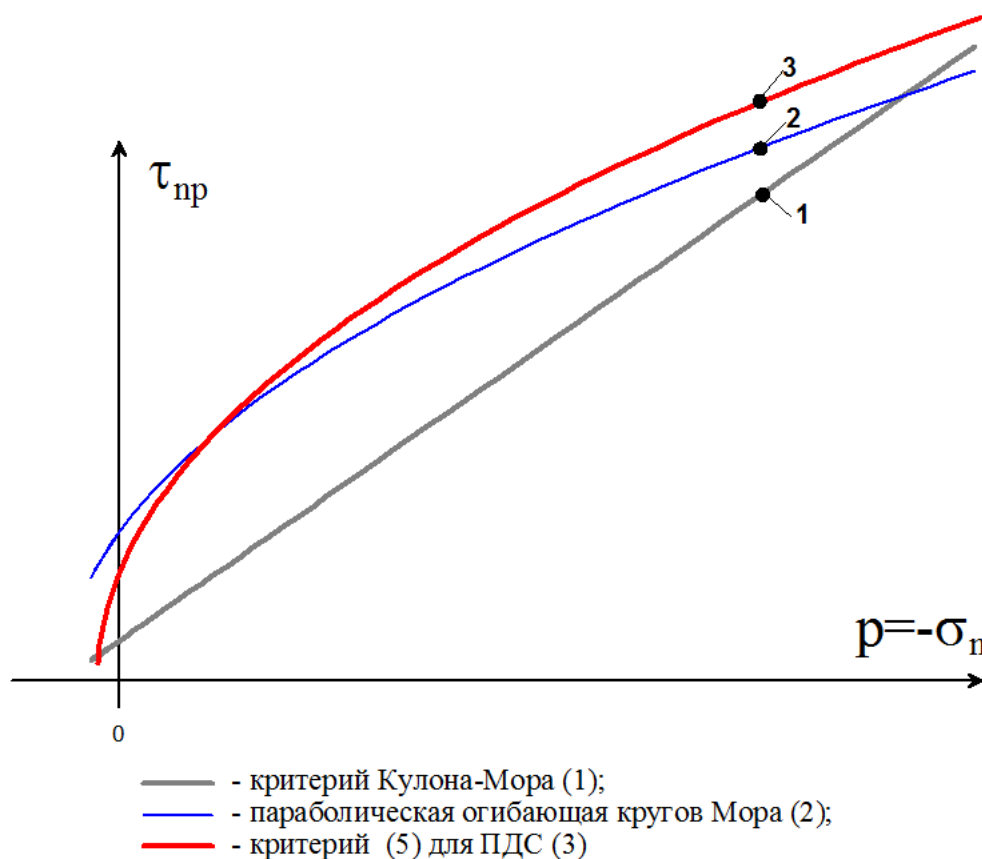


Рис. 2: Графики зависимостей предельных значений касательных напряжений от нормальных напряжений

Использование нелинейного критерия прочности (5), в отличие от линейного Кулоновского критерия, объясняет тот факт, что прочность с увеличением нормального напряжения не должна стремиться к бесконечности. Вместе с тем, во всем диапазоне изменения нормальных напряжений наблюдается приемлемое соответствие параболической огибающей (кривая 2), в целом соответствующей экспериментальным данным, и предложенного критерия прочности (кривая 3).

## 4. Определение пластических деформаций и предельных напряжений

Как уже отмечалось выше, если в локальной области критерий пластичности (5) принимает положительное значение ( $F > 0$ ), то упругая модель деформирования является не правомерной. В этом случае необходимо разделить деформации на упругую и пластическую составляющие  $\varepsilon = \varepsilon^{уп} + \varepsilon^{пл}$ .

Напряжения, соответствующие упругой составляющей деформации, определяют предельное напряжение, то есть соответствующая им точка находится на поверхности пластичности (рис.1).

Примем, что пластическое деформирование подчиняется ассоциированному закону течения, то есть компоненты пластических деформаций определяются соотношениями [10]:

$$\varepsilon_1^{пл} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_1}; \varepsilon_2^{пл} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_2}; \varepsilon_3^{пл} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}, \quad (11)$$

где  $F$ - аналитический критерий пластичности (5),  
 $\lambda$  - некоторый скалярный множитель;

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} &= 2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст}); \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} &= 2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст}); \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} &= 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст}). \end{aligned} \quad (12)$$

Напряжения, соответствующие пластическим деформациям, определяются как:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{пл} &= \lambda D_{11} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \lambda D_{12} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \lambda D_{13} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}, \\ \sigma_2^{пл} &= \lambda D_{21} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \lambda D_{22} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \lambda D_{23} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}, \\ \sigma_3^{пл} &= \lambda D_{31} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \lambda D_{32} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \lambda D_{33} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $D_{ij}$  - компоненты матрицы упругости. Считая геоматериал изотропным  $D_{11} = D_{22} = D_{33}$ ,  $D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32}$ , в дальнейших выкладках можно использовать только компоненты  $D_{11}$  и  $D_{12}$ .

Выразим с учетом (13) значения предельных напряжений, соответствующие упругим деформациям:

$$\sigma_1^{уп} = \sigma_1 - \sigma_1^{пл}, \sigma_2^{уп} = \sigma_2 - \sigma_2^{пл}, \sigma_3^{уп} = \sigma_3 - \sigma_3^{пл} \quad (14)$$

Подставив (14) в выражение (5) и учитывая, что точка, соответствующая  $\sigma_1^{уп}, \sigma_2^{уп}, \sigma_3^{уп}$ , располагается в пределах поверхности пластичности ( $F = 0$ ), получаем уравнение относительно неизвестного параметра  $\lambda$ :

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (15)$$

где  $A = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_1$ ,

$$B = -2s_1\sigma_1 - 2s_2\sigma_2 - 2s_3\sigma_3 + s_1(\sigma_2 + \sigma_3) + s_2(\sigma_3 + \sigma_1) + s_3(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})(s_1 + s_2 + s_3), \quad (16)$$

$$C = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_{сж}\sigma_{раст}.$$

Входящие в (16) выражения  $s_1, s_2, s_3$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} s_1 &= D_{11} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + D_{12} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \right), \\ s_2 &= D_{11} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + D_{12} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \right), \\ s_3 &= D_{11} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} + D_{12} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, используя последовательно соотношения (12), (17), (16) и (15) определяем параметр  $\lambda$ , а затем, используя выражение (11) находим пластические деформации и значения предельных напряжений по формулам (13)-(14).

#### 4.1. Определение пластических деформаций и предельных напряжений при $\sigma_1 > 0$ ( $\sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$ )

Если в локальной области аналитический критерий пластичности принимает положительное значение ( $F > 0$ ), а наибольшая компонента главных напряжений  $\sigma_1 > 0$ , то согласно экспериментальным исследованиям [2] разрушение происходит путем отрыва в направлении перпендикулярном  $\sigma_1$ , и соответственно

$$\sigma_1^{np} = 0, \quad (18)$$

кроме того в данной области необходимо принять  $\sigma_{раст} = 0$ .

Определение упругих деформаций и предельных напряжений следует проводить, используя соотношение (18):

$$\sigma_1^{np} = D_{11}\varepsilon_1^{ynp} + D_{12}(\varepsilon_2^{ynp} + \varepsilon_3^{ynp}) = 0,$$

из которого следует:

$$\varepsilon_1^{ynp} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}(\varepsilon_2^{ynp} + \varepsilon_3^{ynp}). \quad (19)$$

Упругие составляющие деформаций  $\varepsilon_2^{ynp}, \varepsilon_3^{ynp}$  находятся, как и в предыдущем разделе:

$$\varepsilon_2^{ynp} = \varepsilon_2 - \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_2}, \quad \varepsilon_3^{ynp} = \varepsilon_3 - \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}. \quad (20)$$

Подставив (20) в (19) получим:

$$\varepsilon_1^{\text{упр}} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}(\varepsilon_2 - \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \varepsilon_3 - \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}). \quad (20^*)'$$

На основании соотношений (20) и (20\*) определяем предельные (упругие) напряжения, которые удовлетворяют условию  $F = 0$ .

Проведя последовательную подстановку, получаем уравнение относительно неизвестного параметра  $\lambda$

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

где  $A = q_2^2 + q_3^2 - q_2q_3$ ;

$$B = -2k_2q_2 - 2k_3q_3 + k_2q_3 + k_3q_2 - (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(q_2 + q_3); \quad (21)$$

$$C = k_2^2 + k_3^2 - k_2k_3 + (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(k_2 + k_3) - \sigma_{\text{сж}}\sigma_{\text{раст}}.$$

Входящие в (21) выражения  $q_2, q_3$  и  $k_2, k_3$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_2 &= D_{11} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + D_{12} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \right); \\ q_3 &= D_{11} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} + D_{12} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \right); \end{aligned} \quad (22)$$

$$k_2 = D_{11}\varepsilon_2 + D_{12}\varepsilon_3 - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3); \quad k_3 = D_{11}\varepsilon_3 + D_{12}\varepsilon_2 - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Подставляя последовательно выражения (22), (21) в уравнение относительно параметра  $\lambda$ , затем используя формулы (20), (20\*) находим упругие и пластические деформации и значения предельных напряжений.

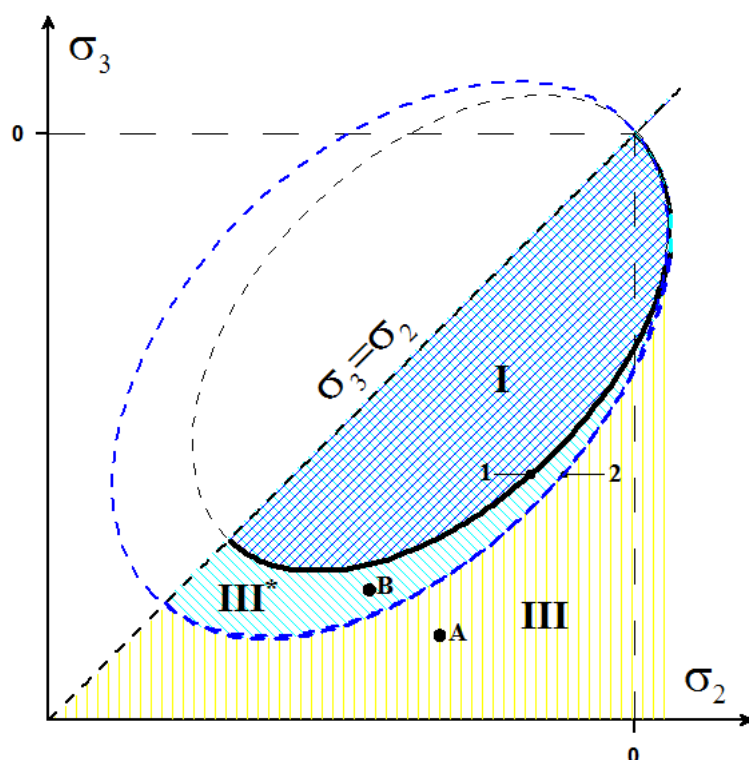
**Замечание:** при определении упругих и пластических деформаций, а также значений предельных напряжений может возникнуть следующая ситуация: критерий пластичности, определенный при  $\sigma_1 > 0$  принимает положительное значение ( $F|_{\sigma_1 > 0} > 0$ ), а задаваясь  $\sigma_1 = 0$ , получаем отрицательное значение критерия пластичности ( $F|_{\sigma_1 = 0} < 0$ ). Данная ситуация приведена на рис.3. На рисунке данная зона обозначена как III\*, точки, принадлежащие этой зоне (точка В), попадают в зону пластичности по отношению к  $F|_{\sigma_1 > 0} > 0$  и зону «упругости» по отношению  $F|_{\sigma_1 = 0} < 0$ .

Для зоны III\* определение упругих деформаций осуществляется по формулам (20) и (20\*) при  $\lambda = 0$ .

## 4.2. Определение пластических деформаций и предельных напряжений при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ ( $\sigma_3 < 0$ ).

Рассмотрим случай, когда критерий пластичности  $F > 0$  при двух положительных компонентах главных напряжений:  $\sigma_1 > 0$  и  $\sigma_2 > 0$ . Тогда





1 - кривая пересечения параболоида пластичности с плоскостью  $\sigma_1 > 0$   
 2 - кривая пересечения параболоида пластичности с плоскостью  $\sigma_1 = 0$

Рис. 3: Положение зон пластичности при положительном значении главного напряжения  $\sigma_1$

разрушение вследствие отрыва реализуется в направлениях перпендикулярных  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , и соответствующие предельные напряжения принимают нулевое значение:

$$\sigma_1^{np} = 0; \sigma_2^{np} = 0, \quad (23)$$

а значение предела прочности на растяжение  $\sigma_{раст} = 0$ .

Соотношение (23) означает, что рассматриваемая локальная область находится в одноосном напряженном состоянии и значение третьей компоненты главных напряжений не должны по модулю превосходить предела прочности на сжатие:

$$\sigma_3^{np} \geq -\sigma_{сж}.$$

В том случае, если  $\sigma_3 < -\sigma_{сж}$ ,

$$\sigma_3^{np} = -\sigma_{сж}, \quad (24)$$

данный вариант соответствует зоне IV на рис.4; а если  $0 > \sigma_3 > -\sigma_{сж}$ , то

$$\sigma_3^{np} = \sigma_3, \quad (25)$$

а этот вариант соответствует зоне V на рис.4.

Упругие деформации определяются из закона Гука по главным предельным напряжениям  $\sigma_1^{np}, \sigma_2^{np}, \sigma_3^{np}$ , а пластические деформации – как разность исходных и упругих деформаций.

### 4.3. Определение пластических деформаций и предельных напряжений при $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 > 0$ .

Если в локальной области аналитический критерий пластичности принимает положительное значение ( $F > 0$ ), а все три компоненты главных напряжений положительны, то это означает, что разрушение отрывом происходит в направлениях перпендикулярных  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Предельные напряжения в этих направлениях принимают нулевое значение:

$$\sigma_1^{np} = 0; \sigma_2^{np} = 0; \sigma_3^{np} = 0 \quad (26)$$

значение предела прочности на растяжение  $\sigma_{раст} = 0$ .

Данный вариант соответствует зоне VI на рис.4.

## 5. Алгоритм определения предельных напряжений, упругих и пластических деформаций

1. Задаваясь тремя главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , определяем значение аналитического критериального параметра  $F$  по формуле (5);

2. Если  $F < 0$ , то напряженное состояние рассматриваемой области является упругим. Деформации, соответствующие главным напряжениям также являются упругими. Данный вариант соответствует внутренней зоне параболоида пластичности – зоне I.

3. Если  $F > 0$ , а все три компоненты главных напряжений принимают отрицательное значение, то, используя последовательно соотношения (12), (17), (16) и (15) определяем параметр  $\lambda$ , а затем, используя выражение (11) находим пластические деформации и значения предельных напряжений по формулам (13)-(14). Данный вариант соответствует внешней зоне параболоида пластичности – зоне II (на рисунках не показана, соответствует внешней области предельной поверхности).

4. Если  $F > 0$ , а одна компонента главных напряжений положительна  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$ , то следует определить значение  $F^* = F|_{\sigma_1=0}$ .

Для случая  $F > 0$  и  $F^* > 0$ , подставляя последовательно выражения (22), (21) в уравнение (15) определяем значение параметра  $\lambda$ . Затем, используя формулы (20), (20\*), находим упругие деформации, по которым согласно закону Гука определяем предельные напряжения. Пластические деформации вычисляются, как разность исходных и упругих деформаций. Данный вариант соответствует III зоне.

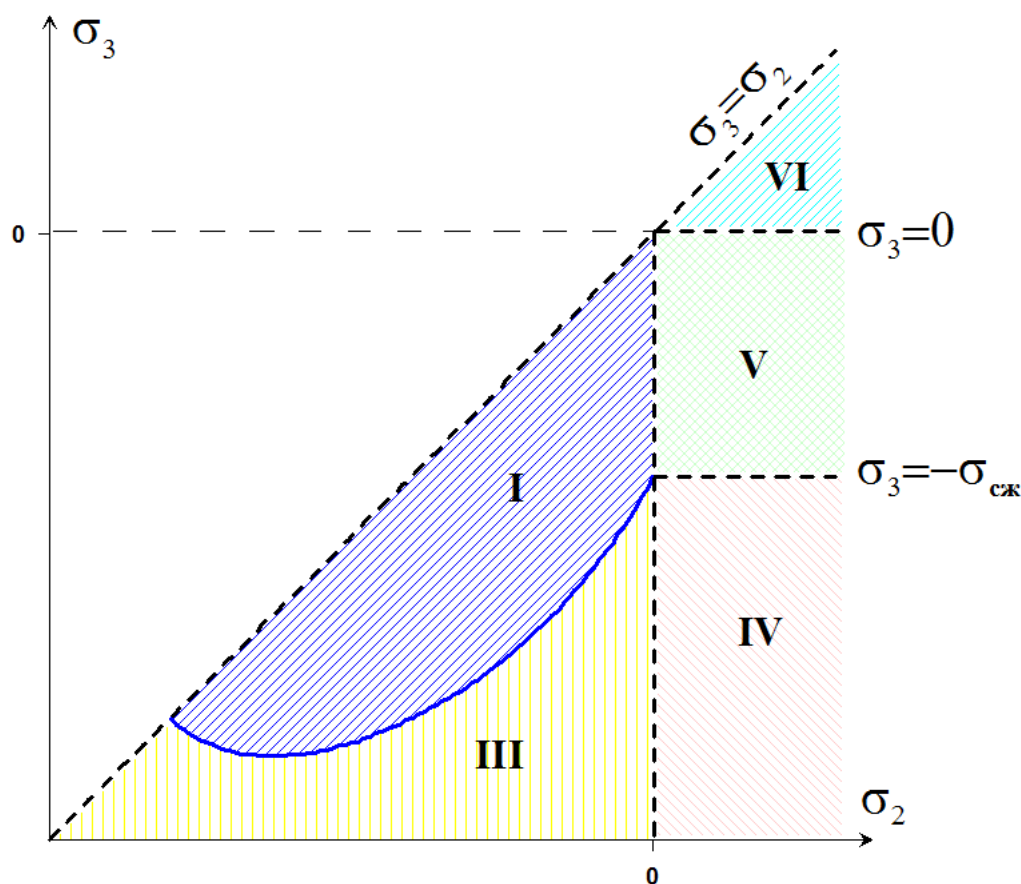


Рис. 4: Положение зон пластичности при положительных значениях главных напряжений

При  $F > 0$ , а  $F^* < 0$ , принимаем значение параметра  $\lambda = 0$ , а дальнейшие вычисления соответствуют предыдущей процедуре. Данный вариант соответствует **III\*** зоне.

5. При  $F > 0$ , а  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  и  $\sigma_3 > 0$ , предельные напряжения  $\sigma_1^{np}$  и  $\sigma_2^{np}$  определяются соотношением (23), а  $\sigma_3^{np}$  соотношением (24), если  $\sigma_3 < -\sigma_{сж}$  (данный вариант соответствует **IV** зоне), и соотношением (25), если  $\sigma_3 > -\sigma_{сж}$  (данный вариант соответствует **V** зоне).

6. Если  $F > 0$ , а  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  и  $\sigma_3 > 0$ , то предельные напряжения определяются соотношением (26). Данный вариант соответствует **VI** зоне.

7. Если деформирование локальной области определяется зонами **III**, **III\***, **IV**, **V** и **VI**, то значение предела прочности на растяжение для этой области в последующих вычислениях следует принять  $\sigma_{раст} = 0$ .

## 6. Экспериментальное апробирование

Разработанный критерий прочности (пластичности) использовался для описания процесса разрушения цилиндрических соляных образцов [11] при одноосном нагружении (рис.5а). В условиях полного сцепления на контактах их напряженное состояние является объемным.

Расчетная схема математического моделирования упругопластического поведения соляных пород представлена на рис.5б.

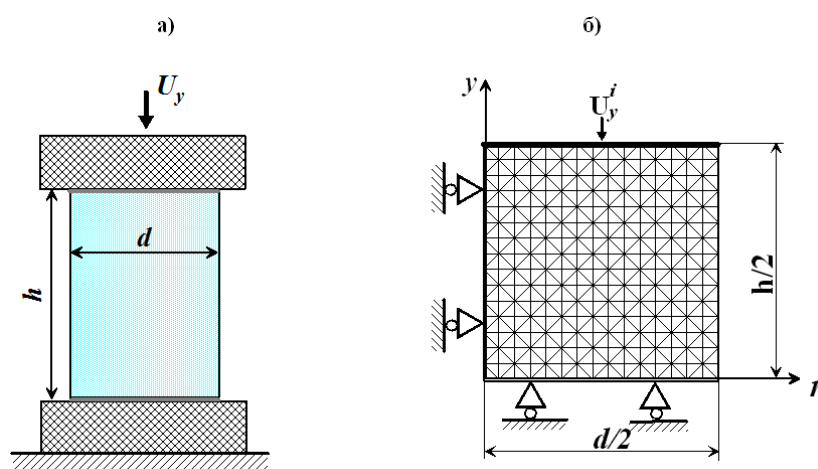


Рис. 5: Схема нагружения цилиндрического образца.

Расчет проводился методом конечных элементов осесимметричной задачи теории упругости в перемещениях [12]. В каждом конечном элементе определялись деформации, напряжения и значение функции прочности (пластичности)  $F$ . При  $F > 0$  по приведенному выше алгоритму находились пластические и упругие деформации и предельные напряжения. Численная реализация упруго-пластической задачи осуществлялась методом начальных напряжений [13].

Математическое моделирование проводилось для образцов сильвинита со следующими геометрическими параметрами: диаметр образцов  $d = 60$  мм, высота -  $h = 20, 30, 40, 48, 54, 60, 90, 120, 150, 180$  мм. Для каждого образца путем математического моделирования строились диаграммы деформирования (рис.6), по которым определялись значения разрушающих деформаций  $\varepsilon_p$  и напряжений  $\sigma_p$ . Результаты расчетов сопоставлялись с соответствующими экспериментальными данными (рис.7).

Представленные результаты показывают (рис.7) хорошее качественное и количественное соответствие расчетных и экспериментальных параметров деформирования соляных пород.

Таким образом, разработанная математическая модель пластического деформирования соляных пород для трехмерного напряженного состояния является вполне работоспособной и использовалась при моделировании более

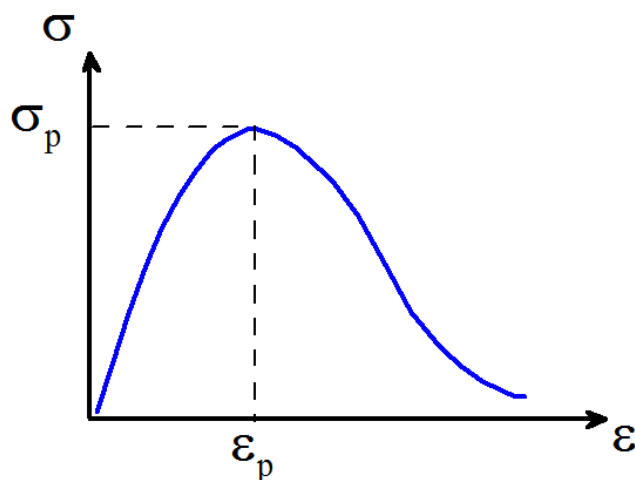


Рис. 6: Схема диаграммы деформирования.

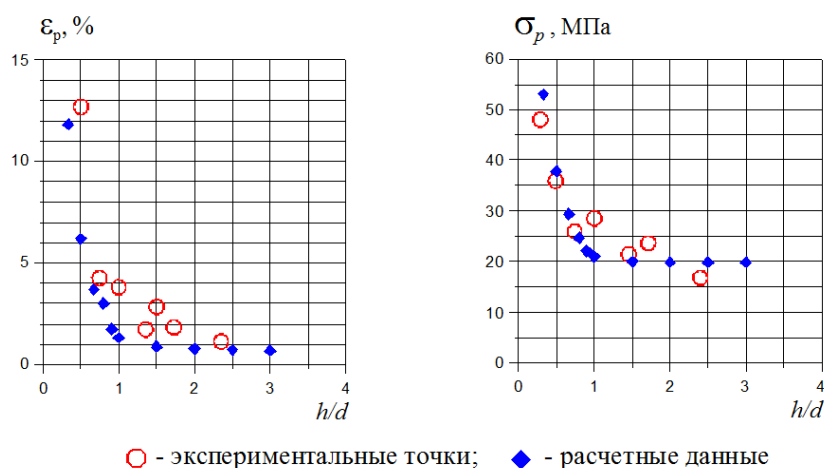


Рис. 7: Сопоставление расчетных и экспериментальных значений разрушающих деформации (а) и напряжений (б)

сложных геомеханических процессов [14, 15].

## 7. Заключение

1. Предложенный критерий прочности отражает основные особенности пластического деформирования горных пород, обусловленных формированием трещин сдвига и отрыва с последующей их полной дезинтеграцией. Построенные критериальные соотношения верифицированы при описании результатов механических испытаний горных пород. Получено приемлемое соответствие расчетных и экспериментальных разрушающих напряжений и деформаций.

2. Разработанный алгоритм определения предельных напряжений, упру-

гих и пластических деформации достаточно просто численно реализуется в трехмерных задачах математического моделирования процессов деформирования и разрушения крупномасштабных горнотехнических объектов. Предложенный подход может быть распространен для любого вида критериев пластичности, основанных на ассоциированном законе течения.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие / под ред. В. В. Панасюка. В 4т. - Киев: Наук. Думка, 1988-1990. - Т. 1. Основы механики разрушения. – 488 с.
2. Карташов Ю. М., Матвеев Б. В., Михеев Г. В., Фадеев А. Б. Прочность и деформируемость горных пород. М., Недра, 1979, 269 с.
3. Левин В. А. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 456 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т.1)
4. Оловянный А.Г. Механика горных пород: Моделирование разрушений/ СПбГУ.-СПб, 2012.-278с.
5. Baryakh A. A., Samodelkina N. A. Mathematical modeling of underworked rock strata failure process.// Solid State Phenomena. – 2016. Т. 243. P.17-22
6. Барях А. А., Самоделкина Н. А. Разрушение водоупорных толщ при крупномасштабных горных работах. Ч.II // Физ.-тех. пробл. разраб. полезных ископаемых.2012. №6. С. 12-20
7. Боткин А. И. О прочности сыпучих и хрупких материалов // Изв. ВНИИ гидротехники. 1940. Т. 26. С. 205-236.
8. Миролюбов И. Н. К вопросу об обобщении теории прочности октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы / Тр. Ленингр. технологич. ин-та. 1953. Вып. 2. С. 42-52.
9. Кузнецов Г. Н. Механические свойства горных пород. М., Углетехиздат, 1947.
10. Кац Ш. Н. О пластических деформациях при сложном напряженном состоянии. – В кн.: Теория пластичности. – М.: Наука. 1969. – 400 с.
11. Барях А. А., Константинова С. А., Асанов В. А. Деформирование соляных пород. – Екатеринбург: УрО РАН , 1996. – 203 с.
12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. – 541 с.

13. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. – 221 с.
14. Самоделкина Н. А. Прогноз деформаций земной поверхности при различных сценариях затопления рудника СКРУ-2 // Стратегия и процессы освоения георесурсов: сб. науч. тр. Вып. 14 / ГИ УрО РАН. – Пермь, 2016.-С. 84-86
15. Барях А.А., Самоделкина Н.А. Геомеханическая оценка интенсивности деформационных процессов над затопленным калийным рудником // Физ.-тех. пробл. разраб. полезных ископаемых. 2017. №4. С. 33-46

## REFERENCES

1. Panasyuk V.V., Andreykiv A.E., Parton V.Z., 1988, “*Osnovyi mehaniki razrusheniya , Tom 1*”, *Mehanika razrusheniya i prochnost materialov, [Fracture mechanics and rock strength]* , Naukova Dumka, Kiev, 488 p.
2. Kartashov Y.M., Matveev B.V., Mikheev G.V., Fadeev A. B. , 1979, *Prochnost' i deformiruemost' gorny'kh porod [Strength and deformability of rocks]*, Nedra, Moscow, 269 p.
3. Levin V. A. , J 2015, *Modeli imetodyi. Obrazovanie i razvitie defektov [Models and methods. Formation and development of faults]*, PHYSMATHLIT, Moscow, 456 p
4. Olovyanny A.G., J 2012, *Mehanika gornyih porod. Modelirovanie razrusheniy [Rock mechanics. Failure modeling]*, Saint Petersburg University, Saint Petersburg, 278 p.
5. Baryakh A. A., Samodelkina N. A., 2016, “Mathematikal odelining of underworked rock strata failure process”, *Solid State Phenomena*, vol. 243, pp. 17-22
6. Baryakh A. A., Samodelkina N. A., 2012, “Water-tight stratum rupture under large-scale mining. Part II”, (*Journal of mining science*), vol. 48, no. 6, pp. 954-961
7. Botkin A. I., 1940, “On strength of bulk solids and brittle materials”, *Izvestiya VNII gidrotehniki*, vol. 26, pp. 205-236
8. Miroyubov I.N., 1953, “On the question of generalization of octahedral shear stress theory on brittle materials”, *Tr. Leningr. tehnologich. in-ta.*, issue 2, pp. 42-52
9. Kuznetsov G. N., 1947, *Mehanicheskie svoystva gornyih porod [Mechanical properties of rock]*, Ugletechizdat, Moscow, 247 p.

10. Kats. Sh. N. ,1969, “On plastic deformations under compound stress”, *Teoriya plastichnosti [Theory of plasticity]*, Nauka, Moscow, 400 p.
11. Baryakh A. A., Konstantinova S. A., Asanov V.A., 1996, *Deformirovanie solyanyih porod [ Deformation of salt rocks]*, UrO RAN, Ekaterinburg, 203 p.
12. Zienkiewich O. C., 1971, *The finite element method in engineering science. McGraw-Hill-London*, 521 p.
13. Fadeev A. B. , 1987, *Metod konechnyih elementov v geomehanike [The finite element method in geo mechanics]*, Nedra, Moscow, 221 p.
14. Samodelkina N. A. , 2016, “Forecast of earth surface deformations for different flooding scenarios of mine SKRU-2”, *Sb. nauch. Tr. Strategiya i protsessyi osvoeniya georesursov*, Mine Institute of Ural Branch of Russian Academy of Science, issue 14, Perm, pp. 84-86
15. Baryakh A. A., Samodelkina N. A., 2017, “Geomechanical estimation of deformation processes intensity over flooded potash mine”, *Fiziko-Tekhnicheskie Problemy Razrabotki Poleznykh Iskopaemykh (Journal of mining science)*, vol. 4, pp. 33–46

получено 22.05.2017

принято в печать 14.09.2017