ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 512.5

О ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В РАЗЛИЧНЫХ КЛАССАХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР

О. В. Шулежко (г. Ульяновск)

Аннотация

При изучении линейных алгебр с точки зрения выполняющихся в них тождеств интерес вызывают тождественные соотношения, следствиями которых является тождество нильпотентности. Хорошо известны теорема Нагаты-Хигмана, в которой утверждается, что над полем нулевой характеристики ассоциативная алгебра с ниль условием ограниченного индекса является нильпотентной, а также результат Е. И. Зельманова о нильпотентности алгебры Ли в которой выполняется тождество энгелевости.

Совокупность линейных алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, следуя А.И. Мальцеву, называют многообразием. Многообразие называется почти нильпотентным, если само оно не является нильпотентным, но каждое его собственное подмногообразие нильпотентно. Существует понятие как рост многообразий. Различают многообразия полиномиального, экспоненциального, сверхэкспоненциального роста, а также промежуточного между полиномиальным и экспоненциальным ростом. Подэкспоненциальный рост подразумевает, что многообразие имеет полиномиальный или промежуточный рост. Статья носит реферативный обзорный характер и касается описания почти нильпотентных многообразий в различных классах линейных алгебр над полем нулевой характеристики.

Один из разделов статьи посвящен случаю классических линейных алгебр. В нем представлено единственное ассоциативное почти нильпотентное многообразие, которым является многообразие всех ассоциативно-коммутативных алгебр. В случае алгебр Ли почти нильпотентным является многообразие всех метабелевых алгебр Ли. При рассмотрении алгебр Лейбница приведено два примера почти нильпотентных многообразий и доказано, что других нет. Следует отметить, что все представленные в этом разделе примеры сами имеют незначительный полиномиальный рост.

В общем случае оказалось, что существуют достаточно экзотические примеры почти нильпотентных многообразий. В работе описаны свойства почти нильпотентного многообразия экспоненты два, а также доказано существование дискретной серии почти нильпотентных многообразий различных целых экспонент.

Последний раздел статьи посвящен многообразиям подэкспоненциального роста. Здесь представлены описания почти нильпотентных многообразий для многообразий в классах левонильпотентных ступени не выше двух алгебр, коммутативных метабелевых и антикоммутативных метабелевых линейных алгебр. Как оказалось, в каждом из этих классов содержится ровно по два почти нильпотентных многообразия.

Ключевые слова: тождество, многообразие, коразмерность, экспонента многообразия, почти нильпотентное многообразие.

Библиография: 20 названий.

ALMOST NILPOTENT VARIETIES IN DIFFERENT CLASSES OF LINEAR ALGEBRAS

O. V. Shulezhko

Abstract

A well founded way of researching the linear algebra is the study of it using the identities, consequences of which is the identity of nilpotent. We know the Nagata-Higman's theorem that says that associative algebra with nil condition of limited index over a field of zero characteristic is nilpotent. It is well known the result of E.I.Zel'manov about nilpotent algebra with Engel identity.

A set of linear algebras where a fixed set of identities takes place, following A.I. Maltsev, is called a variety. The variety is called almost nilpotent if it is not nilpotent, but each its own subvariety is nilpotent. Recently has been studied the growth of the variety. There is a variety of polynomial, exponential, overexponential growth, a variety with intermediate between polynomial and exponential growth. A variety has subexponential growth if it has polynomial or intermediate growth.

This article is a review and description of almost nilpotent varieties in different classes of linear algebras over a field of zero characteristic.

One part of the article is devoted to the case of classical linear algebras. Here we present the only associative almost nilpotent variety, it is the variety of all associative and commutative algebras. In the case of Lie algebras the almost nilpotent variety is the variety of all metabelian Lie algebras.

In the case of Leibniz algebras we prove that there are only two examples of almost nilpotent varieties. All presented almost nilpotent varieties in this section have polynomial growth.

In general case it was found that there are rather exotic examples of almost nilpotent varieties. In this work we describe properties of almost nilpotent variety of exponent 2, and also the existence of a discrete series of almost nilpotent varieties of different integer exponents is proved.

The last section of the article is devoted to varieties with subexponential growth. Here we introduce almost nilpotent varieties for left-nilpotent varieties of index two, commutative metabelian and anticommutative metabelian varieties. As result we found that each of these classes of varieties contain exactly two almost nilpotent varieties.

Keywords: identity, variety, codimension, exponent of variety, almost nilpotent variety.

Bibliography: 20 titles.

1. Введение

На протяжении всей работы характеристика основного поля Φ равна нулю. Напомним, что векторное пространство над полем Φ называется линейной алгеброй, если на нем задана бинарная билинейная операция. Обратим внимание, что в рассматриваемых алгебрах не предполагается выполнение тождества ассоциативности, а значит в произведениях следует следить за расстановкой скобок. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, например, $xyz = (xy)z$. Все неопределенные в данной статье понятия можно найти в монографиях [1, 2, 3].

Совокупность алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, называется многообразием. Исследование линейных алгебр с точки зрения выполняющихся в них тождеств является традиционным направлением исследований современной алгебры. Пусть A – некоторая линейная алгебра. Так как пересечение многообразия является многообразием, то можно определить наименьшее многообразие, содержащее алгебру A, которое будем обозначать $var(A)$ или $varA$. Пусть $\mathbf{V}$ – некоторое многообразие линейных алгебр, а $P_n(\mathbf{V})$ множество полилинейных элементов относительно свободной алгебры этого многообразия степени n от свободных образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Хорошо известно, что в случае нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно некоторой системе полилинейных тождеств, поэтому исследование строения полилинейных частей относительно свободной алгебры многообразия дает полную информацию о многообразии.

Множество $P_n(\mathbf{V})$ не является подалгеброй, однако оно является векторным простанством, которое можно рассматривать как модуль симметрической группы S_n, действуя перестановками на индексах образующих. Так как характеристика основного поля равна нулю, то по теореме Машке полилинейную часть степени n можно разложить в прямую сумму неприводимых подмодулей. Строение модуля $P_n(\mathbf{V})$ можно представить на "языке характеров".

Рассмотрим разложение характера модуля $P_n(\mathbf{V})$ в целочисленную комбинацию неприводимых характеров:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda, \tag{1}$$

где $m_\lambda(\mathbf{V})$ – кратность неприводимого характера χ_λ, отвечающего разбиению $\lambda \vdash n$.

Коразмерностью степени n многообразия $\mathbf{V}$ называют размерность $c_n(\mathbf{V}) = \dim(P_n(\mathbf{V}))$ пространства $P_n(\mathbf{V})$. Число слагаемых $l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})$ в сумме (1) называют кодлиной многообразия. Рост последовательности чисел $c_n(\mathbf{V})$ называют ростом многообразия $\mathbf{V}$. Если последовательность $c_n(\mathbf{V})$ мажорируется экспонентой a^n для подходящего a, то существуют пределы

$$\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \qquad \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

которые называют нижней и верхней экспонентой многообразия $\mathbf{V}$.

Если $\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \alpha$, то число α называют экспонентой многообразия $\mathbf{V}$ и обозначают $\mathrm{EXP}(\mathbf{V})$.

Договоримся использовать черту или волну над образующими для обозначения кососимметризации. Например,

$$x_0\bar{x}_1\tilde{y}_1\tilde{y}_2\bar{x}_2\bar{x}_3 = \sum_{p\in S_3, q\in S_2} (-1)^p(-1)^q x_0 x_{p(1)} y_{q(1)} y_{q(2)} x_{p(2)} x_{p(3)}\,,$$

где S_m – симметрическая группа, а $(-1)^r$ – четность перестановки r.

Целью данной работы является описание почти нильпотентных многообразий в различных классах линейных алгебр.

Если многообразие нильпотентно, то есть для которого существует такое число c, что любое произведение c или большего числа сомножителей равно нулю, то, понятно, что при $n \geqslant c$ выполняется равенство $c_n(\mathbf{V}) = 0$. Многообразие назовем почти нильпотентным, если оно само не является нильпотентным, но каждое собственное его подмногообразие нильпотентно. В случае нильпотентного многообразия говорят, что его рост является нулевым. В классических случаях, например, в случае ассоциативных алгебр, алгебр Ли или алгебр Лейбница, почти нильпотентные многообразия сами имеют незначительный рост. Полный список почти нильпотентных многообразий в этих классах приведен в первом разделе.

Недавно в работе [4] впервые удалось построить почти нильпотентное многообразие экспоненты два, а в статье [5] привести числовые характеристики для этого экзотического многообразия. В случае нулевой характеристики основного поля в [6] доказано, что для любого натурального числа m существует почти нильпотентное многообразие, экспонента которого равна m. Этим примерам почти нильпотентных многообразий посвящен второй раздел работы. В работе [7] дано описание всех почти нильпотентных многообразий подэкспоненциального (полиномиального или промежуточного) роста для класса левонильпотентных ступени два алгебр, то есть алгебр, в которых выполнено тождество $x(yz) \equiv 0$. Следуя этой работе в последнем разделе также приведено описание всех почти нильпотентных многообразий в классе антикоммутативных метабелевых алгебр и коммутативных метабелевых алгебр.

2. Описание почти нильпотентных многообразий в классе ассоциативных алгебр, алгебр Ли и алгебр Лейбница

В классе ассоциативных алгебр единственным почти нильпотентным многообразием является многообразие всех ассоциативно-коммутативных алгебр. Следуя работе [8], обозначим его $\mathbf{AC}$. По тождеству ассоциативности скобки в полилинейных элементах можно опускать, в силу тождества коммутативности образующие в произведениях можно менять местами. Поэтому полилинейная часть данного многообразия является одномерным пространством, то есть $c_n(P_n(\mathbf{AC})) = 1$ для любого n. Базисом пространства полилинейных элементов будет любой моном, например $x_1x_2\dots x_n$. Разложение характера имеет вид $\chi(\mathbf{AC}) = \chi(n)$, кодлина равна единице, то есть $l_n(\mathbf{AC}) = 1$ для любого n. Понятно, что тождество $x_1^n \equiv 0$, соответствует разбиению (n). Так как само поле Φ лежит в многообразии $\mathbf{AC}$, то многообразие $\mathbf{AC}$ не является нильпотентным. Сформулируем хорошо известное утверждение и тезисно представим его доказательство.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{W}$ – почти нильпотентное ассоциативное многообразие, тогда $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{AC}$.*

Доказательство. Пусть многообразие $\mathbf{W}$ является почти нильпотентным, но не совпадает с многообразием $\mathbf{AC}$. Понятно, что не нильпотентное многообразие $\mathbf{AC}$ не является собственным подмногообразием многообразия $\mathbf{W}$. Отсюда следует, что в многообразии $\mathbf{W}$ выполняется тождество $x^n \equiv 0$. Тогда по теореме Нагаты-Хигмана [3, с. 152-153] получаем, что $\mathbf{W}$ является нильпотентным. Доказательство завершено. □

Таким образом, в классе ассоциативных алгебр многообразие $\mathbf{AC}$ является единственным почти нильпотентным.

Перейдем к описанию почти нильпотентных многообразий в случае алгебр Ли. Напомним, что алгеброй Ли называется алгебра в которой выполнено тождество антикоммутативности $x^2 \equiv 0$ и тождество Якоби $(xy)z+(yz)x+(zx)y \equiv 0$. Введем обозначение Y для оператора умножения справа на элемент y. Будем записывать действие этого оператора в виде: $aY = ay$. Тогда во введенных обозначениях: $x\underbrace{y\dots y}_{m} = xY^m$, где Y^m – степень линейного оператора Y. Этим оправдывается введение этого оператора, так как нельзя использовать запись xy^m для левонормированного произведения $x\underbrace{y\dots y}_{m}$.

Рассмотрим многообразие метабелевых алгебр Ли, которое обозначим $\mathbf{A}^2$. Это многообразие определяется тождеством:

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0. \tag{2}$$

Из тождества антикоммутативности и тождества Якоби следует, что в многообразии $\mathbf{A}^2$ выполняется следующее тождество:

$$x_1(x_2x_3) = x_1x_2x_3 - x_1x_3x_2. \tag{3}$$

Из тождеств (2) и (3) получаем, что в элементах пространства $P_n(\mathbf{A}^2)$ образующие, начиная с третьей, можно менять местами: $x_1x_2x_4x_3 \equiv x_1x_2x_3x_4$. Кроме того, в алгебре Ли любой полилинейный элемент степени n от образующих $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно представить в виде линейной комбинации элементов вида $x_nx_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_{(n-1)}}$. А значит, полилинейная часть $P_n(\mathbf{A}^2)$ является линейной оболочкой следующих элементов $x_nx_ix_{i_1}...x_{i_{(n-2)}}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-2}$, которые образуют базис этого пространства (см. по этому поводу п. 4.7 монографии [1]).

Приведем основные числовые характеристики для многообразия $\mathbf{A}^2$:

$$c_n(\mathbf{A}^2) = n - 1,$$

$$\chi_n(\mathbf{A}^2) = \chi_{(n-1,1)},$$

$$l_n(\mathbf{A}^2) = 1.$$

Для разбиения $(n-1,1)$ строится диаграмма Юнга, которой соответствует тождество $x_1x_2X_1^{n-2} - x_2x_1X_1^{n-2} \equiv 0$. Воспользовавшись тождеством антикоммутативности получим, что это тождество эквивалентно так называемому тождеству энгелевости:

$$x_2X_1^{n-1} \equiv 0. \tag{4}$$

Тождество (4) не выполняется в многообразии $\mathbf{A}^2$, так в нем лежит метабелева не нильпотентная алгебра с базисом e, h и таблицей умножения $he = -eh = h, ee = hh = 0$ [1, с. 173]. В классе алгебр Ли многообразие $\mathbf{A}^2$ является единственным почти нильпотентным многообразием алгебр Ли. Сформулируем этото хорошо известный факт и реферативно приведем доказательство.

Теорема 2**.** *Пусть* $\boldsymbol{W}$ *– почти нильпотентное многообразие алгебр Ли, тогда* $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}^2$.

Доказательство. Пусть многообразие $\mathbf{W}$ является почти нильпотентным, но не совпадает с многообразием $\mathbf{A}^2$. Понятно, что не нильпотентное многообразие $\mathbf{A}^2$ не является собственным подмногообразием многообразия $\mathbf{W}$. Так как кратность $m_{(n-1,1)} = 1$, как в самом многообразии $\mathbf{A}^2$, так и в многообразии всех алгебр Ли, то в $\mathbf{W}$ выполняется тождество (4). Тогда из результата Е.И. Зельманова [9] получаем, что в $\mathbf{W}$ выполняется тождество нильпотентности некоторой ступени c, $x_0x_1x_2\dots x_c \equiv 0$. Значит, $\mathbf{W}$ – нильпотентное многообразие. Доказательство завершено. □

Таким образом, получили, что $\mathbf{A}^2$ – единственное почти нильпотентное многообразие алгебр Ли.

Перейдем к описанию почти нильпотентных многообразий в классе алгебр Лейбница. Напомним, что алгеброй Лейбница над полем Φ называется линейная алгебра, удовлетворяющая тождеству Лейбница:

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz).$$

В другом виде получаем:

$$x(yz) \equiv xyz - xzy. \tag{5}$$

Отметим, что если в последнее тождество подставить $z = y$, то получим такое следствие $x(yy) \equiv 0$, которое выполняется в любой алгебре Лейбница. Если в алгебре Лейбница выполняется тождество антикоммутативности $x^2 \equiv 0$, то тождество (5) эквивалентно тождеству Якоби. Таким образом, любая алгебра Ли является алгеброй Лейбница. И многообразие алгебр Ли $\mathbf{A}^2$ также является почти нильпотентным многообразием алгебр Лейбница.

Из тождества (5) следует, что любой элемент может быть представлен в виде линейной комбинации левонормированных элементов. Поэтому определение нильпотентной алгебры будет следующим:

алгебра называется нильпотентной алгеброй ступени m, если в ней выполняется тождество $x_1x_2\dots x_{m+1} \equiv 0$ с левонормированной расстановкой скобок, но не выполняется тождество $x_1x_2\dots x_m \equiv 0$.

В многообразии $\mathbf{N}_m$ нильпотентных алгебр Лейбница ступени m коразмерность $c_n(\mathbf{N}_m)$ равна нулю при $n > m$. Рассмотрим многообразие алгебр Лейбница ${}_2\mathbf{N}$, в котором выполнено тождество $x(yz) \equiv 0$. Полное описание этого многообразия приведено в статье [10]. Для многообразия ${}_2\mathbf{N}$ справедливо следующее разложение для характера:

$$\chi_n({}_2\mathbf{N}) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}.$$

Кроме того, соответствующие неприводимые модули порождаются полной линеаризацией следующих элементов:

$$g_{(n)} = x_1X_1^{n-1},$$

$$g_{(n-1,1)} = x_2x_1X_1^{n-2} - x_1x_2X_1^{n-2}.$$

Пусть A — некоторая алгебра Лейбница. В работе [10] показано, что линейная оболочка квадратов элементов алгебры A является идеалом, который обозначим I.

Утверждение 1. *Для любого элемента b из алгебры A и любого элемента c из идеала I выполняется равенство $bc = 0$, то есть идеал содержится в правом аннуляторе алгебры. В частности, идеал I является алгеброй с нулевым умножением.*

Для удобства читателей приведем доказательство этого утверждения.

Доказательство. Элемент вида $ab+ba$ принадлежит множеству I, так как $ab+ba = (a+b)^2-a^2-b^2$. Пусть b – элемент алгебры A, тогда произведение $a^2b = (ab)a + a(ab)$ принадлежит множеству I. Поэтому I является правым идеалом. Из тождества $x(yy) \equiv 0$ следует, что произведение ba^2 является нулевым и поэтому также принадлежит идеалу. □

Рассмотрим произведение $(a+I)(a+I) = a^2+I = I$. Значит, в фактор-алгебре A/I выполняется тождество антикоммутативности, по модулю которого тождество (3) эквивалентно тождеству Якоби, то есть фактор-алгебра A/I является алгеброй Ли.

Ранее в [11, с. 39 (следствие 2.3)] было доказано, что в классе разрешимых алгебр Лейбница существует ровно два описанных выше почти нильпотентных многообразия. Обобщим этот результат на случай всех алгебр Лейбница.

Теорема 3. *В случае нулевой характеристики основного поля существует ровно два почти нильпотентных многообразия алгебр Лейбница. Это многообразие метабелевых алгебр Ли* $\boldsymbol{A}^2$ *и многообразие левонильпотентых ступени не выше двух алгебр Лейбница* ${}_2\boldsymbol{N}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{U}$ – новое почти нильпотентное многообразие, тогда пересечение многообразий $\mathbf{U}$ и ${}_2\mathbf{N}$ является нильпотентным и тождество $x_1X_1^m \equiv 0$ выполнено в $\mathbf{U}$. Подставим в тождество $x_1X_1^m \equiv 0$ вместо x_1 сумму $y+x^2$. Так как все слагаемые вида $y\dots(x^2)\dots$ равны нулю, то в качестве следствия получаем тождество вида $x^2Y^m \equiv 0$ или эквивалентные ему

$$xyY^m \equiv -yxY^m \tag{6}$$

$$x^2f(Y_1,\dots,Y_m) \equiv 0, \text{ где } f(Y_1,\dots,Y_m) = \sum_{p\in S_m} Y_{p(1)}\dots Y_{p(m)}. \tag{7}$$

Рассмотрим алгебру Лейбница L из многообразия $\mathbf{U}$ и рассмотрим множество элементов со свойством

$$I_f = \{a|aX^m \equiv 0, \text{для любых } x \in L\}.$$

Докажем, что множество I_f является правым идеалом. Отметим, что такие идеалы, вероятно, впервые были определены в работе [12] в случае алгебр Ли. Сложность использования их в случае алгебр Лейбница состоит в том, что в алгебрах Ли правый идеал в силу антикоммутативности является одновременно и левым идеалом алгебры. В случае алгебры Лейбница этот факт необходимо доказывать отдельно в каждом конкретном случае.

Пусть a принадлежит I_f, значит $af(Y_1,\dots,Y_m) = 0$, для любых $y_1\dots,y_m \in L$. Умножим на $b \in L$ справа: $af(Y_1,\dots,Y_m)b = 0$, но с другой стороны по (5) дифференцируем при помощи b, получим:

$$abf(Y_1,\ldots,Y_m)+\sum_{s=1}^{m}af(Y_1,\ldots,[Y_s,B],\ldots,Y_m)=0.$$

По определению множества I_f каждое слагаемое суммы отдельно равно нулю. Например, $m=2$,

$$f(Y_1,\ldots,Y_m)=Y_1Y_2+Y_2Y_1.$$

$$ay_1y_2+ay_2y_1=0;$$

$$aby_1y_2+a(y_1b)y_2+ay_1(y_2b)+aby_2y_1+a(y_2b)y_1+ay_2(y_1b)=0;$$

$$a(y_1b)y_2=ay_1by_2-aby_1y_2=a[Y_1,B]Y_2.$$

Таким образом, $abf(Y_1,\ldots,Y_m)=0$, для любых $y_s\in L$. Следовательно, $ab\in I_f$.

Из тождества (6) следует, что $abX^m=-baX^m\equiv 0$ и произведение ba принадлежит идеалу I_f, значит идеал является двусторонним. Заметим, что в идеале I_f справедливо тождество $zf(Y_1,\ldots,Y_m)\equiv 0$, которое эквивалентно тождеству $zX^m\equiv 0$, то есть выполняется энгелевость, и по теореме из работы [13] идеал I_f является нильпотентным. Из тождества (6) следует, что для любого элемента a из алгебры L квадрат этого элемента a^2 принадлежит идеалу I_f, следовательно, в фактор-алгебре L/I_f выполняется тождество $x^2\equiv 0$, а значит L/I_f является алгеброй Ли.

Рассмотрим два случая: В первом случае предположим, что фактор-алгебра L/I_f не является нильпотентной алгеброй Ли. Тогда, так как L/I_f принадлежит многообразию $\mathbf{U}$, то значит, $\mathbf{A}^2$ является не нильпотентным подмногообразием $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}=\mathbf{A}^2$. Во втором случае, пусть фактор-алгебра L/I_f является нильпотентной некоторой ступени c. По определению идеала I_f в алгебре L выполняется тождество

$$y_1y_2\ldots y_{c+1}X^m\equiv 0.$$

Следовательно, также выполняется тождество энгелевости и по теореме из работы [13] многообразие $\mathbf{U}$ является нильпотентным. Что противоречит условию теоремы. □

В итоге получили, что многообразия ${}_2\mathbf{N}$ и $\mathbf{A}^2$ — единственные почти нильпотентные многообразия алгебр Лейбница. Отметим, что этот результат доказан автором совместно с Ю. Ю. Фроловой, [14].

3. Дискретная серия почти нильпотентных многообразий любых целых экспонент

Рассмотрим алгебру A, построенную в работе [4]. Эта алгебра с одной бинарной билинейной операцией определяется тремя образующими элементами a,b,z и следующими определяющими соотношениями:

1. $a^2 = b^2 = ab = ba = az = bz = 0$;

2. $(zw(R_a, R_b))(zw'(R_a, R_b)) = 0$, для любых слов w, w' от R_a и R_b;

3. $z(R_aR_b)^kR_aR_b + z(R_aR_b)^kR_bR_a = 0$,
$z(R_aR_b)^kR_a^2 = z(R_aR_b)^kR_b^2 = 0$ для всех $k \geqslant 0$.

Введем обозначение R_c для оператора правого умножения на элемент c, и символ отображения мы пишем справа от аргумента $d \in A$, а именно $dR_c{=}dc$. Такое обозначение удобно и корректно, поскольку например, R_c^3 – это степень линейного отображения, поэтому запись dR_c^3 обозначает левонормированное произведение $dccc$, которое нельзя записать dc^3.

Для полноты обзора изложим некоторые результаты, полученные в статье [4]. Базис рассматриваемой алгебры A состоит из элементов:

$$a, b, z(R_aR_b)^k, z(R_aR_b)^kR_a, z(R_aR_b)^kR_b,$$

для $k \geqslant 0$. В алгебре A выполняются следующие тождества:

$$x_1(x_2x_3) \equiv 0, \tag{8}$$

$$x_0xxx \equiv 0, \tag{9}$$

$$x_0xxy_1 \ldots y_{2s+1}yy \equiv 0. \tag{10}$$

Из тождества (8) следует, что только левонормированные многочлены относительно свободной алгебры могут иметь не нулевое значение в алгебре A.

Приведем числовые характеристики многообразия $varA$.

1. Разложение характера $\chi_n(varA)$ в сумму неприводимых имеет вид

$$\chi_{2k}(\mathbf{W}) = 2\chi_{(k,k)} + 2\chi_{(k+1,k-1)} + 2\chi_{(k,k-1,1)},$$

$$\chi_{2k+1}(\mathbf{W}) = 2\chi_{(k+2,k-1)} + 3\chi_{(k+1,k)} + 2\chi_{(k+1,k-1,1)}.$$

2. Кодлина многообразия $varA$ вычисляется по формулам

$$l_{2k}(\mathbf{W}) = 6,$$

$$l_{2k+1}(\mathbf{W}) = 7.$$

3. Экспонента многообразия $\mathrm{EXP}(varA) = 2$.

Таким образом, в работе [4] было впервые построено почти нильпотентное многообразие экспоненты два, а в статье автора [5] исследованы его числовые характеристики: определены значения кратностей, а также формулы для коразмерностей и кодлин. Используя идеи этих работ в статье [6] удалось доказать существование почти нильпотентнтых многообразий произвольной целой экспоненты.

Приведем некорорые результаты из работ [4] и [6].

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{V}$ *является ненильпотентным многообразием алгебр. Тогда существует подмногообразие* $\mathbf{W}$ *многообразия* $\mathbf{V}$, *такое что многообразие* $\mathbf{W}$ *является почти нильпотентным.*

Для любого натурального $m \geqslant 2$ определим неассоциативную алгебру A_m. Многообразие, порожденное ею, обозначим $\mathbf{U_m}$. Алгебра A_m является линейной алгеброй над основным полем, которая порождается образующими

$$\{z, a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

и удовлетворяет следующим определяющим соотношениям:

$$a_i a_j = a_i z = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant m;$$

$$(zw(R_{a_1}, \dots, R_{a_m}))(zw'(R_{a_1}, \dots, R_{a_m})) = 0,$$

для некоторых, возможно, пустых слов w, w' от операторов R_{a_i};

$$z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^k a_{i_1} \dots a_{i_s} a_{i_{s+1}} \dots a_{i_t} + z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^k a_{i_1} \dots a_{i_{s+1}} a_{i_s} \dots a_{i_t} = 0$$

для всех $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1, \dots, i_t \leqslant m$.

Отметим некоторые простые свойства алгебры A_m. Из последних соотношений следует, что

$$z(R_{a_1} R_{a_2} \dots R_{a_m})^k w(R_{a_1}, \dots, R_{a_m}) = 0,$$

где w любой ассоциативный моном, степень которого удовлетворяет таким неравенствам $2 \leqslant deg\ w < m$, а степень хотя бы по одному R_{a_i} больше 1. Кроме того, базис алгебры A_m состоит из элементов

$$a_1, a_2, \dots, a_m, z(R_{a_1} R_{a_2} \dots R_{a_m})^k, z(R_{a_1} R_{a_2} \dots R_{a_m})^k a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_t},$$

для всех $k \geqslant 0$, $1 \leqslant t < m$, и $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_t \leqslant m$.

Основной результат статьи [6] изложим в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{V}$ *ненильпотентное подмногообразие многообразия* $\mathbf{U_m}$. *Тогда* $\mathrm{EXP}(\mathbf{V}) = \mathbf{m}$.

Из этого результата и теоремы 4 как раз и следует существование почти нильпотентного многообразия экспоненты m.

Изложим схему доказательств этого основного результата.

Предложение 1. *Алгебра* A_m *удовлетворяет тождествам* $x_1(x_2x_3) \equiv 0$ *и* $x_0xxx \equiv 0$, *а также тождеству* $x_0xxz_1 \cdots z_syy$, *в котором остаток при делении* s *на* m *отличен от* $m-2$.

Выпишем некоторые конкретные следствия из тождеств. Договоримся, что будем использовать запись $X_i = R_{x_i}$ для обозначения правого умножения на образующую x_i. Применим частичную линеаризацию к тождествам из предложения 1, получим

$$x_0x_1xx_1 \equiv -x_0x_1x_1x - x_0xx_1x_1; \tag{11}$$

$$x_0x_1xwyy_1 \equiv -x_0xx_1wyy_1 - x_0x_1xwy_1y - x_0xx_1wy_1y, \tag{12}$$

где $w = Z_1 \dots Z_s$ и остаток при делении s на m отличен от $m-2$. Кроме того следствиями из полученных тождеств, является также еще и такие тождества

$$x_0X^2wyy_1 \equiv -x_0X^2wy_1y, \;\; x_0x_1xwY^2 \equiv -x_0xx_1wY^2. \tag{13}$$

Предложение 2. *Пусть $w = w(X_1, \dots, X_m)$ ассоциативный одночлен, для которого выполняется следующее условие*

$$\deg\ w - min\{\deg_{X_1} w, \dots, \deg_{X_m} w\} \cdot m \geqslant 4m. \tag{14}$$

Тогда $x_0w(X_1, \dots, X_m) \equiv 0$ является тождеством алгебры A_m.

Пусть $Q_n(\mathbf{U_m}) = \mathrm{span}\{x_0x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}$ – пространство полилинейных левонормированных одночленов относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{U_m}$. Симметрическая группа S_n действует на $Q_n(\mathbf{U_m})$ перестановкой образующих $x_1, \dots, x_n$, задавая структуру S_n-модуля. Соответствующий характер раскладывается на неприводимые S_n-характеры

$$\chi_n^Q((\mathbf{U_m})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^Q \chi_\lambda, \tag{15}$$

где m_λ^Q кратность неприводимого характера χ_λ в $\chi_n^Q((\mathbf{U_m}))$, а сумма берется по разбиениям λ числа n. Определим также последовательность $c_n^Q(\mathbf{U_m})$, $n = 1, 2, \dots$, размерностей пространств $Q_n(\mathbf{U_m})$.

Предложение 3. *Если в (15) $m_\lambda^Q \neq 0$, то выполняется неравенство $n - m \cdot \lambda_m < 4m$. Существует константа C, не зависящая от n, что для кратностей в сумме (15) выполняется неравенство $m_\lambda^Q \leqslant C$.*

Предложение 4. *Для всех $n \geqslant 1$ имеем, что $c_{n+1}(\mathbf{U_m}) = (n+1) \cdot c_n^Q(\mathbf{U_m})$.*

Следствие 1. *Для любого целого m, $m \geqslant 2$ существует почти нильпотентное многообразие экспоненты m.*

Резюмируя вышесказанное, заметим, что алгебра A_2 изученная в работе [4] получается при $m = 2$. Там же доказано, что само многообразие $\mathbf{U_2}$ является почти нильпотентным. В общем случае установлено только существование таких многообразий. Вопрос нахождения примеров многообразий целой экспоненты большей двух остается открытым.

4. Почти нильпотентные многообразия подэкспоненциального роста

Будем говорить, что рост многообразия является подэкспоненциальным, если для любого действительного числа $b > 1$ существует такое число N, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < b^n$. Другими словами, рост многообразия $\mathbf{V}$ является полиномиальным или промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным. В статье [7] был рассмотрен случай левонильпотентных ступени не выше два алгебр, то есть алгебр, в которых выполнено тождество $x(yz) \equiv 0$. В этой работе были представлены два новых многообразия, обозначенные как $\mathbf{V}_{sym}$ и $\mathbf{V}_{alt}$ и доказано, что только $\mathbf{V}_{sym}$ и $\mathbf{V}_{alt}$ являются почти нильпотентными многообразиями подэкспоненциального роста в классе левонильпотентных ступени не выше два алгебр. Для удобства читателей приведем основные положения из работы [7].

Напомним некоторые результаты, касающиеся многообразия лево нильпотентных алгебр ступени два, обозначим его как $\mathbf{L}_2\mathbf{N}$, в котором выполнено тождество $x(yz) \equiv 0$. Введем в рассмотрение многообразием алгебр $\mathbf{V}$, определенное тождествуом $x(yz) \equiv \alpha(xy)z$, для некоторого действительного числа α. Тогда как показано в работе [7] или

1. $\mathbf{V}$ является многообразием ассоциативных алгебр, случай $\alpha = 1$; или

2. $\mathbf{V} = \mathbf{L}_2\mathbf{N}$, случай $\alpha = 0$; или

3. $\mathbf{V}$ нильпотентно, случай $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$.

В последнем случае в алгебрах многообразия произведение даже всего лишь четырех сомножителей с любой расстановкой скобок равно нулю.

Хорошо известно, что в случае ассоциативных алгебр или алгебр Ли не существует многообразий промежуточного или экспоненциального роста между 1 и 2 (см. подробнее [15]). Для многообразия $\mathbf{L}_2\mathbf{N}$ ситуация совсем иная; на самом деле в работе [16] авторы построили для любого действительного $\alpha > 1$ подмногообразие $\mathbf{L}_2\mathbf{N}$, рост которого экспоненциален и равен α, а также в [17] была построена дискретная серия подмногообразий $\mathbf{L}_2\mathbf{N}$ промежуточного роста.

Для изложения основного результата работы [7] и схемы его доказательства приведем необходимые определения. Начнем с определения двух почти нильпотентных многообразий $\mathbf{V}_{sym}$ и $\mathbf{V}_{alt}$.

Определение 1. *Пусть* $\mathbf{V}_{sym}$ *– многообразие всех алгебр, удовлетворяющих следующим тождествам:*

1. $x(yz) \equiv 0$;

2. $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$.

Из этих тождеств получаем, что многообразие $\mathbf{V}_{sym}$ является многообразием алгебр Лейбница, содержащимся в $\mathbf{L}_2\mathbf{N}$, а также, что выполняется их следствие: $xyz \equiv xzy$.

Определение 2. *Пусть L – двухмерная алгебра Лейбница с базисом $\{e_1, e_2\}$ и таблицей умножения $e_2e_1 = e_1^2 = e_2, e_2^2 = e_1e_2 = 0$.*

Алгебра L была изучена в работе [10], и в данной статье приведем некоторые её свойства. В этой алгебре выполнены тождества из определения 1 и, таким образом, $L \in \mathbf{V}_{sym}$. Кроме того, $\mathbf{V}_{sym} = var(L)$ и $\chi_n(\mathbf{V}_{sym}) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$.

Теорема 6. *Пусть $\boldsymbol{V}$ – это многообразие алгебр, в котором выполнено тождество $x(yz) \equiv 0$. Тогда $L \notin \boldsymbol{V}$ тогда и только тогда, когда $x_0X_1^m \equiv 0$ выполнено в многообразии $\boldsymbol{V}$, для некоторого $m \geqslant 1$.*

Доказательство. Будем обозначать через $g(\lambda)$ многочлен соответствующий диаграмме Юнга от λ путем сопоставления элементов в каждой строке. Напомним, что $g(\lambda)$ является старшим вектором из линейной группы $GL_k(\Phi)$ где k является числом различных частей λ. $\Phi\{X\}$ свободная не ассоциативная алгебра на множестве $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ над полем нулевой характеристики Φ. Пусть $Id(\mathbf{V})$ является идеалом тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Рассмотрим базис $\{e_1, e_2\}$ алгебры L приведенный в определении 2. Так как $e_2R_{e_1}^m \neq 0$, тогда, $x_0X_1^m \notin Id(\mathbf{V})$, для любых $m \geqslant 1$. Следовательно, если для некоторых m, $x_0X_1^m \equiv 0$ является тождеством в $\mathbf{V}$ то $L \notin \mathbf{V}$.

Наоборот, если $L \notin \mathbf{V}$, то для некоторых n, существует неприводимый S_n-характер χ_λ появляющийся с кратностью m'_λ в $\chi_n(var(L)) = \chi_n(\mathbf{V}_{sym})$ и m_λ в $\chi_n(\mathbf{V})$ при $m'_\lambda > m_\lambda$. Из $\chi_n(\mathbf{V}_{sym}) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$ следует, что или $g((n)) = x_1X_1^{n-1} \equiv 0$ является тождеством многообюразия $\mathbf{V}$ или

$$g((n-1,1)) = \sum_{s=0}^{n-2} \alpha_s \bar{x}_1 X_1^s \bar{x}_2 X_1^{n-s-2} \equiv 0$$

– тождество $\mathbf{V}$, для некоторых не всех нулевых коэффициентов $\alpha_s \in \Phi$. Обратим внимание, что здесь $g((n-1,1))$ является старшим вектором $GL_2(\Phi)$ записанным как линейная комбинация старших векторов, соответствующих диаграмме Юнга для разбиения $(n-1,1) \vdash n$. Если $g((n)) = x_1X_1^{n-1} \equiv 0$ в $\mathbf{V}$ сделаем замену $x_1 = x_1 + x_0x_1$ и получим тождество $x_0X_1^n \equiv 0$.

Если $g((n-1,1)) = \sum_{s=0}^{n-2} \alpha_s \bar{x}_1 X_1^s \bar{x}_2 X_1^{n-s-2} \equiv 0$ сделаем замену $x_2 = x_1^2$ и получим $(\sum_{s=0}^{n-2} \alpha_s) x_1^2 X_1^{n-2} \equiv 0$. Если $(\sum_{s=0}^{n-2} \alpha_s) = 0$, то $g((n-1,1))$ является тождеством также для алгебры L, таким образом получили противоречие. Тогда $(\sum_{s=0}^{n-2} \alpha_s) \neq 0$, что и подразумевает $x_1^2 X_1^{n-2} \equiv 0$ выполняется в $\mathbf{V}$. Если сделать замену $x_1 = x_1 + x_0x_1$ то получаем, что $x_0X_1^n \equiv 0$ является тождеством в $\mathbf{V}$. Доказательство окончено. □

Определение 3. *Пусть A_{sym} является алгеброй над полем Φ и порождается элементом a, так, что $(aR_a^k)(aR_a^t) = 0$, при любых целых $k \geqslant 0$ and $t \geqslant 1$.*

Из определения 3 следует, что A_{sym} удовлетворяет тождествам

$$x(yz) \equiv 0 \text{ and } xyz \equiv xzy.$$

Легко увидеть, что A_{sym} является однопорожденной свободной алгеброй Лейбница. Следовательно, $\mathbf{V}_{sym} = var(A_{sym}) = var(L)$.

Теорема 7. *Каждое собственное подмногообразие $\boldsymbol{V}_{sym}$ нильпотентно.*

Перейдем к рассмотрению наименьшему многообразия, для которого кососимметрический элемент $x_0\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$ не является тождеством.

Определение 4. *Пусть $\boldsymbol{V}_{alt}$ многообразие алгебр, удовлетворяющее следующим тождествам:*

1. $x(yz) \equiv 0.$

2. $xyz \equiv -xzy.$

Действительно, многообразие $\mathbf{V}_{alt}$ содержится в многообразии $\mathbf{L}_2\mathbf{N}$. Приведем описание алгебры A_{alt} порождающей многообразие $\mathbf{V}_{alt}$.

Определение 5. *Пусть A_{alt} является алгеброй над полем Φ, которая порождается образующими $e_1, e_2, \ldots$ и удовлетворяет следующим определяющим соотношениям:*

1. $ue_ie_j = -ue_je_i$ для любого не пустого слова u в $e_1, e_2, \ldots$

2. $uv = 0$, для любого не пустого слова u, v в $e_1, e_2, \ldots$, где $|v| \geqslant 2$.

Из определения 5 следует, что $x(yz) \equiv 0$ и $xyz \equiv -xzy$ являются тождествами A_{alt}. Поэтому $\mathbf{V}_{alt} \supseteq var(A_{alt})$.

Замечание 1. *$\boldsymbol{V}_{alt} = var(A_{alt})$ и $\chi_n(\boldsymbol{V}_{alt}) = \chi_{(1^n)} + \chi_{(2,1^{n-2})}$.*

В работе [7] доказано, что любое собственное подмногообразие $\mathbf{V}_{alt}$ нильпотентно.

Теорема 8. *Пусть $\boldsymbol{V}$ является многообразием, в котором выполнено тождество $x(yz) \equiv 0$. Тогда $A_{alt} \notin \boldsymbol{V}$, тогда и только тогда, когда*

$$x_0\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m \equiv 0$$

выполнено в многообразии $\boldsymbol{V}$, для некоторого $m \geqslant 1$.

Тезисно изложим доказательство основного результата из статьи [7].

Теорема 9. *Пусть $\boldsymbol{V}$ является подмногообразием многообразия $\mathbf{L}_2\boldsymbol{N}$. Если многообразие $\boldsymbol{V}$ имеет подэкспоненциальный рост, то или $\boldsymbol{V}_{sym} \subseteq \boldsymbol{V}$ или $\boldsymbol{V}_{alt} \subseteq \boldsymbol{V}$ или $\boldsymbol{V}$ нильпотентные многообразия.*

Доказательство. Предположим, что утверждения теоремы неверны. Тогда $\mathbf{V}$ не нильпотентное многообразие, для любого $n \geqslant 1$, $P_n(\mathbf{V}) \neq 0$. Если рассмотрим S_n-строение $P_n(\mathbf{V})$, то в нем содержится неприводимый S_n-модуль $M_\lambda^{(n)}$ соответствующий разбиению $\lambda^{(n)} \vdash n$. Поэтому существует многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ и диаграмма Юнга $T_{\lambda^{(n)}}$ такая, что

$$f_{\lambda^{(n)}} = C^-_{T_\lambda^{(n)}} R^+_{T_\lambda^{(n)}} C^-_{T_\lambda^{(n)}} f(x_1, \ldots, x_n) \notin Id(\ \mathbf{V}).$$

Докажем, что последовательность разбиений $\lambda_{n\geqslant 1}^{(n)}$ удовлетворяет условиям теоремы из работы [18]. Напомним, что если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ является разбиением n, то через $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', \ldots)$ обозначим сопряженное разбиение λ.

Теорема 10. *([18]) Пусть α, $\alpha > 1$, действительное число и $\{\lambda^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ является последовательностью разбиения $\lambda^{(n)} \vdash n$, так что $\lambda_1^{(n)}, \lambda_1^{(n)'} \leqslant \frac{n}{\alpha}$. Тогда для любого $1 < \beta < \alpha$, существует n_0, такое. что для всех $n \geqslant n_0$, $d_{\lambda^{(n)}} \geqslant \beta^n$.*

Если $\mathbf{V}_{sym} \nsubseteq \mathbf{V}$, то $L \notin \mathbf{V}$ и по теореме 6, существует k, такое, что $x_0 X_1^k \equiv 0$ в $\mathbf{V}$. Поэтому можно считать, что старший вектор $g(\lambda^{(n)})$ является линейной комбинацией одночленов:

$$x_{i_1} X_1^{\alpha_1} x_{i_2} X_1^{\alpha_2} x_{i_3} \cdots x_{i_m} X_1^{\alpha_m}$$

или

$$x_1 X_1^{\alpha_0} x_{i_1} X_1^{\alpha_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} X_1^{\alpha_m}$$

где $m = n - \lambda_1^{(n)}$, $i_s \neq 1$ и $\alpha_i < k$, $0 \leqslant i \leqslant m$.

В первом случае получаем, что $\lambda_1^{(n)} < km = k(n - \lambda_1^{(n)})$ и, таким образом, $\lambda_1^{(n)} < \frac{n}{\alpha_1}$, для $\alpha_1 = \frac{k+1}{k}$. Во втором случае имеем, что $\lambda_1^{(n)} < k(m+1) \leqslant 2km = 2k(n - \lambda_1^{(n)})$ и $\lambda_1^{(n)} < \frac{n}{\alpha_2}$, для $\alpha_2 = \frac{2k+1}{2k}$.

Иначе, если многообразие $\mathbf{V}_{alt} \nsubseteq \mathbf{V}$, то $A_{alt} \notin \mathbf{V}$ и по теореме 8 существует l, такое, что $x_0 \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_l \equiv 0$ в $\mathbf{V}$. Обозначим через x_i переменные $f_{\lambda^{(n)}}$ соответствующие первому столбцу $\lambda^{(n)}$ и через y_j все остальные. Кроме того, в этом случае $f_{\lambda^{(n)}}$ является линейной комбинацией одночленов следующего вида:

$$y_{i_1} \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_{s_1} y_{i_2} \bar{x}_{s_1+1} \cdots \bar{x}_{s_1+s_2} y_{i_3} \cdots y_{i_m} \bar{x}_{s_1+\cdots+s_{m-1}+1} \cdots \bar{x}_{s_1+\cdots+s_m}$$

или

$$\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_{s_0} y_{i_1} \bar{x}_{s_0+1} \cdots \bar{x}_{s_0+s_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m} \bar{x}_{s_0+\cdots+s_{m-1}+1} \cdots \bar{x}_{s_0+\cdots+s_m}$$

где $m = n - {\lambda_1}^{(n)'}$, $s_0 \leqslant l$ и $s_i < l$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Как и в первом случае получаем, что ${\lambda'_1}^{(n)} < lm = l(n - {\lambda'_1}^{(n)})$ и ${\lambda'_1}^{(n)} < \frac{n}{\alpha_3}$ где $\alpha_3 = \frac{l+1}{l}$, а во втором случае ${\lambda'_1}^{(n)} \leqslant \frac{n}{\alpha_4}, \alpha_4 = \frac{2l+1}{2l}$. Таким образом нашли последовательность разбиений $(\lambda^{(n)}) \vdash n$ таких, что $\lambda_1^{(n)}, {\lambda'_1}^{(n)} < \frac{n}{\alpha}$, где $\alpha =$

$min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $\alpha > 1$. Пусть β - некоторая константа, удовлетворяющая условию $1 < \beta < \alpha$. По теореме 10 существует n_0, такое, что для всех $n \geqslant n_0$ $c_n(\mathbf{V}) \geqslant d_{\lambda(n)} > \beta^n$, что противоречит условию, так как многообразие $\mathbf{V}$ имеет подэкспоненциальный рост. Доказательство окончено. □

Следствие 2. *Пусть $\boldsymbol{V} \subset \mathbf{L}_2\boldsymbol{N}$ является почти нильпотентным многообразием. Если многообразие $\boldsymbol{V}$ имеет подэкспоненциальный рост, то или $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{sym}$ или $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{alt}$.*

Примеры почти нильпотентных коммутативных метабелевых многообразий подэкспоненциального роста были построены в работе [19]. Приведем формулировки предложений из этой работы.

В книге [3] построена следующая йорданова алгебра. Пусть M — векторное пространство с базисом $\{e_1, e_2, ...\}$, $\wedge(M)$ — его внешняя алгебра и $\wedge^0(M)$ — подалгебра алгебры $\wedge(M)$, порожденная множеством M. Рассмотрим пространство $C = \wedge^0(M) \oplus M$ и определим умножение в C правилом $(u + x)(v + y) = u \wedge y + v \wedge x$, где $u, v \in \wedge^0(M)$, $x, y \in M$. Известно, что многообразие $\mathbf{V}_{alt} = var(C)$, порожденное алгеброй C, является метабелевым, коммутативным, почти нильпотентным.

Рассмотрим однопорожденную алгебру $A =< a >$, такую, что $uv = 0$, $ua = au$ где u, v — неассоциативные слова данной алгебры, длины больше единицы.

Предложение 5. *Многообразие $\boldsymbol{V}_{sym} = var(A)$, порожденное алгеброй A, является метабелевым, коммутативным, почти нильпотентным.*

Теорема 11. *Пусть $\mathbf{W}$ — коммутативное метабелево многообразие, рост которого не выше экспоненциального и $\mathbf{V}_{sym}, \mathbf{V}_{alt} \nsubseteq \mathbf{W}$, тогда $\mathbf{W}$ — нильпотентное многообразие.*

Таким образом, в классе коммутативных метабелевых алгебр существует ровно два почти нильпотентных многообразия, рост которых не выше экспоненциального.

Одним из примеров почти нильпотентного антикоммутативного метабелева многообразия является многообразие $\mathbf{A}^2$ – многообразие всех метабелевых алгебр Ли. Построим еще один пример почти нильпотентного антикоммутативного метабелева многообразия [20] подэкспоненциального роста.

Определение 6. *Многообразие линейных алгебр, в котором выполнено тождество $(xy)(zt) \equiv 0$ по аналогии со случаем алгебр Ли назовем метабелевым и обозначим $\boldsymbol{MA}$.*

Выполнение тождества ассоциативности не предполагается. Рассмотрим алгебру G с бесконечным числом образующих $e_1, e_2, \ldots$ и следующим множеством определяющих соотношений:

1. $we_i = -e_iw$, где w – любой моном, $|w| \geq 1$.

2. $w_1 w_2 = 0$, где мономы $w_1, w_2 \in G^2$, то есть $|w_1| \geq 2, |w_2| \geq 2$.

3. $e_{i_{p(1)}} e_{i_{p(2)}} \dots e_{i_{p(m)}} = (-1)^p e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}$, где p – перестановка из симметрической группы S_m, $(-1)^p = \pm 1$ в зависимости от чётности перестановки.

Предложение 6. *Многообразие* $\boldsymbol{V}_{anti} = var(G)$, *порожденное алгеброй* G, *является почти нильпотентным антикоммутативным метабелевым.*

Используя основной результат работы [18], удалось доказать, что других примеров почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий $\mathbf{MA}$ подэкспоненциального роста, кроме двух перечисленных, нет.

Теорема 12. *Пусть* $\boldsymbol{V}$ *– антикоммутативное метабелево многообразие подэкспоненциального роста над полем нулевой характеристики. Если* $\boldsymbol{A}^2 \notin \boldsymbol{V}$ *и* $\boldsymbol{V}_{anti} \notin \boldsymbol{V}$, *то* $\mathbf{V}$ *– нильпотентно.*

Доказательства теорем 11 и 12 в настоящий момент находятся на этапе детальной проработки и будут опубликованы в отдельной совместной статье авторов тезисов [19] и [20].

5. Заключение

В данной статье в случае нулевой характеристики основного поля приведены описания всех почти нильпотентных многообразий в следующих классах линейных алгебр: в классе ассоциативных алгебр, в классе алгебр Ли и алгебр Лейбница, а также в классе левонильпотентных ступени два, коммутативных метабелевых и антикоммутативных метабелевых. В последних трех классах алгебр результаты изложены с ограничением на рост многообразия, который должен быть подэкспоненциальным, то есть либо промежуточным, либо полиномиальным.

Кроме того, в работе предъявлена пример почти нильпотентного многообразия с экспонентой равной двум, а также доказано существование дискретной серии почти нильпотентных многообразий с различными произвольными целыми экспонентами.

Выражаю благодарность моему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Сергею Петровичу Мищенко за полезные советы и помощь в данном направлении исследований, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.
2. Giambruno, A., Zaicev, M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods // Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, 2005. Vol. 122. 352 p.
3. Кольца, близкие к ассоциативным / А. И. Ширшов [и др.]. М. : Наука, 1978. 432 с.
4. Mishchenko, S., Valenti, A. An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics, Vol. 199 (2014). Issue 1. P. 241–257.
5. Шулежко, О. В. Новые свойства почти нильпотентного многообразия экспоненты два // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2014. Т. 14, вып. 3. С. 316–320.
6. Мищенко, С. П., Шулежко, О. В. Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика и механика, 2015. №2. С. 53–57.
7. Mishchenko, S., Valenti, A. On almost nilpotent varieties of subexponential growth // Journal of Algebra, 2015. Vol. 423. P. 902–915.
8. Мищенко, С. П. Многообразия линейных алгебр кодлины один // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2010. №1. С. 25—30.
9. Зельманов, Е. И. Об энгелевых алгебрах Ли // ДАН СССР, 1987. Т. 292, № 2. С. 265–268.
10. Drensky, V., Piacentini Cattaneo, G.M. Varieties of metabelian Leibniz algebras // J. Algebra and its Applications. 2002. Vol. 1. P. 31–50.
11. Череватенко, О. И. Некоторые эффекты роста тождеств линейных алгебр: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск, 2008. 69 с.
12. Higgins, P. J. Lie rings satisfying the Engel condition // Proc. Cambr. Philos. Soc., 1954. Vol. 50. №1. P. 8–15.
13. Фролова, Ю. Ю. О нильпотентности энгелевой алгебры Лейбница // Вестник Московского государственного университета. Серия 1, Математика. Механика, 2011. №. 3. С. 63–65.

14. Фролова, Ю. Ю., Шулежко, О. В. О почти нильпотентных многообразиях алгебр Лейбница // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. XI Междунар. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. С. 84–85.

15. Мищенко, С. П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. № 6(276).С. 25–45.

16. Giambruno, A., Mishchenko, S., Zaicev, M. Codimensions of algebras and growth functions // Adv. Math. 2008. Vol. 217. Issue 3. P. 1027–1052.

17. Giambruno, A., Mishchenko, S., Zaicev, M. Algebras with intermediate growth of the codimensions // Advances in Applied Mathematics, 2006. Vol. 37. № 3. P. 360–377.

18. Giambruno, A., Mishchenko, S. P. Irreducible characters of the symmetric group and exponential growth [Электронныйресурс] // arXiv:1406.1653.2014. Режим доступа: http://arxiv.org/pdf/1406.1653.pdf

19. Чанг, Н. Т. К, Фролова, Ю. Ю. Почти нильпотентные коммутативные метабелевы многообразия рост которых не выше экспоненциального // международная конференция Мальцевские чтения: тезисы докладов, 2014. С. 113.

20. Мищенко, С. П., Шулежко, О. В. Описание почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий с подэкспоненциальным ростом // международная конференция Мальцевские чтения: тезисы докладов, 2014. С. 110.

REFERENCES

1. Bahturin, Y. A. 1985, "Identities in algebras Lie", *Science, Moscow*, 448 p. (Russian)

2. Giambruno, A. & Zaicev, M. 2005, "Polynomial Identities and Asymptotic Methods", *Math. Surv. and Monographs*, vol. 122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 352 p.

3. Shirshov, A. I., Zhevlakov, K. A., Slin'ko, A. M. & Shestakov, I. P. 1978, "Rings that are nearly associative.", *Nauka, Moscow*, 432 p. (Russian)

4. Mishchenko, S. & Valenti, A. 2014, "An almost nilpotent variety of exponent 2", *Israel J. of Math.*, vol. 199, issue 1, pp. 241–257. doi: 10.1007/s11856-013-0029-4

5. Shulezhko, O. V. 2014, "New Properties of Almost Nilpotent Veriety of Exponent 2", *Izv. Saratovskogo Univ. Nov.ser. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika,* vol. 14, issue 3, pp. 316–320. (Russian)

6. Mishchenko, S. P. & Shulezhko O. V. 2015, "An almost nilpotent variety of any integer exponent", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh.*, no. 2, pp. 53–57. (Russian)

7. Mishchenko, S. & Valenti, A. 2015, "On almost nilpotent varieties of subexponential growth", *Journal of Algebra*, vol. 423, pp. 902–915. doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.038

8. Mishchenko, S. P. 2010, "Varieties of linear algebras with colength one", *Vestnik Moscow University, Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 1, pp. 25–30. (Russian)

9. Zelmanov, E. I. 1987, "About Engel Lie algebras", *DAN USSR*, vol. 292, no. 2, pp. 265–268. (Russian)

10. Drensky, V. & Piacentini Cattaneo, G. M. 2002, "Varieties of Metabelian Leibniz Algebras" , *J. Algebra and its applications*, vol. 1 , no. 1, pp. 31–50. doi: 10.1142/S0219498802000033

11. Cherevatenko, O. I. 2008, "Some effects of codimension growth of linear algebra" : diss. ... cand. of sciences: *Ulyanovsk*, 69 pp. (Russian)

12. Higgins, P. J. 1954, "Lie rings satisfying the Engel condition", *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, vol. 50, no. 1, pp.8–15.

    doi: http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100029017

13. Frolova, Yu. Yu. 2011, "On the nilpotency of Engel Leibniz algebra", *Vestnik Moscow State university.Seriya 1, Mathematika. Mechanika*, no. 3, pp. 63–65. (Russian)

14. Frolova Yu. Yu. & Shulezhko O. V. 2013. "Almost nilpotent varieties of Leibniz algebras", *Algebra and number theory: Contemporary Issues and Applications: paper of XI Intern. Conf. Saratov*, Sarat. University, pp. 84–85. (Russian)

15. Mishchenko, S. P. 1990, "Growth of varieties of Lie algebras", *Uspekhi Mat. Nauk*, no. 45 , pp. 25–45. (Russian)

16. Giambruno, A., Mishchenko, S. & Zaicev, M. 2008, "Codimensions of algebras and growth functions", *Adv. Math.* vol. 217, issue 3, pp. 1027–1052. doi: 10.1016/j.aim.2007.07.008

17. Giambruno, A., Mishchenko, S. & Zaicev, M. 2006, "Algebras with intermediate growth of the codimensions", *Advances in Applied Mathematics*, vol. 37, no. 3, pp. 360–377. doi: 10.1016/j.aam.2005.02.005

18. Giambruno, A. & Mishchenko, S. P. 2014, "Irreducible characters of the symmetric group and exponential growth", arXiv:1406.1653. Available at:

    http://arxiv.org/pdf/1406.1653.pdf

19. Chang, N. T. K. & Frolova Yu. Yu. 2014, "Almost commutative metabelian nilpotent varieties growth not higher than exponential" , *International Conference "Mal'tsev Readings": 10–13 November 2014.* Novosibirsk, pp. 119. Available at:

http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf (Russian)

20. Mishchenko S. P. & Shulezhko O. V. 2014, "Description almost nilpotent anticommutative metabelian varieties with subexponential growth" , *International Conference "Mal'tsev Readings": 10–13 November 2014.* Novosibirsk, pp. 104. Available at:

http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf (Russian)

Ульяновский государственный университет.
Получено 1.03.2015