ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 519.4

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-279-297

70-ЛЕТИЕ ПРОФЕССОРА ВАЛЕРИЯ ГЕОРГИЕВИЧА ДУРНЕВА

В. Н. Безверхний (г. Москва), А. Е. Устян (г. Тула), И. В. Добрынина (г. Тула)

Аннотация

В статье рассматривается деятельность выдающегося специалиста в области алгоритмических вопросов алгебры и математической логики, профессора, доктора физикоматематических наук, заведующего кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова Валерия Георгиевича Дурнева. Дается краткий обзор его основных научных результатов, приводятся достижения в педагогической, организационной деятельности, излагаются биографические сведения.

Ключевые слова: уравнения в полугруппах и группах, позитивные теории.

Библиография: 51 название.

THE 70TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR VALERY GEORGIEVICH DURNEV

V. N. Bezverkhnii (Moscow), A. E. Ustyan (Tula), I. V. Dobrynina (Tula)

Abstract

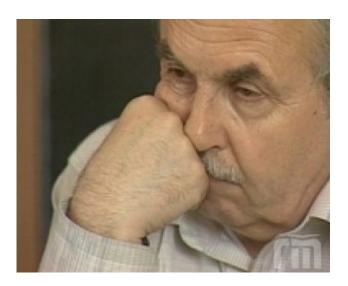
This article considers activities of an outstanding expert in the field of algorithmic issues of algebra and mathematical logic Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing of the P.G. Demidov Yaroslavl State University Valeriy Georgievich Durnev. It provides a brief overview of his main scientific results, touches upon achievements in pedagogical and organizational activities, and includes biographical information.

Keywords: equations in semigroups and groups, positive theory.

Bibliography: 51 titles.

1. Введение

Валерий Георгиевич Дурнев — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова, выдающийся ученый в области алгоритмических вопросов алгебры и математической логики. Десять лет возглавлял диссертационный совет по специальностям "01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел" и "01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика", член редколлегии журнала "Чебышевский сборник".



2. Биография

Валерий Георгиевич Дурнев родился 22 октября 1946 года в поселке ИТР, пригороде г. Алексин, Тульской области. Учился в поселковой 7-летней школе. В начале 60-ых годов, переехав в центральную часть г. Алексин, перевелся в АСШ № 13. Окончил школу в 1965 году и поступил на математический факультет Тульского государственного педагогического института (ТГПИ) имени Л. Н. Толстого.

С первых же дней обучения в ТГПИ проявил незаурядные математические способности, стремление к самостоятельному получению знаний. Постоянное чтение дополнительной математической литературы для Валерия Георгиевича стало каждодневной необходимостью. Результатом упорного труда над программными материалами и большой самостоятельной работы в последствии стало получение в 1969 году диплома с отличием.

- С 05.05.1970 служил в рядах Советской Армии.
- С 23.06.1971 по 3.08.1971 ассистент кафедры алгебры ТГПИ.
- С 1.09.1971 аспирант кафедры алгебры ТГПИ, научный руководитель М. Д. Гриндлингер.

До окончания аспирантуры защитил (февраль 1974) диссертацию "Позитивные теории свободных полугрупп" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности "01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел" в диссертационном совете при математическом факультете МГПИ им. В. И. Ленина.

- С 16.02.1974 по 31.08.1975 ассистент кафедры алгебры ТГПИ.
- С 01.09.1975 года по настоящее время работает в Ярославском государственном университете (в настоящее время носит имя Π . Γ . Демидова):
 - с 01.09.1975 по 11.03.1980 старший преподаватель кафедры алгебры и теории функций;
 - с 02.02.1980 по 08.09.1986 заместитель декана математического факультета;
 - с 11.03.1980 по 15.09.1998 доцент кафедры алгебры;
 - с 15.09. 1998 по 16.06.2003 профессор кафедры алгебры и математической логики;
- с 16.06. 2003 заведующий кафедрой теоретической кибернетики, преобразованной позже в кафедру компьютерной безопасности и математических методов обработки информации.
- 10.11.1988 избран на должность декана математического факультета, на которой проработал 20 лет.
- В 1998 году в диссертационном совете при механико-математическом факультете МГУ защитил диссертацию "Исследование некоторых алгоритмических проблем для свободных

групп и полугрупп" на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности "01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел".

3. Преподавательская, организационная деятельность

Валерий Георгиевич прочитал немало общих и специальных курсов для студентов специальностей "Математика", "Математика и компьютерные науки", "Компьютерная безопасность". Вот основные из них: "Алгебра", "Общая алгебра", "Элементы теории множеств и математической логики", "Дискретная математика", "Математическая логика и приложения в компьютерных науках", "Математическая логика и теория алгоритмов", "Теория алгоритмов", "Сложность вычислений", "Алгоритмически неразрешимые проблемы", "10-ая проблема Д. Гильберта", "Криптографические методы защиты информации", "Теоретические основы компьютерной безопасности", "Модели безопасности компьютерных систем".

- В. Г. Дурнев обеспечивает преподаваемые курсы учебными пособиями. Им опубликованы следующие пособия:
- 1. В. Г. Дурнев. Элементы теории множеств и математической логики. Ярославль, ЯрГУ. 1977. 5, 5 п.л.
- 2. В. Г. Дурнев. Неразрешимые фрагменты элементарных теорий свободных полугрупп. Ярославль, ЯрГУ. 2001. 4,95 п.л. (Гриф НМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов $P\Phi$).
- 3. В. Г. Дурнев. Введение в математическую логику. Ярославль, ЯрГУ. 2005. 21,85 п.л. (Гриф НМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).
- 4. В. Г. Дурнев. Элементы математической логики. Ярославль, ЯрГУ. 2006. 28,36 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).
- 5. В. Г. Дурнев. Элементы теории алгоритмов. Ярославль, ЯрГУ. 2008. 28,82 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).
- 6. В. Г. Дурнев. Элементы теории множеств и математической логики. Ярославль, ЯрГУ. 2009. 47,87 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов Р Φ).
- 7. В. Г. Дурнев, М. А. Башкин, О. П. Якимова. Элементы дискретной математики. Часть І. Ярославль, ЯрГУ. 2007. 20,46 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебнометодического объединения университетов $P\Phi$).
- 8. В. Г. Дурнев, М. А. Башкин, О. П. Якимова. Элементы дискретной математики. Часть ІІ. Ярославль, ЯрГУ. 2007. 20,46 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебнометодического объединения университетов РФ).

За годы деканства ему удалось открыть:

- 1) новую специальность "Компьютерная безопасность";
- 2) докторантуру по специальности "01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел";
- 3) диссертационный совет по специальностям "01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел" и "01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика". В. Г. Дурнев десять лет был его председателем. Сначала совет принимал к защите только кандидатские диссертации, потом и докторские диссертации. В совете защищались соискатели из Архангельска, Вологды, Иваново, Майкопа, Москвы, Перми, Ростова на Дону, Санкт-Петербурга, Саратова, Таганрога, Твери, Тулы и Ярославля.

4. Научная деятельность

На становление Валерия Георгиевича как ученого большое влияние оказали Мартин Давидович Гриндлингер, Сергей Иванович Адян и Олег Борисович Лупанов.

Следуя работе [51], приведем основные результаты научной работы В. Г. Дурнева.

4.1. Алгоритмическая неразрешимость простых фрагментов элементарных теорий свободных полугрупп

А. Тарским была поставлена проблема, опубликованная М. И. Каргаполовым в "Коуровской тетради" в 1965 году: разрешима ли элементарная теория свободной группы?

В 2005 году О. Г. Харлампович и А. Г. Мясниковым данная проблема положительно решена.

А. Г. Маканиным в 1984 году доказана разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы.

Обозначим через Π_n свободную полугруппу ранга n со свободными образующими $a_1, ..., a_n$. Как обычно в случае n=2,3 вместо a_1, a_2 и a_3 пишем a, b и c соответственно.

Исследование элементарной теории свободной полугруппы было начато В. Куайном, который в 1946 г. доказал, что при $n \geqslant 2$ элементарная теория свободной полугруппы Π_n алгоритмически неразрешима.

После этого был почти 30-летний перерыв и лишь с начала 70-ых годов появились работы, в которых основное внимание уделялось исследованию вопроса об алгоритмической разрешимости фрагментов элементарных теорий свободных полугрупп.

В 1973 г. в работах [3], [4] В. Г. Дурневым доказана неразрешимость фрагмента элементарной теории свободной полугруппы Π_n при $n \geq 2$, состоящего из позитивных формул, т. е. формул без отрицания, с кванторной приставкой типа $\exists \forall \exists^3$. С. С. Марченков доказал неразрешимость позитивной $\forall \exists^4$ - теории свободной полугруппы, это улучшает результат работы [3] с точки зрения числа кванторных блоков в рассматриваемых формулах, но при этом общее число используемых кванторов в работах С. С. Марченкова и В. Г. Дурнева одно и тоже. В работе [6] доказана алгоритмическая неразрешимость позитивной $\forall \exists^3$ - теории свободной полугруппы Π_n при $n \geq 2$, что усиливает результаты перечисленных работ.

В описанных выше исследованиях основное внимание уделялось лишь кванторным приставкам рассматриваемых формул. При этом бескванторная часть формул из работ [3] и [4] была достаточно простой, сами формулы имели вид

$$(\forall x)(\exists y_1)\dots(\exists y_t) \bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, y_1, \dots, y_t, a, b) = u_i(x, y_1, \dots, y_t, a, b),$$

где $w_i(x, y_1, \dots, y_t, a, b)$ и $u_i(x, y_1, \dots, y_t, a, b)$ $(1 \le i \le m)$ — слова в алфавите $\{x, y_1, \dots, y_t, a, b\}$, t = 4 в работе С. С. Марченкова, а в работе [6] t = 3. Однако в обеих этих работах m достаточно большое.

В последнее время В. Г. Дурневу удалось получить дальнейшее продвижение в исследовании этого вопроса с точки зрения упрощения бескванторной части доказав, что

невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной позитивной формуле вида

$$(\forall x)(\exists y_1)\dots(\exists y_5) w(x, y_1, \dots, y_5, a, b) = u(x, y_1, \dots, y_5, a, b),$$

где $w(x, y_1, \ldots, y_5, a, b)$ и $u(x, y_1, \ldots, y_5, a, b)$ — слова в алфавите $\{x, y_1, \ldots, y_5, a, b\}$, определить, истинна ли она на свободной полугруппе Π_2 .

Во всех указанных выше работах авторы придерживались фактически "классического" понимания кванторов общности ∀ и существования ∃. Попытка "конструктивного" понимания кванторов привела к доказательству следующего утверждения.

Определим на словах в произвольном алфавите Σ два отношения < и \subset :

$$U < V \iff$$
 слово U — начало слова V , $U \subset V \iff$ слово U — подслово слова V .

Можно построить такую формулу $\Phi(w)$ с одной свободной переменной w, имеющую вид

$$(\exists v) (\forall x)_{x < t} (\exists x_1)_{x_1 \subset t_1} \dots (\exists x_9)_{x_9 \subset t_9} U = V,$$

 $r\partial e\ t,\ t_1,\ \ldots,\ t_9,\ U\ u\ V\ -$ слова в алфавите

$$\{w, v, x, x_1, ..., x_9, a, b, c\},\$$

что не существует алгоритма, позволяющего по произвольному элементу W полугруппы Π_2 определить истинна ли на полугруппе Π_3 формула $\Phi(W)$.

В работе [7] установлена алгоримимческая неразрешимость простого фрагмента позитивной теории с одной константой свободной полугруппы ранга 2.

Рассмотрим далее результаты по группам.

В работе Ю. И. Мерзлякова было доказано, что позитивные теории любых двух свободных нециклических групп совпадают.

В работе [1] установлено, если все группы многообразия групп U являются разрешимыми, то позитивные теории любых двух свободных групп этого многообразия U различных конечных рангов различны.

Этот результат позже усиливался и уточнялся в работе [34] и работах некоторых других авторов.

Близкие вопросы исследованы в работах Sacerdote G. S.

На основе полученных Л. С. Казариным [35] результатов о связи порядков элементов симметрических групп S(n) и S(n+1), линейных групп GL(n,Z) и GL(n+1,Z), SL(n,Z) и SL(n+1,Z) в работе [35] исследован вопрос об универсальной эквивалентности этих групп. Эти результаты можно рассматривать как некоторое уточнение результатов А. И. Мальцева об элементарных теориях линейных групп. В работах [36] и [37] установлена алгоритмическая неразрешимость некоторых ограниченных теорий групп SL(n,Z) и GL(n,Z) при $n \ge 3$.

4.2. Уравнения в свободных полугруппах

Первые результаты в исследовании систем уравнений в свободных полугруппах, получивших названия *уравнения в словах* были получены А. А. Марковым и Ю. И. Хмелевским в конце 60-х годов.

В эти же годы было начато изучение систем уравнений в словах и длинах, т. е. систем вида

где через |x| = |y| обозначен предикат " ∂ лины слов x и y равны".

Первые результаты в исследовании систем уравнений в словах и длинах были получены в начале 70-х годов в работах Ю. В. Матиясевича и Н. К. Косовского.

В 1972-73 годах В. Г. Дурнев начал рассматривать системы уравнений в словах и длинах с дополнительным предикатом $|x|_a = |y|_a$ — "проекции слов x и y на выделенную букву а равни". В работе [8], вышедшей из печати в 1974 году, в частности, доказано, что

можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений в свободной полугруппе Π_2 ,

$$w(x, x_1, ..., x_n, a, b) = v(x, x_1, ..., x_n, a, b) \&$$

$$\underset{\{i,j\} \in A}{\&} (|x_i| = |x_j| \& |x_i|_a = |x_j|_a)$$

с неизвестными $x_1, ..., x_n$, с константами а и b и с параметром x, где A — некоторое подмножество множества $M(n) = \{\{t,s\} | 1 \le t,s \le n\}$ всех неупорядоченных пар натуральных чисел, не превосходящих n, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение

$$w(a^{m}, x_{1},...,x_{n}, a, b) = v(a^{m}, x_{1},..., x_{n}, a, b) \&$$

$$\underset{\{i,j\} \in A}{\&} (|x_{i}| = |x_{j}| \& |x_{i}|_{a} = |x_{j}|_{a}).$$

В этой же работе отмечалось, что аналогичный результат остается верным, если предикат $|x| = |y| \& |x|_a = |y|_a$ заменить предикатом $|x|_b = |y|_b \& |x|_a = |y|_a$.

Аналогичный результат содержался в опубликованной в 1988 году работе J. R. Buchi и S. Senger.

В 1976 году Γ . С. Маканин получил в теории уравнений в словах фундаментальный результат, который был опубликован в 1977 году, — он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнеий в свободной полугруппе Π_m определить, имеет ли она решение. Несколько позже Γ . С. Маканин построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение.

После фундаментальных результатов Г. С. Маканина особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных полугруппах и группах с различными "не слишком сложными" и "достаточно естественными" ограничениями на решения.

В серии работ [10], [11], [12], [13] и [14] рассматривались ограничения на решения типа $x \in L$, где L — некоторый "не слишком сложный" и "достаточно естественный" язык. В качестве таких языков рассматривались, прежде всего, язык L_1 , состоящий из всех таких слов в алфавите $\{a,b\}$, в которых число вхождений буквы a равно числу вхождений буквы b, и язык L_2 , состоящий из всех таких слов в алфавите $\{a,b\}$, в которых число вхождений буквы a в два раза больше числа вхождений буквы b.

Были доказаны, в частности, следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_2 ,

$$w(x, x_1, ..., x_n, a, b) = v(x, x_1, ..., x_n, a, b) \& \bigotimes_{i=3}^{p} (x_i \in L_1) \& |x_1| = |x_2|$$

c неизвестными $x_1, ..., x_n$, c константами a u b u c параметром x, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение

$$w(a^m, x_1, ..., x_n, a, b) = v(a^m, x_1, ..., x_n, a, b) \& \bigotimes_{i=3}^{p} (x_i \in L_1) \& |x_1| = |x_2|.$$

ТЕОРЕМА 2. Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_2 ,

$$w(x, x_1, ..., x_n, a, b) = v(x, x_1, ..., x_n, a, b) \& \underset{\{i,j\} \in A}{\&} |x_i| = |x_j| \& x_1 \in L_1$$

с неизвестными $x_1, ..., x_n$, с константами а и в и с параметром x, где A — некоторое подмножество множества $M(n) = \{\{t,s\} | 1 \le t, s \le n\}$ всех неупорядоченных пар натуральных чисел, не превосходящих n, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение

$$w(a^{m}, x_{1},...,x_{n}, a, b) = v(a^{m}, x_{1},..., x_{n}, a, b) \& \& \& |x_{i}| = |x_{j}| \& x_{1} \in L_{1}.$$

ТЕОРЕМА 3. Можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_2 ,

$$w(x, x_1, ..., x_n, a, b) = v(x, x_1, ..., x_n, a, b) \&$$

$$& & & \\ & &$$

c неизвестными x_1, \ldots, x_n, c константами a и b и c параметром x, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение система уравнений

$$w(a^m, x_1, ..., x_n, a, b) = v(a^m, x_1, ..., x_n, a, b) \&$$

$$& & & \\$$

Введем в рассмотрение язык $L \subseteq \Pi_3$: $L = (L_1c)^p(L_2c)^q$.

ТЕОРЕМА 4. Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_3 ,

$$W(x, x_1, ..., x_{n+1}, a, b, c) = V(x, x_1, ..., x_{n+1}, a, b, c) \&$$
 & $x_{n+1} \in L$.

с неизвестными $x_1, ..., x_{n+1}$, с константами a, b и с и с параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение

$$W(a^m, x_1, ..., x_{n+1}, a, b, c) = V(a^m, x_1, ..., x_{n+1}, a, b, c) \& x_{n+1} \in L.$$

В работе [48] доказывается алгоритмическая неразрешимость проблемы совместности для систем уравнений и неравенств в словах и длинах на свободной нециклической полугруппе Π_m .

В серии работ [15], [16] и [17] рассматривались системы уравнений в свободных полугруппах с эндоморфизмами и автоморфизмами. Эта тематика ведет свое начало от работ Уайтхэда по проблеме автоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы. В этих работах установлена алгоритмическая неразрешимость ряда проблем для систем уравнений в свободных полугруппах в словах, длинах и с эндоморфизмами и автоморфизмами.

В работе [10] установлена NP-полнота проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободной полугруппы счетного ранга.

4.3. Уравнения и их системы в группах

Изучение уравнений и их систем в свободных группах было начато в середине прошлого века прежде всего американскими математиками в связи с исследованиями по проблеме А. Тарского относительно элементарных теорий свободных групп. Важные результаты в этой области были получены Ю. И. Хмелевским.

В 1982 году Г. С. Маканин получил в теории уравнений в свободных группах фундаментальный результат – он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение. А. А. Разборов построил описание множества всех решений для произвольного разрешимого в свободной группе уравнения.

После фундаментальных результатов Г. С. Маканина особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных группах с различными "не слишком сложными" и "достаточно естественными" ограничениями на решения.

В серии работ [8], [19], [20], [21], [22] и [23] рассматривались ограничения на решения типа $x \in F_n^{(m)}$, где $F_n^{(m)} - m$ -ый коммутант свободной группы F_n .

Были доказаны, в частности, следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 5. В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1$$

c неизвестными $x_1, x_2,..., x_n$, константами a u b u параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(1)}, \ldots, x_t \in F_2^{(1)},$$

idet — некоторое фиксированное число между 1 и n.

 ${\it Teopema}$ 6. В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1$$

с неизвестными $x_1, x_2,..., x_n$, константами а и b и параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b) = 1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(2)}$$
.

ТЕОРЕМА 7. В свободной группе F_3 со свободными образующими a, b и c можно построить такое уравнение

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b, c) = 1$$

c неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$, константами a, b и c и параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(a^k, x_1, \ldots, x_n, a, b, c) = 1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in P_3$$

 P_3 — подгруппа чистых или гладких элементов группы F_3 .

По аналогии с группами кос элемент свободной группы F_n мы называем *чистым* или $sna\partial \kappa u m$ элементом, если при удалении из его записи любого образующего элемента группы F_n он обращается в единицу. Множество P_n всех гладких элементов свободной группы F_n является ее нормальной подгруппой, но бесконечного индекса. В связи с рассматриваемым вопросом интересны результаты, полученные А. Ш. Малхасяном.

В ряде работ рассматривались уравнения в свободных группах, разрешенные относительно неизвестных, т.е. уравнения вида $w(x_1,\ldots,x_m)=g(a_1,\ldots,a_n)$. При этом считалось, что проблема разрешимости для таких уравнений "проще", чем проблема разрешимости для произвольных уравнений. Однако в [24] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. По произвольному уравнению

$$w(x_1, ..., x_n, a, b) = 1 (1)$$

в свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое разрешенное относительно неизвестных уравнение

$$u(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = [a, b], (2)$$

где $u(x_1,...,x_n,x_{n+1},x_{n+2})$ — групповое слово в алфавите неизвестных $\{x_1,...,x_n,x_{n+1},x_{n+2}\}$, а [a,b] — коммутатор элементов а u b, m.e. $[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$, что уравнение (1) имеет решение в свободной группе F_2 тогда u только тогда, когда имеет решение уравнение (2).

Это позволило доказать следующие теоремы [25], [26].

ТЕОРЕМА 9. В свободной группе F_2 со свободными образующими а и в можно построить такое семейство разрешенных относительно неизвестных уравнений

$$w(x, x_1, \ldots, x_n) = [a, b],$$

где $w(x, x_1, ..., x_n)$ — групповое слово в алфавите неизвестных $x, x_1, x_2, ..., x_n$, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(x^k, x_1, \ldots, x_n) = [a, b],$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(1)}, \dots, x_t \in F_2^{(1)},$$

 $rde\ t\ -\ некотороe\ фиксированное\ число\ между\ 1\ u\ n.$

 ${\it Teopema~10.}~He {\it возможен~a}$ алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению ${\it видa}$

$$w(x_1, ..., x_n) = [a, b]$$

в свободной группе F_2 определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \, ..., \, g_n, \,$ что

$$g_1 \in F_2^{(2)}$$
.

ТЕОРЕМА 11. Проблема разрешимости в свободной группе F_2 для уравнений вида $w(x_1, \ldots, x_n) = [a, b]$, где $w(x_1, \ldots, x_n) - c$ лово в алфавите неизвестных, а $[a, b] - \kappa$ оммутатор свободных образующих а и в группы F_2 является NP-трудной.

Используя предыдущие результаты, в работе [28] показывается, что коммутант свободной нециклической группы не является формульной подгруппой, что дает ответ на один вопрос А. И. Мальцева из "Коуровской тетради".

ТЕОРЕМА 12. При любом $m \geq 2$ невозможно построить формулу $CF_m(x)$ языка первого порядка с равенством групповой сигнатуры, содержащей обозначения для групповой операции \cdot , обращения $^{-1}$ и константные символы для свободных образующих $a_1, ..., a_m, c$ одной свободной переменной x такую, что для произвольного элемента g свободной группы F_m справедлива эквивалентность:

формула $CF_m(g)$ истинна на группе F_m тогда и только тогда, когда элемент g принадлежит коммутанту $F_m^{(1)}$ группы F_m .

Далее отметим еще один результат.

В работе Coulbois установлена финитная неаппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости произвольных уравнений. Ранее была известна финитная аппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости уравнений вида $x^n = g$, [x, y] = g и $x^{-1}hx = g$, где g и h — элементы свободной группы, а x и y — неизвестные.

В работе [27] построено уравнение вида

$$w(x_1,\ldots,x_6) = [a,b],$$

где a и b — свободные образующие свободной группы F_2 , которое не имеет решения в этой группе, но имеет решение в любой ее конечной факторгруппе.

В работе [29] установлена неразрешимость позитивной З-теории произвольной нециклической свободной нильпотентной группы, в частности, свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и ранга 2. Этот результат можно рассматривать как уточнее известного результата А. И. Мальцева о неразрешимости элементарной теории произвольной нециклической свободной нильпотентной группы и как некоторое дополнение к результатам В. А. Романькова, установившего, в частности, алгоритмическую неразрешимость проблемы существования решения для уравнений, разрешенных относительно неизвестных, в свободных нильпотентных группах ступени нильпотентности > 9 и достаточно большого ранга. В работе Н. Н. Репина установлена, в частности, алгоритмическая неразрешимость проблемы существования решения для уравнений в свободных нильпотентных группах ступени нильпотентности 5 и ранга 2. В то же время в работе [29] доказана алгоритмическая разрешимость проблемы существования решения для уравнений в свободной нильпотентной группе ступени нильпотентности 2 и ранга 2 и алгоритмическая неразрешимость проблемы существования решения для систем уравнений в этой группе. Эта группа может быть задана двумя образующими элементами и двумя определяющими соотношениями. Базируясь на результатах работы [29], Н. Н. Репин построил группу с тремя образующими элементами и двумя определяющими соотношениями, для которой алгоритмически неразрешима проблема существования решения для уравнений. Дальнейшее продвижение в этих исследованиях в статье В. Э. Шпильрайна.

В работе [30] установлена алгоритмическая неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и достаточно большого ранга и алгоритмическая разрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и ранга 2. Эти результаты можно рассматривать в качестве дополнения к результатам В. А. Романькова об алгоритмической неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободных нильпотентных группах ступени нильпотентности ≥ 9 и достаточно большого ранга.

Дальнейшее развитие этой тематики происходит в работе [31].

В [32] исследовано на свободной метабелевой группе ранга 2 уравнение

$$zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$$

из работы А. И. Мальцева, рассматривавшего это уравнение на свободной группе ранга 2. В. Г. Дурнев называет это уравнение уравнением Мальцева-Нильсена. Показано, что для свободной метабелевой группы ранга 2 справедлива теорема, аналогичная теореме А. И. Мальцева для свободной группы:

элементы x и y свободной метабелевой группы со свободными образующими a и b являются ее свободными образующими тогда u только тогда разрешимо относительно z одно из уравнений $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1}=aba^{-1}b^{-1}$ или $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1}=bab^{-1}a^{-1}$.

Это позволило В. Г. Дурневу в работе [33] доказать алгоритмическую неразрешимость позитивной \exists -теории с одной константой [a,b] свободной разрешимой группы, а значит и неразрешимость позитивной $\forall^2\exists^m$ -теории этой группы. Эти результаты можно рассматривать как уточнение известного результата А. И. Мальцева о неразрешимости элементарной теории свободной разрешимой неабелевой группы. Они дополняют результат В. А. Романьков об алгоритмической неразрешимости вопроса о существовании решений для уравнений в свободной метабелевой группе ранга 2, разрешенных относительно неизвестных.

4.4. Другие результаты

В монографии Р. Линдона и П. Шуппа дано описание абелевых подгрупп произвольных F-групп.

В работе [38] дано описание строения подгрупп с тождествами F-групп. А в работе [39] в качестве уточнения этого описания доказаны теоремы:

ТЕОРЕМА 13. Для подгрупп фуксовых групп выполняется усиленный вариант альтернативы Титса:

произвольная подгруппа H фуксовой группы либо является разрешимой ступени ≤ 3 или знакопеременной группой A(5), либо H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.

ТЕОРЕМА 14. На подгруппе H произвольной фуксовой группы G не выполняется нетривиальное тождество тогда и только тогда, когда H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.

Дж. фон Нейман в связи с изучением парадокса Банаха—Тарского установил, что любая локально разрешимая группа аменабельна, а любая свободная нециклическая группа неаменабельна. Так как подгруппа аменабельной группы сама аменабельна, то любая группа, в которую вложима свободная группа ранга 2, неаменабельна. К этой работе Дж. фон Неймана

восходит гипотеза о справедливости обратного утверждения, т.е. об аменабельности любой группы, в которую не вложима свободная группа ранга 2.

Это приводит к понятию альтернатива фон Неймана для аменабельности для класса групп C: для класса групп C выполняется альтернатива фон Неймана для аменабельности, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение либо группа G аменабельна, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Первоначальная гипотеза Дж. фон Неймана может рассматриваться как альтернатива фон Неймана для аменабельности для класса всех групп. Альтернатива фон Неймана для аменабельности справедлива для класса всех подгрупп групп с одним определяющим соотношением и для класса всех подгрупп групп с условием малого сокращения.

В работе [42] устанавливается справедливость альтернативы фон Неймана для аменабельности для подгрупп F-групп: для произвольной подгруппы G любой F-группы справедливо утверждение: либо группа G аменабельна, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

- H. H. Репин показал, что в группах кос B_3 и B_4 , в отличии от симметрических групп, произведение двух коммутаторов может не быть коммутатором.
- В работе [40] установлено, что коммутанты групп кос B_3 и B_4 , как и любая вербальная подгруппа этих групп имеют бесконечную ширину. При этом использовались работы Sacerdote G. S.
- В. Г. Бардаков совершенно другими методами доказал бесконечность ширины любой вербальной подгруппы любой группы кос B(n).

В ряде работ рассматривался вопрос о разложимости групп кос B(n) в свободное произведение с объединением. В работе [41] нами исследован вопрос о разложимости в свободное произведение факторгрупп групп кос B(n) и линейных групп SL(n,Z) и GL(n,Z).

В работах [42] и [43] установлена алгоритмическая неразрешимость некоторых, в том числе позитивных, фрагментов элементарной теории свободной нециклической группы в сигнатуре, расширенной функцией длины. Эти результаты усиливают результаты работы Huber-Dyson V. о неразрешимости элементарной теории свободной нециклической группы в сигнатуре, расширенной функцией длины и связаны с тематикой работы А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова.

5. Заключение

Валерий Георгиевич продолжает исследования алгоритмических вопросов алгебры и математической логики в Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова. Кроме того, его интересует применение алгебраических методов в криптографии (например, см. [50]). В настоящее время готовит к изданию учебное пособие "Методы комбинаторной теории групп в современной криптографии", включающее основной материал по комбинаторной теории групп, которая в настоящее время находит применение при разработке новых криптоалгаритмов и криптопротоколов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Дурнев В. Г. О позитивных формулах на группах // Ученые записки матем. кафедр Тульского гос. пед. ин-та. Геометрия и алгебра. 1970. № 2. С. 215–241.
- 2. Дурнев В. Г. О позитивной теории свободной полугруппы // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула. 1972. С. 122–172.

- 3. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Т. 211, № 4. С. 772–774.
- 4. Дурнев В. Г. О позитивных формулах на свободных полугруппах // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 25, № 5. С. 1131–1137.
- 5. Дурнев В. Г. Позитивные теории свободных полугрупп: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГПИ. 1973.
- 6. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной ∀∃³-теории свободной полугруппы // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36. № 5. С. 1067 1080.
- 7. Дурнев В. Г. Неразрешимость простого фрагмента позитивной теории с одной константой свободной полугруппы ранга 2 // Мат. заметки. 2000. Том 67, № 2. С. 191 200.
- 8. Дурнев В. Г. Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Мат. заметки. 1974. Т.16, № 5. С. 717–724.
- 9. Дурнев В. Г. К вопросу об уравнениях на свободных полугруппах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб. ЯрГУ. Ярославль. 1977. С. 57–59.
- 10. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободных полугруппах с ограничениями на решения // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.
- 11. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с языковыми ограничениями на решения в свободных моноидах // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции, посвященной памяти профессора А. Ю. Левина. ЯрГУ. Ярославль. 2008. С. 93–99.
- 12. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с ограничениями на решения в свободных полугруппах // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 358. С. 120–129.
- 13. Durnev V. G., Zetkina O. V. On equations in free semigroups with certain constraints tj their solutions // Journal of Mathematical Sciences. 2008. V. 158, № 5. Pp. 671–676.
- 14. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с подполугрупповыми ограничениями на решения в свободных полугруппах // Чебышевский сборник. 2010. Т. XI, вып. 3(35). С. 78–87.
- 15. Дурнев В. Г. Об уравнениях с эндоморфизмами в свободных полугруппах и группах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1991. С. 30–35.
- 16. Дурнев В. Г. Об уравнениях с эндоморфизмами в свободных полугруппах // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 2. С. 136–141.
- 17. Дурнев В. Г. Об уравнениях в словах и длинах с эндоморфизмами // Изв. ВУЗ'ов. Математика. 1992. № 8. С. 30–34.
- 18. Дурнев В. Г. NP-полнота проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободной полугруппы счетного ранга // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.
- 19. Дурнев В. Г. Об одном обобщении задачи 9.25 из "Коуровской тетради" // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 2. С. 15–19.

- 20. Дурнев В. Г. Об уравнениях с ограничениями на решения в свободных группах // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 1. С. 36–40.
- 21. Дурнев В. Г. Об уравнениях с подгрупповыми ограничениями на решения в свободных группах // Дискретная математика. 1995. Т. 7, № 4. С. 60–67.
- 22. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с подгрупповыми ограничениями на решения в свободных группах // Математика в Ярославском университете: сб. обзорных статей. К 30-летию математического факультета. ЯрГУ. Ярославль. 2006. С. 181–200.
- 23. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободной группе с ограничениями на решения // Чебышевский сборник. 2010. Т. XI, вып. 3(35). С. 88–97.
- 24. Дурнев В. Г. К проблеме разрешимости для уравнений с одним коэффициентом. // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 832–845.
- 25. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободных группх, разрешенных относительно неизвестных, с ограничениями на решения // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 63–80.
- 26. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. NP-трудность проблемы разрешимости для уравнений с простой правой частью в свободной группе // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 46-53.
- 27. Дурнев В. Г. Об уравнениях в свободных группах // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 59-62.
- 28. Дурнев В. Г. Об одном вопросе А. И. Мальцева из "Коуровской тетради" // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 54–58.
- 29. Дурнев В. Г. О системах уравнений на свободных нильпотентных группах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1981. С. 66–69.
- 30. Дурнев В. Г. Неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1988. С. 56–63.
- 31. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О фрагментах элементарных теорий свободных нильпотентных групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.
- 32. Дурнев В. Г. Об уравнении Мальцева–Нильсена на свободной метабелевой группе ранга 2 // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 57–60.
- 33. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной ∃-теории с одной константой свободной разрешимой группы // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1992. С. 30–35.
- 34. Дурнев В. Г. О проблеме Тарского для свободных групп некоторых многообразий // Сб. "Вопросы теории групп и гомологической алгебры". ЯрГУ. Ярославль. 1990. С. 25–35.
- 35. Дурнев В. Г., Казарин Л. С. Об универсальных теориях некоторых групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.

- 36. Дурнев В. Г. Неразрешимость некоторых ограниченных теорий групп SL(n,Z) и GL(n,Z) ($n \geq 3$) // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.
- 37. Дурнев В. Г. Об элементарных теориях целочисленных линейных групп // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1995. Т. 59, № 5. С. 41–58.
- 38. Дурнев В. Г. Подгруппы с тождествами некоторых F-групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1998.
- 39. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. Об альтернативе Титса для подгрупп F-групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. XV, вып. 1(49).
- 40. Дурнев В. Г. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4 // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция: тезисы докладов. Львов. 1987.
- 41. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О факторгруппах групп кос B(n) и линейных групп SL(n,Z) и GL(n,Z) // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.
- 42. Дурнев В. Г. О формулах с функцией длины на свободной группе // Десятая Всесоюзная конференция по матем. логике: тезисы докладов. Ленинград. 1988. С. 56.
- 43. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О позитивной теории свободной группы в сигнатуре, расширенной функцией длины // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1991. С. 25–29.
- 44. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Алгоритмически неразрешимые проблемы для диофантовых множеств в Π_2 // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.
- 45. Durnev V. Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups // Lecture Notes in Computer Science. 1997. Vol. 1234. Pp. 88–101.
- 46. Дурнев В. Г. Исследование некоторых алгоритмических проблем для свободных групп и полугрупп: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ. 1997.
- 47. Адян С. И., Дурнев В. Г. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 2. С. 3–94.
- 48. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. Об уравнениях и неравенствах в словах и длинах // Чебышевский сборник. 2016. Т. XVII, вып. 2(58). С. 137-145.
- 49. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. Об аменабельных подгруппах F -групп // Чебышевский сборник. 2016. Т. XVII, вып. 2(50). С. 128–136.
- 50. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И., Мурин Д. М. О соNP-полноте задачи "Инъективный рюкзак"// Прикладная дискретная математика. 2016. № 3(33). С. 85–92.
- 51. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Некоторые результаты, полученные в Ярославском отделении алгебраической школы М. Д. Гриндлингера // Чебышевский сборник. 2014. Т. XV, вып. 4(44). С. 5–31.

REFERENCES

- 1. Durnev, V. G. 1970, "On positive formulas on groups", *Proc. of Math. Dept. of Tula State Pedagogical Inst.*, Ser. Geometry and Algebra. [Uchtnye Zapiski Matematicheskoy Kafedry Tul'skogo Pedogogicheskogo Instituta], no. 2. pp. 215–241. (Russian)
- 2. Durnev, V. G. 1972, "On positive theory of free semigroup", *Groups and semigropus*, *Tula*, pp. 122–172 (Russian).
- 3. Durnev, V. G. 1973, "Positive theory of free semigroup", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 211, no. 4. pp. 772–774. (Russian)
- 4. Durnev, V. G. 1974, "Positive formulas in free semigroups", Siberian Mathematical Journal, vol. 15, issue 5, pp. 796–800 (Translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, vol. 15, no. 5, pp. 1131–1137) [doi: 10.1007/BF00966439]
- 5. Durnev, V. G. 1973, "Positive theories of free semigroups", Ph D. Thesis, Moscow State Pedagogical Institution. (Russian)
- Durnev, V. G. 1995, "Undecidability of the positive ∀∃³-theory of a free semigroup", Siberian Mathematical Journal, vol. 36, no. 5. pp. 917–929 (Translated from: Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, vol. 36, no. 5, pp. 1067–1080)
- 7. Durnev, V. G. 2000, "Undecidability of a simple fragment of a positive theory with a single constant for a free semigroup of rank two", *Mathematical Notes*, vol. 67, no. 2, pp. 191–200. (Russian)
- 8. Durnev, V. G. 1974, "On equations in free semigroups and groups", *Mathematical Notes*, vol. 16, no. 5. pp. 717–724. (Russian)
- 9. Durnev, V. G. 1977, "On some equations on free semigropus", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'. pp. 57–59. (Russian)
- 10. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2003, "On equations in free semigroups with certain constraints on their solutions", *Group Theory & Homological Algebra*, *Yaroslavl'* State University. *Yaroslavl'*. (Russian)
- 11. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "Equations with language constraints to their solutions in free monoids", *Mathematics, cybernetics, informatics Prof. A. Yu. Levin Memorial Conference. Yaroslavl' State University.*, pp. 93–99. (Russian)
- 12. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "On equations in free semigroups with certain constraints on their solutions", Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI (Proc. of St.-Petersburg branch of V. A. Steklov Math. Inst.), St.-Petersburg., vol. 358, pp. 120-129. (Russian)
- 13. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "On equations in free semigroups with certain constraints to their solutions", *Journal of Mathematical Sciences.*, vol. 158, no. 5, pp. 671–676. (Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Vol. 358, 2008, pp. 120–129)
- 14. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2010, "Equations with subsemigroup constraints to their solutions in free semigroups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XI, issue 3(35), pp. 78–87. (Russian)
- 15. Durnev, V. G. 1991, "On equations with endomorphisms in free semigroups and groups", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'., pp. 30–35. (Russian)

- 16. Durney, V. G. 1992, "Equations with endomorphisms in free semigroups", *Diskret. Mat.*. vol. 4, no. 2, pp. 136–141. (Russian)
- 17. Durnev, V. G. 1992, "On equations in words and lengths with endomorphisms", Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). vol. 36, no. 8, pp. 26–30. (Russian)
- 18. Durnev, V. G. 2003, "NP-completeness of the problem of endomorphic reducibility for elements of a free semigroup of an countable rank", *Group Theory & Homological Algebra*, *Yaroslavl's State University*. Yaroslavl'. (Russian)
- 19. Durnev, V. G. 1990, "On one generalization of the Problem 9.25 from the "Kourovka notebook", *Mathematical Notes.*, vol. 47, no. 2, pp. 117–121. (Translated from Matematicheskie Zametki. 1990. Vol. 47, no. 2. P. 15–19.)
- 20. Durnev, V. G. 1993, "Equations with constraints on the solution in free groups", *Mathematical Notes.*, vol. 53, no. 1, pp. 26—29. (Translated from Matematicheskie Zametki. Vol. 53, no. 1. P. 36–40.)
- 21. Durnev, V. G. 1995, "On equations with subgroup constraints on solutions in free groups", Discrete Math. Appl., vol. 5, no. 6, pp. 567—575. (Translated from: Diskret. Mat. 1995. Vol. 7. no. 4, 60–67.)
- 22. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2006, "On equations with subgroup constraints on solutions in free groups", *Mathematics in Yaroslavl' University (30th aniversary of Math. Faculty)*. *Yaroslavl'*, pp. 181–200. (Russian)
- 23. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2010, "On some equations with with constraints to their solutions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XI, issue 3(35), pp. 88–97. (Russian)
- 24. Durnev, V. G. 1996, "On the solvability problem for equations with a single coefficient", *Mathematical Notes.*, vol. 59, no. 6, pp. 601–610. (Translated from Matematicheskie Zametki, 1996. Vol. 59. no. 6. P. 832–845).
- 25. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2012, "On the equations resolved with respect to variables in free groups with constraints to the solutions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 63–80. (Russian)
- 26. Durnev V. G. & Zetkina, O. V. 2012, "NP-complexity of the decidability problem for the equations with right-hand-side in a free group", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 46–53. (Russian)
- 27. Durnev, V. G. 2012, "On equations in free groups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 59–62. (Russian)
- 28. Durnev, V. G. 2012, "On one A. I. Mal'cev's question from the "Kourovka notebook"", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 54–58. (Russian)
- 29. Durnev, V. G. 1981, "On systems of equations on free nilpotent groups", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl', pp. 66-69. (Russian)
- 30. Durnev, V. G. 1988, "Undecidability of endomorphic reducibility problem for sets of elements of a free nilpotent group", *Group Theory & Homological Algebra*, *Yaroslavl'* State University. Yaroslavl', pp. 56–63. (Russian)

- 31. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2003, "On fragments of elementary theories of free nilpotent groups", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'. (Russian)
- 32. Durnev, V. G. 1989, "The Mal'tsev-Nielsen equation in a free metabelian group of rank two", Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR., vol. 46, Issue 6, pp. 927–929. (Translated from Matematicheskie Zametki, vol. 46, No. 6, pp. 57–60, December, 1989)
- 33. Durnev, V. G. 1992, "Undecidability of a positive ∃-theory with one constant for a free solvable group", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'., pp. 30–35. (Russian)
- 34. Durnev, V. G. 1990, "On Tarski problem for free groups of some manifolds", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl', pp. 25-35. (Russian)
- 35. Durnev, V. G. & Kazarin, L. S. 1994, "On unversal theories of some groups", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'. (Russian)
- 36. Durnev, V. G. 1994, "Undecidability of some bounded theories of $\text{rpy} \pi \pi SL(n, Z)$ and GL(n, Z) $(n \geq 3)$ groups", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'. (Russian)
- 37. Durnev, V. G. 1995, "On elementary theories of integer linear groups", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 59, no. 5, pp. 919–934.
- 38. Durnev, V. G. 1998, "Semigroups with identities of some F-groups", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'. (Russian)
- 39. Durnev, V. G., Zetkina, O. V. & Zetkina, A. I. 2014, "On the Tits' alternative for subgroups of F-groups", Chebyshevskii Sb., vol. 15, issue 1(49), pp. 110—120. (Russian)
- 40. Durnev, V. G. 1987, "On width of the commutant of B_3 и B_4 braid groups", XIX USSR algebraic conference. Book of abstracts. L'vov. (Russian)
- 41. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1994, "On factor-groups of B(n) braids and linear SL(n, Z) and GL(n, Z) groups", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'. (Russian)
- 42. Durnev, V. G. 1988, "On formulae with a length function on a free group", 10th USSR Conference on math. logics. Book of abstracts. Leningrad., pp. 56 (Russian)
- 43. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1991, "On a positive theory of a free group in a signature extended by a length function", *Group Theory & Homological Algebra*, *Yaroslavl' State University*. Yaroslavl'., pp. 25–29. (Russian)
- 44. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1994, "Algoritmically undecidable problems for Diophantine sets in Π₂", Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'. (Russian)
- 45. Durnev, V. 1997, "Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups", Lecture Notes in Computer Science., vol. 1234, pp. 88–101. (Russian)
- 46. Durnev, V. G. 1997, "Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups": Dr. Sci. Thesis, *Moscow State University*. (Russian)

- 47. Adian, S. I. & Durnev, V. G. 2000, "Decision problems for groups and semigroups", Russian Mathematical Surveys., vol. 55, no. 2, pp. 207. [doi: 10.1070/RM2000v055n02ABEH000267]
- 48. Durnev, V. G., Zetkina, O. V. & Zetkina, A. I. 2016, "On equations and inequalities in words and word lengths", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XVII, issue 2(58), pp. 137–145. (Russian)
- 49. Durnev, V. G., Zetkina, O. V. & Zetkina, A. I. 2016, "On amenable subgroups of F-groups", Chebyshevskii Sb., vol. XVII, issue 2(58), pp. 128–136. (Russian)
- 50. Durnev, V. G., Zetkina, O. V., Zetkina, A. I. & Murin, D. M. 2016, "About the coNP-complete "Injective knapsack" problem", *Prikl. Diskr. Mat.*, no. 3(33), pp. 85–92. (Russian)
- 51. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2014, "Some of the results obtained in the Yaroslavl branch algebraic school of M. D. Grindlinger", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XV, issue 4(50), pp. 5–31. (Russian)

Получено 28.05.2017 г. Принято в печать 14.06.2017 г.