

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-44-54

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ЭФФЕКТИВНЫЙ ТЕНЗОР УПРУГОСТИ ПОРОВО-ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД

Ю. А. Алхименков¹, И. О. Баюк², С. А. Тихоцкий³

Аннотация

Задача определения эффективного тензора упругости микронеоднородной и, в общем случае, макроскопически однородной и анизотропной композитной среды относится к проблеме взаимодействия многих тел. Решение такой задачи возможно лишь приближенно. В работе рассматривается решение такой задачи для порово-трещиноватой среды – терригенной горной породы, упругие свойства которой анизотропные. Причем, анизотропия упругих свойств вызвана различными факторами – как собственной анизотропией глинистых минералов, так и преимущественной ориентацией неизометричных неоднородностей породы. Различные методы теории эффективных сред (ТЭС) для вычисления эффективного тензора упругости порово-трещиноватых сред используют так называемые гипотезы эффективного поля. Так, например, метод Т-Матрицы, метод Мори-Танака, метод Обобщенного Сингулярного приближения и метод Эффективного Поля используют гипотезы эффективного поля в различных вариациях. Таким образом, различные методы ТЭС показывают близкие результаты. В случае горной породы, которая рассматривается как природный композит, большое значение имеет аппроксимация реальной среды некой параметрической модельной средой, отражающей основные особенности микроструктуры породы, которая, в свою очередь, является следствием особенностей формирования конкретной породы. Следовательно, выбранная модель среды и выделенные модельные параметры играют очень важную роль в моделировании. Для подтверждения этого тезиса было проведено моделирование эффективных упругих характеристик порово-трещиноватой породы двумя различными методами: Т-матрицы и Обобщенного Сингулярного приближения для двух разных

¹Алхименков Юрий Александрович, инженер Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, alkhimenkov.yury@gmail.com

²Баюк Ирина Олеговна, главный научный сотрудник Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, ibayuk@yandex.ru

³Тихоцкий Сергей Андреевич, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, sat@ifz.ru

параметрических моделей одной и той же горной породы, построенных независимо на основе визуального анализа микроструктуры породы в масштабе шлифа. Каждая из построенных моделей имеет разное количество параметров, которые также различны. Однако общим является то, что при моделировании таких пород необходимо учитывать жесткость контакта минеральных зерен и органического вещества, а также степень связности компонент. Найдены параметры каждой модели и определена область изменения пористости породы, в которой обе модели имеют сходные упругие свойства.

Ключевые слова: порово-трещиноватые среды, эффективные свойства, метод обобщенного сингулярного приближения.

Библиография: 15 названий.

INFLUENCE OF SPATIAL INTERACTIONS OF INCLUSIONS ON THE EFFECTIVE ELASTIC TENSOR OF CRACKED POROUS MEDIUM

Yu. A. Alkhimenkov, I. O. Bayuk, S. A. Tikhotskiy

Abstract

The determination of effective stiffness tensor of microinhomogeneous and, in general, macroscopically homogeneous composite medium is related to so-called problem of many-body interaction. Solution to the problem can be found only as an approximation. In this paper we consider a solution to such a problem for porous-cracked medium that is a terrigenous rock having anisotropic elastic properties. The elastic anisotropy is a result of many factors including anisotropic properties of clay minerals and preferential orientation of non-isometric heterogeneities. Different Effective Medium Theories for calculating effective stiffness tensor of cracked porous medium use so called Effective Field Hypothesis (H1, H2 and H3). For example, T-matrix method, Mori-Tanaka method, General Singular Approximation method, and Effective Field Methods use the Effective Field Hypothesis. Thus, different methods produce similar results. When constructing models of rock's effective properties the rock is treated a composite "made by nature". In this case of importance is a proper approximation of the real medium by a parametric model medium that reflects specific features of rock's microstructure. The microstructure is a result of rock evolution. Therefore, the model of the medium and the model parameters play very important roles in the modelling. To prove this statement, two models of a cracked-porous medium's properties were created using two different methods: the T-matrix method and General Singular Approximation Method. The methods were applied for two different parametric models of one and the same rock. The models were build based on visual analysis of rock's thin sections. Each of the constructed models has different number of parameters. The parameters are also different. However, a common

feature of the two models is that for rocks of this type it is necessary to take into account a rigidity of contact between mineral grains and organic material. Besides, a connectivity of different heterogeneities should be also parametrized. For each model a set of parameters was found and a porosity interval where the models produce similar results in terms of elastic wave velocities is determined.

Keywords: pore-fractured media, effective properties, generalized singular approximation method.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Определение эффективных характеристик порово-трещиноватых сред является актуальной задачей в различных разделах механики. Одним из реальных примеров такой среды являются горные породы. Под эффективными характеристиками здесь и далее понимаются такие физические свойства среды, которые определяют макроскопическую её реакцию на усреднённое по объёму воздействие. Горные породы могут быть представлены как композитный материал, содержащий поры и трещины, с различными модельными характеристиками, такими как форма трещин, форма пустотного пространства и т.д. Поровое пространство может быть заполнено различным флюидом: газом, водой, углеводородами и т.д. Методы теории эффективных сред (ТЭС) позволяют вычислять эффективный тензор упругости таких материалов на основе математической модели среды. Эта модельная среда состоит из трех компонент: 1) модельный шаблон среды, который отражает основные характеристики микроструктуры горной породы; 2) параметры модели, которые определяют форму, ориентацию и связанность пустотного пространства и свойства всех компонент среды; 3) уравнения, которые связывают модельные параметры и физические свойства компонент среды.

Горные породы неоднородны на различных масштабах, следовательно, микроструктура таких сред должна также изучаться на различных масштабах, а математическая модель породы должна отражать главные особенности строения среды в этих масштабах. Методы ТЭС как раз и предоставляют необходимые связывающие уравнения для вычисления эффективного тензора упругости для различных модельных параметров и физических характеристик компонент среды. Модельные параметры могут быть определены на образце горной породы или вычислены из других экспериментальных данных. Знание модельных параметров и физических свойств является необходимым для определения эффективного тензора упругости таких сред.

В настоящее время существует огромное множество методов ТЭС и порой трудно выбрать наиболее подходящий метод. В настоящем исследовании проанализированы некоторые методы гомогенизации, которые используются на практике при вычислении эффективных характеристик горных пород. Все эти методы основаны на подходах, разработанных в микромеханике неодно-

родных сред. Аналитически и численно показано, что многие методы очень похожи друг на друга и дают весьма сходные результаты для одинаковых модельных сред. Демонстрируется, что многие методы могут быть объединены в одну группу методов с использованием гипотез эффективного поля.

Для демонстрации данного тезиса проведено моделирование реальной горной породы – песчаника. Существует несколько подходов к параметризации реальной горной породы. Созданы две независимых модели горной породы и выполнена инверсия для определения их параметров. Известными характеристиками горной породы считаются скорости продольных и поперечных волн материала матрицы, минеральный состав и пористость. Несмотря на то, что рассмотренные модели горной породы имеют различные параметры, были выявлены ряд общих закономерностей. Показано, что при построении модели необходимо учитывать жесткость контакта минеральных зерен и органических компонентов породы и степень связанности компонентов породы.

2. Теория

Эффективный тензор упругости статистически однородной среды C^* определяется следующим выражением:

$$\langle \sigma(x) \rangle = C^* : \langle \varepsilon(x) \rangle, \quad (1)$$

где $\langle \sigma(x) \rangle$ и $\langle \varepsilon(x) \rangle$ - осредненные по представительному объему среды поля напряжений и деформаций для настолько большого числа неоднородностей, чтобы имело смысл статистическое усреднение. Методы теории эффективных сред позволяют вычислить эффективный тензор упругости C^* используя параметры модели.

Практически все методы ТЭС, детальный обзор которых может быть найден в работе [11], используют три модельных предположения, называемых гипотезами эффективного поля: Н1, Н2 и Н3. Согласно гипотезе Н1, каждое включение в среде имеет эллипсоидальную форму и находится в некотором эффективном и однородном поле. Гипотеза Н2 предполагает, что эффективное поле в любой точке внутри включения не зависит от поля напряжений внутри других включений в среде. В терминах теории упругости, гипотеза Н2 называется квази-кристаллической аппроксимацией. Гипотеза Н3 предполагает эллиптическую симметрию для распределения включений в среде [7, 15]. Парная корреляционная функция включений обладает эллиптической симметрией, но пространственный эллипсоид может отличаться от эллипсоида, определяющего форму включения. В работе [11] показано, что в статистически однородной среде и с граничными условиями определенного вида, эффективный тензор упругости не зависит от корреляционного радиуса и плотности распределения включений в среде.

Метод Т-матрицы (оптическая потенциальная аппроксимация и когерентная потенциальная аппроксимация) [13], методы эффективного поля [14] и

методы эффективной среды (метод обобщенного сингулярного приближения) [2, 7] используют гипотезы эффективного поля в том или ином виде. Некоторые частные методы, такие как метод Мори-Танака [13] и метод самосогласования [15] также используют гипотезы эффективного поля.

Во всех вышеперечисленных методах, общее интегральное уравнение для поля деформаций (2) имеет вид (для статистически однородной среды и с граничными условиями определенного вида):

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{(0)} + \int_{\Omega} G^{(0)}(x - x') \delta C(x') \varepsilon(x') dx', \quad (2)$$

где $\varepsilon^{(0)}$ является константой, т.е. определяется граничными условиями. Этот член определяет поле деформаций, которое бы существовало в среде с однородными характеристиками $C^{(L)}$ и соответствующими граничными условиями. $C^{(L)}$ часто называют телом сравнения. Тензор четвертого ранга $G^{(r)}$ представляет собой вторую производную тензора Грина уравнения равновесия для среды со свойствами $C^{(L)}$ и является обобщенной функцией. Тензор $\delta C^{(r)}$ является флуктуацией локального тензора упругости в неоднородной среде.

Указанные выше гипотезы эффективного поля используются в процессе нахождения решения уравнения (2). Так как многие методы используют уравнение (2) и гипотезы эффективного поля для вывода конечных формул, многие методы дают одинаковые результаты. Например, для однородной среды с однонаправленными эллипсоидальными включениями, метод Мори-Танака и метод, предложенный в работе [15], приводят к одному и тому же эффективному тензору упругости. Более того, конечные формулы расчета эффективного тензора упругости метода Т-матрицы могут быть полностью переписаны без каких-либо упрощений в нотации, используемой в микромеханике. В этом случае, Т-матрица в выражениях может быть заменена на тензор концентрации свернутый с тензором флуктуаций (разность между упругими свойствами матрицы и включений). Можно показать, что многие методы, которые используют уравнение (2) и гипотезы эффективного поля, могут быть переформулированы друг в друга. Таким образом, для моделирования эффективного тензора упругости реальных сред, важнейшим является не выбор конкретного метода ТЭС, а выбор шаблона модели среды модельных параметров.

Выражение (2) является общим для всей механики микронеоднородных сред. Важно, что формула (2) имеет ту же форму, что и уравнение Липпмана-Швингера, известное в квантовой теории рассеяния. Один из подходов к решению данного уравнения, это использование ряда Дайсона:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{(0)} + \bar{G} \delta C \varepsilon^{(0)} + \bar{G} \delta C \bar{G} \delta C \varepsilon^{(0)} + \dots, \quad (3)$$

Аналогичное выражение можно записать с использованием Т-матрицы T :

$$T = \sum_r t^{(r)}\theta^{(r)} + \sum_r \sum_{u \neq r} t^{(r)}G^{(ru)}t^{(u)} + \sum_r \sum_{u \neq r} \sum_{v \neq u} t^{(r)}G^{(ru)}t^{(u)}G^{(uv)}t^{(v)} + \dots \quad (4)$$

Каждый последующий член в правой части выражения (4) учитывает взаимодействие включений более высокого порядка. Выражение (4) описывает рассеяние в типичной системе многих тел. Однако, как было показано в работе [12], при выводе выражений (2) и (3) уже использовались некоторые гипотезы. Таким образом, выражения (2) и (3) не являются точными. Более правильной альтернативой уравнению (2) является следующее выражение:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{(0)} + \int_{\Omega} G^{(0)}(x - x') [\delta C(x')\varepsilon(x') - \langle \delta C \varepsilon \rangle] dx' \quad (5)$$

Основное отличие (5) от (2) в операции центрирования, оригинально предложенной в работе [7]. Рассматриваемые в данной работе методы основаны на уравнениях (2)–(4), следовательно, детальное изучение фундаментальных проблем микромеханики в виде уравнения (5) выходит за рамки данной работы. Однако мы хотели бы отметить важность данной проблемы для будущих исследований.

3. Пример вычисления эффективного тензора упругости реальной среды

Для верификации предложенных выводов, были независимо построены две модели горной породы – песчаника. Модельная среда показана на рисунке 1. Известные свойства породы – скорости продольных и поперечных волн минеральных компонентов, минеральный состав и объем порового пространства. Первая математическая модель породы была построена в два этапа. На каждом этапе был использован метод T-матрицы (Оптическая Потенциальная Аппроксимация) с телом сравнения. В данной модификации метода T-матрицы, была учтена связанность порового пространства с использованием специального параметра [1, 9]. Пространственное распределение включений было также учтено.

На первом шаге построения модели, поры (2% от объема породы) были помещены в минеральную матрицу, которая представляет собой смесь различных минералов. Поры представляли собой сферические включения. В результате первой ступени моделирования, эффективный тензор упругости “материал 1а” был получен. Независимыми параметрами на этом шаге были скорости упругих волн в матрице породы и параметр, описывающий связанность включений. Во втором шаге моделирования, изолированные удлиненные частицы глинистых минералов были помещены в “материал 1а”. Тензор упругости глинистых минералов был взят из работы [10]. В результате второй ступени моделирования, эффективный тензор упругости породы-песчаника

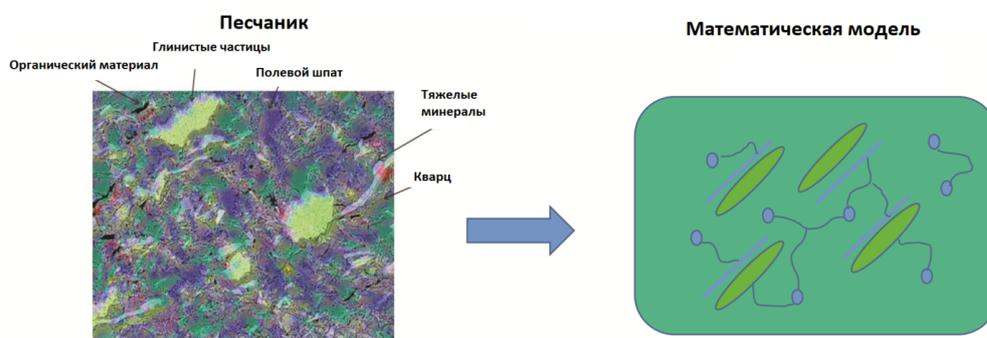


Рис. 1: Шлиф (срез) горной породы - песчаника (слева) и математическая модель (справа). Эллипсоидальные включения представляют собой удлиненные частицы глинистых минералов. Сферы и трещины представляют собой два типа пустотного пространства в среде.

был вычислен. Неизвестными параметрами модели на втором шаге являются аспектное отношение частиц глинистых минералов, аспектное отношение двух-точечной корреляционной функции, описывающей пространственное расположение включений и параметр жесткости контакта включений.

Таким образом, в первой модели всего пять неизвестных параметров. Инверсия была произведена с помощью алгоритма решения обратной задачи (т.е. минимизации функционала) с ограничениями на условия. Полученные параметры модели: связанность порового пространства 0.85; аспектное отношение глинистых минералов 0.26; аспектное отношение двух-точечной корреляционной функции 0.52; параметр жесткости включений 0.36; скорость продольных волн в матрице породы 5.44 км/с.

Вторая математическая модель горной породы была построена также в два этапа, но с существенными отличиями. На всех стадиях моделирования использовался метод обобщенного сингулярного приближения (ОСП). В этом методе возможно неявно учесть связанность включений при моделировании используя специальный параметр.

На первом шаге построения модели, изолированные удлиненные частицы глинистых минералов были помещены в минеральную матрицу, которая представляет собой смесь различных минералов. В этой модели был также использован анизотропный тензор упругости глинистых минералов [10]. Аспектное отношение включений глинистых минералов было задано равным 0.08 (оценка получена на основании микроскопического анализа шлифа породы). В результате был получен эффективный тензор упругости "материал 1б". Неизвестными параметрами на этом шаге были скорости упругих волн в матрице породы. Во втором шаге, поры двух типов были помещены в "материал 1б". Поры первого типа были ориентированы хаотически. Второй тип пор представлял собой ориентированные трещины. В результате второй ступени моделирования, эффективный тензор упругости породы-песчаника был посчитан. Независимые параметры во втором шаге были аспектное отношение хаотически ориентированных пор, аспектное отношение трещин, пара-

метр связанности пор и объем трещин.

Таким образом, в данной модели всего 6 независимых параметров. Использовался аналогичный метод инверсии путем минимизации функционала с ограничениями на параметры поиска. Параметры модели были усреднены среди всех найденных решений. Параметры модели (rms в скобках): аспектное отношение хаотически ориентированных пор 0.67 (0.23); аспектное отношение трещин 0.01 (0.001); параметр связанности пустотного пространства 0.1 (0.1); трещинная пористость 0.06 (0.06) %; скорости продольных и поперечных волн 5.04 (0.15) и 3.27 (0.04) км/с, соответственно. Две модели показывают одинаковые параметры инверсии (различие параметров менее 10%) в пределах изменения пустотного пространства модели от 0 до 5%. Для больших значений пористости модели показывают более существенное различие параметров, следовательно, необходимы дополнительные исследования.

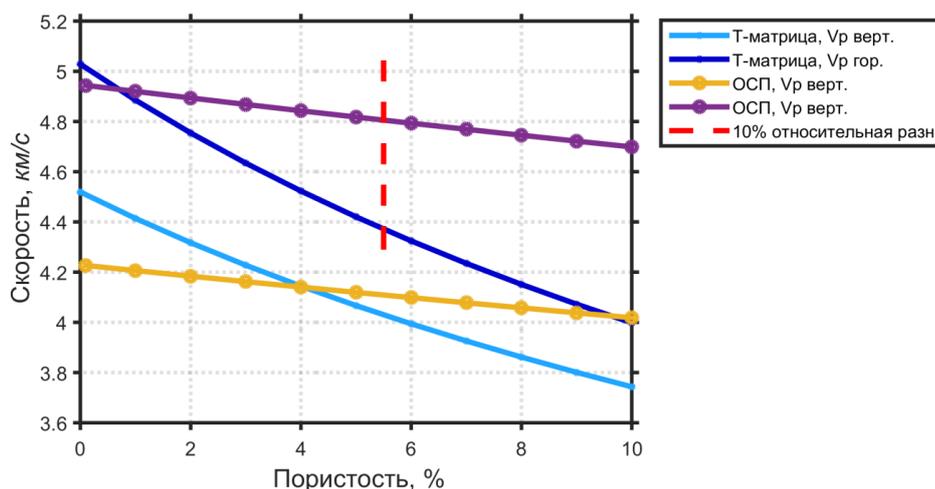


Рис. 2: Сравнение двух моделей, построенных методом Т-матрицы и Обобщенного Сингулярного приближения. Вертикальная ось представляет собой скорости продольных волн, посчитанных по данным эффективного тензора упругости для каждой модели. Различие вертикальных и горизонтальных скоростей волн обусловлено анизотропией среды (смотри [8]). Показано, что при пористости от 0 до (примерно) 5.5% модели показывают близкие значения скоростей продольных волн. Однако, при пористости более 5.5% (справа от красной вертикальной пунктирной линии) различие моделей становится очень явным.

4. Заключение

Многие методы теории эффективных сред основаны на уравнении (1) и используют гипотезы эффективного поля. При этом, различные методы показывают одни и те же результаты для одинаковых моделей. Получается,

что выбор метода не являются определяющим. С другой стороны, модельная среда и выбор параметров модели являются основными факторами в построении математических моделей реальных сред.

Для подтверждения приведенных выше выводов, были построены две модели реальной среды – горной породы, которая представляла собой порово-трещиноватый песчаник. Две сконструированные модели обладают разными параметрами. Однако были отмечены общие тенденции в моделировании реальных сред: 1) необходимость введения параметров, определяющих жесткость контакта минеральных зерен и 2) необходимость введения параметра, описывающего связанность компонентов модельной среды.

При этом необходимо постоянно помнить, что все используемые методы ТЭС основываются на модельных предположениях — гипотезах эффективного поля — и используют асимптотические методы оценки, а потому нуждаются в верификации на основании численных методов. В настоящее время нами ведутся работы по сопоставлению оценок, получаемых методами ТЭС, с результатами конечно-элементного расчёта напряжённо-деформированного состояния полиминерального пористого композита с использованием САЕ FIDESYS [3, 4, 5, 6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алхименков Ю. А. Метод Т-матрицы для математического моделирования эффективных упругих свойств коллекторов углеводородов. Физика Земли, 2017, (3), 155–166.
2. Баюк И.О. Основные принципы математического моделирования макроскопических физических свойств коллекторов углеводородов // Технологии сейсморазведки, 2013, № 4. С. 5–18.
3. Баюк И.О., Д. Е. Белобородов, И. А. Березина, И. И. Вдовиченко, А. В. Вершинин, Д. Р. Гилязетдинова, В. Н. Горбунов, К. М. Зингерман, Д. В. Корост, М. А. Краснова, С. А. Тихоцкий, Д. А. Улькин, И. В. Фокин, М. Я. Яковлев, and Т. Р. Ялаев. Проблемы апскейлинга упругих свойств пород-коллекторов. // Материалы конференции Сейсмические технологии - 2016, pages 27–30. Москва, 2016.
4. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015 — 400 с.
5. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях.// Известия АН. Механика твердого тела. 1997, № 4. - С.45-50.
6. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении.// Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. – С. 482–487.

7. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
8. Alkhimenkov Y. A., & Bayuk I. O. Analysis of anisotropy parameters of fractured carbonate reservoir. In 6th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition. 2014.
9. Alkhimenkov Y. Practical Applications of the T-Matrix Approach to Fractured Porous Rocks. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2015.
10. Bayuk I. O., Ammerman M., & Chesnokov E. M. Elastic moduli of anisotropic clay. *Geophysics*, 2007, 72(5), D107–D117.
11. Buryachenko V.A. *Micromechanics of Heterogeneous Materials*. Springer, 2007.
12. Buryachenko, V. A. On the thermo-elastostatics of heterogeneous materials: I. General integral equation. *Acta mechanica*, 2010, 213(3), 359-374.
13. Jakobsen M., Hudson J., and Johansen T.A. T-matrix approach to shale acoustics // *Geophys. J. Int.* 2003. Vol. 154. P. 533–558.
14. Kanaun K.K., Levin V.M. *Self-Consistent Methods for Composites*. Vol. 1, 2. Springer, Dordrecht. 2008.
15. Willis J.R. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites // *J. Mech. Phys. Solids*, 1977, 25, 185–202.

REFERENCES

1. Alkhimenkov, Yu.A. 2017, “The T-matrix approach for the mathematical modeling of the effective elastic properties of hydrocarbon reservoirs”. *Izv., Phys. Solid Earth*. Vol. 53, Issue 3, pp. 477-487. <https://doi.org/10.1134/S1069351317030016>
2. Bayuk, I.O. 2013, “Main principles of the mathematical modelling of the macroscopic physical properties of the hydrocarbon collectors”, *Tekhnologii Seismorazvedki*, no. 4, pp. 5-18
3. Bayuk, I.O., Beloborodov, D.E., Berezina, I.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Gilyazetdinova, D.R., Gorbunov, V.N., Zingerman, K.M., Korost, D.V., Krasnova, M.A., Tikhotskiy, S.A., Ulkin, D.A., Fokin, I.V., Yakovlev, M.Ya. & Yalaev, T.R. “Problems of the collector rocks elastic properties upscaling”, *Materialy konferencii “Seismicheskie tehnologii”* (Proc. of the conference “Seismic technologies”). Moscow, 2016, pp. 27-30.
4. Morozov, E.M., Levin V.A. & Vershinin, A.V. 2015, *Strength Analysis: FIDESYS in engineer hands*, URSS, Moscow, 400 pp.

5. Levin, V.A., Lokhin, V.V. & Zingerman, K.M., 1997. "About one way of strength characteristics estimation for the porous bodies suspected to finite deformations". *Izvestiya AN. Mekhanika tverdogo tela*, no. 4, pp. 45-60.
6. Levin, V.A. & Zingerman, K.M., 2002. "About the effective constitutive relations for the porous materials suspected to finite deformations and their overlaing". *Doklady RAN*, Vol. 382, no. 4, pp. 482-487.
7. Shermergor, T.D. 1977, *Theory of elasticity for micro-inhomogeneous media*, Nauka, Moscow, 400 pp.
8. Alkhimenkov, Yu.A. & Bayuk, I.O., 2017. "Analysis of anisotropy parameters of fractured carbonate reservoir". *Proc. 6th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition*. Sankt-Petersburg, 2016.
9. Alkhimenkov, Y. "Practical Applications of the T-Matrix Approach to Fractured Porous Rocks". *Proc. SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers*. Houston, 2015.
10. Bayuk, I. O., Ammerman, M. & Chesnokov E. M., 2007. "Elastic moduli of anisotropic clay". *Geophysics*, vol. 72(5), D107-D117.
11. Buryachenko, V.A. 2007, *Micromechanics of Heterogeneous Materials*. Springer. 687 pp.
12. Buryachenko, V.A., 2010. "On the thermo-elastostatics of heterogeneous materials: I. General integral equation". *Acta mechanica*, vol. 213(3), pp. 359-374.
13. Jakobsen, M., Hudson, J. & Johansen T.A., 2003. "T-matrix approach to shale acoustics". *Geophysical Journal International*, vol. 154. pp. 533–558.
14. Kanaun, K.K. & Levin, V.M. 2008. "Self-Consistent Methods for Composites". Vol. 1, 2. Springer, Dordrecht.
15. Willis, J.R., 1977. "Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites". *Journal of the Mechanic and Physics of Solids*, vol. 25, pp.185–202.

получено 22.05.2017

принято в печать 14.09.2017