ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 2

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-275-278

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНЕЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В. Г. Чирский (г. Москва)

Аннотация

Рассматривается задача, относящаяся к общей проблеме построения последовательности псевдослучайных чисел. Одним из важных свойств псевдослучайных последовательностей хорошего качества является их непериодичность. Но бесконечная непериодическая последовательность может иметь начальные отрезки, вид которых далёк от желаемого. Например, отрезок десятичного разложения лиувиллева числа

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$$

имеет лишь небольшое количество единиц, а подавляющее большинство остальных цифр равны нулю.

При рассмотрении конечных отрезков разложений чисел возникает, таким образом, необходимость определения понятий периодичности и достаточной непериодичности конечной последовательности чисел, что и сделано в работе.

Рассматриваются разложения действительных чисел и исследуется вопрос о связи арифметических свойств разлагаемого числа с достаточной непериодичностью отрезков его разложения.

Обсуждаются способы построения чисел, имеющих последовательности достаточно непериодических разложений. Описаны некоторые результаты в этом направлении и их возможное развитие.

Вкратце изложены задачи, связанные с представлениями полиадических чисел. Эти представления удобны тем, что в них не используется операция деления чисел, что значительно упрощает процесс получения искомого разложения. Описаны полученные результаты и сформулированы задачи.

Ключевые слова: конечная непериодичность, арифметические свойства чисел.

Библиография: 11 названий.

Известно, что позиционное разложение иррационального числа является непериодическим. Однако его конечне отрезки могут содержать как, например, десятичное разложение числа

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$$

лишь небольшое количество единиц и подавляющее большинство нулей.

Представляется целесообразным ввести некоторые характеристики конечных последовательностей цифр, которые являются начальными отрезками позиционных разложений с базой b действительных (и не только) чисел.

Назовём конечный набор цифр чисто периодическим, если он состоит из нескольких (очевидно, не менее двух) повторяющихся групп цифр.

Рассмотрим бесконечную последовательность цифр

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{1}$$

и её конечный отрезок

$$a_1, a_2, \ldots, a_N. \tag{2}$$

Предположим, что для этого значения N набор цифр (2) содержит начальную непериодическую часть $a_1, \ldots, a_l$ и k периодов длины T:

$$a_{l+1}, \ldots, a_{l+T}, \ldots, a_{l+(k-1)T+1}, \ldots, a_{l+kT},$$
$$a_{l+mT+i} = a_{l+i}, \quad i = 1, \ldots, T, \quad m = 0, \ldots, k. \tag{3}$$

Положим

$$\delta(N) = \frac{kT}{N}.$$

Чем больше число $\delta(N)$, тем больше относительная величина чисто периодической части, а чем больше число k, тем короче период T (и, следовательно, тем проще его структура).

Назовём набор (2) $\big(\delta(N), k(N)\big)$-периодическим. Задав величины $0 < \delta_0 < 1$ и $k_0 \geqslant 2$, назовём набор (2) достаточно непериодическим, если $\delta(N) \leqslant \delta_0$ и $k(N) \geqslant k_0$.

Предлагаемые определения далеки от совершенства. Например, набор цифр, в котором часто встречается одна и та же комбинация цифр «слегка разбавленная» другими цифрами, будет считаться достаточно непериодическим.

Следуя этому замечанию, возможно было бы рассмотреть более естественные с вычислительной точки зрения определение достаточной непериодичности последовательности: *при её архивировании длина получившейся последовательности не уменьшается значительно.*

Однако предложенное выше определение тесно связано с арифметическими свойствами рассматриваемого числа.

Теорема 1. *Пусть (1) представляет собой последовательность цифр, например, десятичного разложения иррационального числа α.*

Пусть существуют $C(\alpha) > 0, \beta \geqslant q$ такие, что для всех $p, q \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha)}{q^\beta}. \tag{4}$$

Если

$$\beta < \frac{k_0}{k_0(1-\delta_0)+\delta_0}, \tag{5}$$

то при $N \geqslant N_0$ набор (2) является достаточно непериодическим.

Доказательство. [Дадим схему доказательства этой простой теоремы.] Число $\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots$ соответсвует последовательности (1). Пусть при некоторых N, $k \geqslant k_0$ и соответствующих l и T набор (2) имеет вид

$$a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, \ldots, a_{l+T}, \ldots, a_{l+(k-1)T+1}, \ldots, a_{l+kT},$$

и выполнены равенства (3). Тогда этот набор можно рассматривать как начальный отрезок рационального числа

$$0, a_1 \ldots a_l \overline{a_{l+1} \ldots a_{l+T}}. \tag{6}$$

Обозначим это число $\dfrac{p}{q}$, $(p, q) = 1$. Тогда

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 10^{-l-kT}.$$

Знаменатель q дроби (6) не превосходит величины 10^{l+T}. Поэтому, если выполняется неравенство

$$10^{-l-kT} < \frac{C(\alpha)}{10^{(l+T)\beta}}, \tag{7}$$

получается противоречие с условием (4) теоремы.

Неравенство (7) следует из (5) при достаточно большом N. □

Эта теорема утверждает вполне очевидное свойство: *достаточная непериодичность конечных отрезков разложения действительного числа следует из плохой приближаемости его рациональными числами.*

Можно применить эту теорему к числам вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!},$$

где a_n — периодическая последовательность целых чисел (см. [1]).

Отметим, что в другом очевидном примере — использовании непрерывной дроби с ограниченными неполными частными многократно используется операция деления, что усложняет выкладки.

В работах [2]–[9] исследованы арифметические свойства чисел вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$$

Это — так называемые полиадические числа. В работах [10], [11] установлено, что цифры разложений подобного типа обладают неплохими статистическими характеристиками.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г., Нестеренко А. Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискретная математика, том 27, №4, с. 150-157, 2015.

2. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами //Доклады Академии наук, математика, том 439, №6, с. 677-679, 2014.

3. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, том 78, №6, с. 193-210, 2014.

4. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, том 81, выпуск 2, с. 215-232, 2017.

5. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник, том 17, №3, с. 180-185, 2016.

6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник, том 16 №1, с. 254-264, 2015.

7. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse – V.XIII, №2. 2004. pp. 241-260.

8. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета, Серия 1: Матемаика. Механика. №1, с. 59-61, 2015.

9. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник, том 14, вып. 2, с. 164-172, 2013.

10. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлении натуральных чисел // Чебышевский сборник, том 14, вып. 1, с. 92-101, 2013.

11. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлении натуральных чисел // Вестник МГУ, сер. 1 матем., механ., №6, с. 57-59, 2013.

REFERENCES

1. Chirskii V. G., Nesterenko A. Yu. An approach to the transformation of periodic sequences //Discrete Mathematics and Applications. vol. 27. №1 p. 1-6.

2. Chirskii V. G. Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients // Doklady Mathematics. vol. 90. №3. p. 766-768.

3. Chirskii V. G. On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters // Izvestiya Mathematics. №6. p. 1244-1260.

4. Chirskii V. G. Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients // Izvestiya Mathematics. vol. 81. №2. p. 444-461.

5. Chirskii V. G. An approach to the transformation of periodic sequences // Chebushevskii sb. vol. 17, №3, p. 180-185, 2016.

6. Chirskii V. G. Arithmetic properties of polyadic numbers // Chebushevskii sb. vol. 16. №1. p. 254-264, 2015.

7. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse – V.XIII, №2. 2004. pp. 241-260, 2015.

8. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Euler series // Moscow University Mathematics Bulletein. vol. 70. №1. p. 41-43. 2015.

9. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. On some properties of polyadic expansions //Chebushevskii sb. vol. 14. №2. p. 164-172. 2013.

10. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. On the representation of natural numbers //Chebushevskii sb. vol. 14. №1. p. 192-101. 2013.

11. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. On the representation of natural numbers //MSU Bulletin. vol 6. p. 57-59. 2013.

Получено 11.05.2017 г.
Принято в печать 12.06.2017 г.