ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 2

УДК 512.552+512.553+512.715 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-256-266

ОДНОРОДНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ

Д. С. Чистяков (г. Нижний Новгород)

Аннотация

В данной работе изучаются смешанные модули, обладающие следующим свойством: каждая однородная функция нескольких переменных данного модуля является аддитивной. Под однородной функцией понимается всякое отображение прямой суммы конечного числа копий некоторого модуля в сам модуль, перестановочное с эндоморфизмами данного модуля. В универсальной алгебре алгебраическая структура называется эндопримальной, если все ее терм-функции коммутируют с эндоморфизмами. Известно, что каждая эндодуализируемая конечная алгебра эндопримальна. Ряд авторов исследовал эндопримальные алгебры в многообразиях векторных пространств, полурешеток, булевых алгебр, алгебр Стоуна, алгебр Гейтинга и абелевых групп. В данной статье продолжается исследование связи эндопримальности и свойств мультипликативной полугруппы кольца эндоморфизмов модуля, начатое автором ранее. Рассмотрены классы смешанных нередуцированных расщепляющихся модулей и редуцированных нерасщепляющихся модулей над коммутативным дедекиндовым кольцом. Показана взаимосвязь указанной проблемы со свойством однозначности сложения в кольце эндоморфизмов модуля.

Ключевые слова: дедекиндово кольцо, делимый модуль, редуцированный модуль, смешанный модуль, однородное отображение, терм-функция, эндофункция.

Библиография: 26 названий.

ON HOMOGENEOUS MAPPINGS OF MIXED MODULES

D. S. Chistyakov (Nizhny Novgorod)

Abstract

In this paper we study mixed modules, with the following property: every homogeneous function of several variables of a module is additive. By a homogeneous function we mean any mapping of the direct sum of a finite number of copies of a module into the module itself that commutes with the endomorphisms of the given module. In the universal algebra, the algebraic structure is said to be endoprimal if all its term-functions commute with endomorphisms. It is well-known that each endodualizable finite algebra is endoprimal. Some authors have studied endoprimal algebras in varieties of vector spaces, semilattices, Boolean algebras, Stone algebras, Heyting algebras, and Abelian groups. In this article, the links between endoprimality and the properties of the multiplicative semigroup of the endomorphism ring of a module, which the author started earlier. Classes of mixed non-reduced splitting modules and reduced modules over commutative Dedekind ring have been investigated. Links between this problem and the property of unique additivity has been shown.

Keywords: Dedekind ring, divisible module, reduced module, mixed module, homogeneous map, term-function, endofunction.

Bibliography: 26 titles.

1. Основные определения и постановка задачи

Пусть R — коммутативная дедекиндова область и M — левый R-модуль. n-арная эндофункция модуля M — это отображение $f\colon M^n \to M$ такое, что

$$f(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n) = \varphi f(x_1, \ldots, x_n)$$

для всех $\varphi \in End_R(M)$. Отображение $f\colon M^n \to M$ такое, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \psi_1 x_1 + \ldots + \psi_n x_n,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — центральные эндоморфизмы модуля G, называется n-арной обобщенной терм-функцией. В случае, когда $\psi_1, \ldots, \psi_n \in R$, отображение f называется n-арной терм-функцией. Если каждая n-арная эндофункция модуля M является n-арной терм-функцией (n-арной обобщенной терм-функцией), то модуль M называется n-эндопримальным (обобщенно n-эндопримальным). Модуль называется эндопримальным (обобщенно эндопримальным), если он n-эндопримален (обобщенно n-эндопримален) для всех $n < \omega$.

Исследованию эндопримальных и обобщенно эндопримальных групп посвящены работы [1] — [7]. Отметим, что понятие эндопримальности возникло в универсальной алгебре. В частности, алгебраическая структура называется эндопримальной, если все ее терм-функции коммутируют с эндоморфизмами. В [5] показано, что каждая эндодуализируемая конечная алгебра эндопримальна. В работе [6] авторы продолжили систематическое изучение эндопримальных алгебр в многообразиях векторных пространств, полурешеток, булевых алгебр, алгебр Стоуна, алгебр Гейтинга и абелевых групп. В статьях [7] — [10] автор указал на связь эндопримальности и свойств мультипликативной полугруппы кольца эндоморфизмов модуля. Оказывается, обобщенно эндопримальные периодические абелевы группы и сепарабельные абелевы группы без кручения имеют UA-кольцо эндоморфизмов.

Полугруппа $(R, \cdot)$ называется кольцом с однозначным сложением (или кратко UA-кольцом), если существует единственная бинарная операция $+$, превращающая $(R, \cdot, +)$ в кольцо. Отметим также, что кольцо R является UA-кольцом в том и только том случае, когда каждый полугрупповой изоморфизм $\alpha\colon (R, \cdot) \to (S, \cdot)$ является кольцевым для каждой полугруппы $(S, \cdot)$. Понятие UA-кольца исследовалось в работах [11] — [16]. Позднее оно было обобщено на категории ([14]), полукольца ([17]), кольца и алгебры Ли ([18]) и модули ([19], [20]). Абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов рассматривалось в работах [21] — [25].

В данной работе мы исследуем взаимосвязь UA-свойства кольца эндоморфизмов и эндопримальности смешанных модулей над коммутативным дедекиндовым кольцом. Ключевым инструментом в исследовании UA-колец служит следующая теорема, которая по сути является аналогом теоремы 2.12 из [13].

Теорема 1. *([21, Лемма 1]) Предположим, что кольцо R обладает системой идемпотентов $E = \{e_i \mid i \in I\}$ такой, что*

1. *для каждого $0 \neq r \in R$ существует идемпотент $e_i \in E$, удовлетворяющий условию $re_i \neq 0$;*
2. *для каждого $e_i \in E$ найдется ортогональный ему идемпотент $e_j \in E$ такой, что для $x \in R$ из равенств $e_i x e_i R e_j = 0 = e_j R e_i x e_i$ следует равенство $e_i x e_i = 0$.*

Тогда R — UA-кольцо.

В частности, с помощью данной теоремы легко доказать следующее утверждение ([7]).

Теорема 2. *Пусть M — сепарабельный модуль без кручения над коммутативным дедекиндовым кольцом R и $rank(M) > 1$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *M — обобщенно эндопримальный R-модуль,*
2. *$End_R(M)$ — UA-кольцо,*
3. *M — полусвязанный R-модуль.*

При исследовании обобщенно эндопримальных модулей, в основном, используется следующая теорема ([4], [7]).

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *M — обобщенно эндопримальный модуль;*
2. *каждая эндофункция $f\colon M^n \to M$ аддитивна.*

Далее мы переходим к изложению основных результатов работы. Для удобства зафиксируем следующие обозначения для R-модуля M над коммутативным дедекиндовым целостным кольцом R его подмодулей: $t(M)$ — периодический подмодуль, $t_P(M)$ — P-примарный подмодуль, $tf(M) = M/t(M)$ — часть без кручения модуля M, $supp(M) = \{P \in Spec(R) \mid t_P(M) \neq 0\}$, $\mathcal{D}_t(M)$ —максимальный делимый периодический подмодуль, $\mathcal{D}_{tf}(M)$ — максимальный делимый подмодуль без кручения, $\mathcal{R}_t(M)$ — максимальный редуцированный периодический подмодуль, $\mathcal{R}_{tf}(M)$ — максимальный редуцированный подмодуль без кручения.

2. Однородные отображения смешанных модулей

При изложении результатов работы мы используем терминологию и обозначения из книги [26].

Теорема 4. *Пусть $M = \mathcal{D}_{tf}(M) \bigoplus \bigoplus\limits_{P \in supp(M)} t_P(M)$ — R-модуль такой, что*

1. *модуль $\mathcal{D}_{tf}(M)$ разложим;*
2. *$t_P(M) = R(P^n) \bigoplus R(P^n) \oplus M(P)$, где $P^n M(P) = 0$, или $t_P(M)$ имеет неограниченный базисный подмодуль, для всех $P \in supp(M)$.*

Тогда $End_R(M)$ — UA-кольцо и M — обобщенно эндопримальный модуль.

Доказательство. Поскольку

$$End_R(M) \cong End_R(\mathcal{D}_{tf}(M)) \times \prod_{P \in supp(M)} End_R(t_p(M))$$

и кольцо $End_R(\mathcal{D}_{tf}(M))$ является UA-кольцом ([16]), то достаточно доказать, что кольца эндоморфизмов P-примарных компонент $t_P(M)$ модуля M обладают свойством однозначности сложения. Заметим, что каждый R-модуль $t_P(M)$ может быть рассмотрен как модуль над P-адическим пополнением $\widehat{R}_P$ области R. В этой ситуации $End_R(t_P(M)) = End_{\widehat{R}_P}(t_P(M))$.

Зафиксируем идеал $P \in supp(M)$. Предположим, что модуль $t_P(M)$ имеет неограниченный базисный подмодуль. Тогда имеет место прямое разложение

$$M = Rm_1 \bigoplus \ldots \bigoplus Rm_n \bigoplus N_n$$

такое, что $N_n = Rm_{n+1} \bigoplus N_{n+1}$ и показатель степени порядкового идеала элемента a_n не меньше, чем k.

Пусть E — система попарно ортогональных примитивных идемпотентов. Для любого $0 \neq \varphi \in End_{\widehat{R}_P}(t_P(M))$ существует $e \in E$ такой, что $\varphi e \neq 0$. В противном случае, φ аннулирует базисный подмодуль $t_P(M)$, и, следовательно, является нулевым. Пусть $e(t_P(M)) = R(P^n)$. Существует идемпотент e' такой, что $e'(t_P(M)) = R(P^m)$, где $m \geq n$. Тогда

$$(0 : eEnd_{\widehat{R}_P}(t_P(M))e')_l \bigcap eEnd_{\widehat{R}_P}(t_P(M))e = 0, \text{ где}$$

$$eEnd_{\widehat{R}_P}(t_P(M))e' = Hom_{\widehat{R}_P}(R(P^m), R(P^n)) \text{ и } eEnd_{\widehat{R}_P}(t_P(M))e = End_{\widehat{R}_P}(R(P^n)).$$

По теореме 1, $End_{\widehat{R}_P}(t_P(M))$ — UA-кольцо.

Случай, когда $t_P(M) = R(P^n) \bigoplus R(P^n) \bigoplus M(P)$, где $P^n M(P) = 0$, рассматривается аналогично.

Если модуль $\mathcal{D}_{tf}(M)$ разложим, то, как известно, он изоморфен прямой сумме копий модуля Q. Тогда, по [7, Теорема 1], данный модуль обобщенно эндопримален. Обобщенная эндопримальность периодической части модуля M доказывается аналогично случаю абелевых групп (см. [4, Лемма 22, Теорема 23]). Поскольку прямая сумма обобщенно эндопримальных модулей обобщенно эндопримальна, то мы получаем второе утверждение теоремы. □

Заметим, что если $t_P(M) = R(P^k) \oplus M(P)$, где $M(P) \neq 0$ и $P^k M(P) = 0$, $P \in supp(M)$ и $M(P)$ не имеет подмодуля $R(P^k)$, то можно построить нелинейную эндофункцию

$$f_P \colon t_P(M) \oplus t_P(M) \to t_P(M),$$

например, по правилу $f((x, y), (x', y')) = 0$, если $p^{k-1}x' = 0$, и $f((x, y), (x', y')) = p^{k-1}x$, если $p^{k-1}x' \neq 0$, где $x, x' \in R(P^k)$, $y, y' \in M(P)$ и $P = Rp$. Далее отображение f_P продолжается до нелинейной эндофункции $f \colon M^2 \to M$ по правилу: $f(x) = f_P(x)$, если $x \in t_P(M)$, и $f(x) = 0$, если $x \notin t_P(M)$. В то же время, если модуль $\mathcal{D}_{tf}(M)$ изоморфен Q, то он не является обобщенно эндопримальным и его кольцо эндоморфизмов не обладает свойством однозначности сложения ([7]).

Пусть $M = R(P^m) \bigoplus M(P)$, где $M(P) \neq 0$, $m > 2$ и $P^{m-2}M(P) = 0$. Учитывая изоморфизм

$$End_R(M) \cong \begin{pmatrix} End_R(R(P^m)) & Hom_R(M(P), R(P^m)) \\ Hom_R(R(P^m), M(P)) & End_R(R(P^m)) \end{pmatrix},$$

построим отображение $\alpha \colon End_R(M) \to End_R(M)$ по правилу

$$\alpha \colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ если } d \text{ — обратим в } End_R(R(P^m)),$$

$$\alpha \colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d - p^{m-2}d \end{pmatrix}, \text{ если } d \text{ — необратим в } End_R(R(P^m)), \text{ где } P = Rp.$$

Непосредственно проверяется, что построенное отображение является полугрупповым, но не кольцевым автоморфизмом. В общем случае ситуация с ограниченными модулями остается не ясной, что не позволяет получить необходимые и достаточные условия, когда периодический или смешанный модуль над коммутативным дедекиндовым кольцом имеет UA-кольцо эндоморфизмов.

Теорема 5. *Пусть* $M = \left[\mathcal{R}_{tf}(M) \bigoplus \mathcal{D}_{tf}(M) \oplus \bigoplus_{P \notin S} t_P(M)\right] \oplus \bigoplus_{P \in S} t_P(M)$ — *R-модуль такой, что*

1. *$\mathcal{R}_{tf}(M) \neq 0$ и $\mathcal{D}_{tf}(M) \neq 0$;*
2. *$S = \{P \in supp(M) \mid Ptf(M) = tf(M)\}$;*
3. *$t_P(M) = R(P^n) \bigoplus R(P^n) \bigoplus M(P)$, где $P^n M(P) = 0$, или $t_P(M)$ — имеет неограниченный базисный подмодуль, для всех $P \in S$.*

Тогда $End_R(M)$ — UA-кольцо. Если подмодуль $tf(M)$ обобщенно эндопримален, то M — обобщенно эндопримальный R-модуль.

Доказательство. Введем обозначения:

$$M_1 = \mathcal{R}_{tf}(M) \bigoplus \mathcal{D}_{tf}(M) \oplus \bigoplus_{P \notin S} t_P(M)$$

и $M_2 = \bigoplus_{P \in S} t_P(M)$. В силу тривиальности групп $Hom_R(M_1, M_2)$ и $Hom_R(M_2, M_1)$, имеем $End_R(M) \cong End_R(M_1) \times End_R(M_2)$. По предыдущему утверждению, M_2 — обобщенно эндопримальный модуль и $End_R(M_2)$ — UA-кольцо. Покажем, что $End_R(M_1)$ — UA-кольцо.

Рассмотрим проекции

$$e_{dtf}\colon M_1 \to \mathcal{D}_{tf}(M),\ e_{rtf}\colon M_1 \to \mathcal{R}_{tf}(M) \text{ и } e_t\colon M_1 \to t(M_1).$$

Для указанной системы идемпотентов справедливо равенство

$$(0 : e_t End_R(M_1) e_{rtf})_l \bigcap e_t End_R(M_1) e_t = 0.$$

Действительно, пусть $0 \neq \varphi \in End_R(t(M_1))$. Найдется идеал $Q \notin S$ такой, что $\varphi t_Q(M_1) \neq 0$. Поскольку $\varphi t_Q(M_1) \subseteq t_Q(M_1)$, то $0 \neq \varphi_1 = \varphi \restriction t_Q(M_1) \in End_R(t_Q(M_1))$. Поэтому эндоморфизм φ_1 действует на базисном подмодуле модуля $t_Q(M_1)$ не тривиально. Существует целое положительное число k такое, что $\varphi R(Q^k) \neq 0$. Гомоморфизм $Rx \to R(Q^k)$, определенный действием на образующих, может быть продолжен до гомоморфизма $\psi\colon \mathcal{R}_{tf}(M) \to R(Q^k)$ в силу Q-чисто инъективности модуля $R(Q^k)$. Откуда $\varphi\psi \neq 0$.

Проверим справедливость равенства

$$(0 : e_{dtf} End_R(M_1) e_{rtf})_l \bigcap e_{rtf} End_R(M_1) e_{rtf} = 0.$$

Пусть $0 \neq \varphi \in End_R(\mathcal{R}_{tf}(M))$. Существует $x \in R_{tf}(M)$ такой, что $\varphi(x) \neq 0$. Поскольку мономорфизм $R\varphi(x) \to \mathcal{D}_{tf}(M)$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi\colon \mathcal{R}_{tf}(M) \to \mathcal{D}_{tf}(M)$, мы получаем $\psi\varphi \neq 0$.

Покажем, что

$$(0 : e_{dtf} End_R(M_1) e_{rtf})_r \bigcap e_{dtf} End_R(M_1) e_{dtf} = 0.$$

Пусть $0 \neq \varphi \in End_R(\mathcal{D}_{tf}(M))$. Существует $x \in \mathcal{D}_{tf}(M)$ такой, что $\varphi(x) \neq 0$. Поскольку для $y \in \mathcal{R}_{tf}(M)$ мономорфизм $Ry \to Rx$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi\colon \mathcal{R}_{tf}(M) \to \mathcal{D}_{tf}(M)$, снова получаем $\varphi\psi \neq 0$.

Докажем, что модуль M_1 обобщенно эндопримален. Заметим, что каждая эндофункция $f\colon M_1 \to M_1$ аддитивна. Действительно, каждый периодический модуль над дедекиндовой областью является дистрибутивным модулем над своим кольцом эндоморфизмов. В работе [8] доказано, что каждая унарная эндофункция дистрибутивного модуля аддитивна. По условию подмодуль $tf(M)$ обобщенно эндопримален, поэтому для $a, a' \in tf(M)$ и $b, b' \in t(M_1)$ имеем

$$f(a + b + a' + b') = (e_{tf} + e_t) f(a + b + a' + b') = e_{tf} f(a + b + a' + b') + e_t f(a + b + a' + b') =$$

$$= f(a + a') + f(b + b') = f(a) + f(a') + f(b) + f(b'),$$

где $e_{tf}\colon M_1 \to tf(M)$ и $e_t\colon M_1 \to t(M_1)$ — проекции. Аналогично,

$$f(a + b) + f(a' + b') = f(a) + f(a') + f(b) + f(b').$$

Предположим теперь, что каждая k-арная эндофункция модуля M_1 аддитивна и пусть $f\colon M_1^{k+1} \to M_1$ — произвольная эндофункция. Докажем, что

$$f(x_1 + y_1, \ldots, x_{k+1} + y_{k+1}) = f(x_1, \ldots, x_{k+1}) + f(y_1, \ldots, y_{k+1})$$

для всех $x_1, y_1, \ldots, x_{k+1}, y_{k+1} \in M_1$.

Поскольку модуль M_1 расщепляется, элементы x_i и y_i представимы в виде

$$x_i = x_i(tf(M)) + x_i(t(M_1)),\ y_i = y_i(tf(M)) + y_i(t(M_1)),$$

где

$$x_i(tf(M)), y_i(tf(M)) \in tf(M) \text{ и } x_i(t(M_1)), y_i(t(M_1)) \in t(M_1)$$

для всех индексов $i \in \{1, \ldots, k\}$. Введем обозначения:

- $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{k+1})$,
- $\overline{tf(x)} = (x_1(tf(M)), \ldots, x_{k+1}(tf(M)))$,
- $\overline{t(x)} = (x_1(t(M_1)), \ldots, x_{k+1}(t(M_1)))$,
- $\overline{t_P(x)} = (x_1(t_P(M_1)), \ldots, x_{k+1}(t_P(M_1)))$.

Для элементов y_i будем использовать аналогичные обозначения.

Пусть $e_{tf}\colon M_1 \to tf(M)$ и $e_t\colon M_1 \to t(M_1)$ — проекции. Тогда

$$\begin{gathered} f(\overline{x} + \overline{y}) = f((e_{tf} + e_t)(\overline{x} + \overline{y})) = (e_{tf} + e_t)f(\overline{x} + \overline{y}) = \\ = f(e_{tf}(\overline{x} + \overline{y})) + f(e_t(\overline{x} + \overline{y})) = f(\overline{tf(x)} + \overline{tf(y)}) + f(\overline{t(x)} + \overline{t(y)}). \end{gathered}$$

По условию теоремы, модуль $tf(M)$ обобщенно эндопримален. Отсюда следует, что

$$f(\overline{tf(x)} + \overline{tf(y)}) = f(\overline{tf(x)}) + f(\overline{tf(y)}).$$

Рассматриваем далее второе слагаемое.

Существует подмножество $S_t \subseteq supp(M) \setminus S$ такое, что $x_i(t(M_1)), y_i(t(M_1)) \in \sum\limits_{P \in S_t} t_P(M_1)$ для всех $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Как и выше, используя проекции $e_P\colon M \to t_P(M_1)$, мы получаем $f(\overline{t(x)} + \overline{t(y)}) = \sum\limits_{P \in S_t} f(\overline{t_P(x)} + \overline{t_P(y)})$.

Для каждого $P \in S_t$ можно считать, что элементы $x_1(t_P(M_1)), y_1(t_P(M_1))$ принадлежат некоторому слагаемому $R(P^{m_P})$ модуля M_1, где $m_P < \omega$. Пусть $x_1(t_P(M_1)) = r_P t_P$ и $y_1(t_P(M_1)) = s_P t_P$, где $r_P, s_P \in R$ и $t_P \in R(P^{m_P})$. Существуют эндоморфизмы $\varphi_P \in End_R(M_1)$ такие, что $\varphi_P tf(M) = R(P^{m_P})$, $\varphi_P \restriction t(M_1) = id$ и $\varphi_P a_P = t_P$ для $a_P \in tf(M)$. Таким образом,

$$\begin{gathered} f(\overline{t_P(x)} + \overline{t_P(y)}) = f(r_P t_P + s_P t_P, \ldots, \varphi_P x_{k+1}(t_P(M_1)) + \varphi_P y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ = f(\varphi_P r_P a_P + \varphi_P s_P a_P, \ldots, \varphi_P x_{k+1}(t_P(M_1)) + \varphi_P y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ = \varphi_P f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ = \varphi_P(e_{tf} + e_t) f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ = \varphi_P e_{tf} f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) + \\ + \varphi_P e_t f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ = \varphi_P f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, 0) + \varphi_P f(0, \ldots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ = f(x_1(t_P(M_1)) + y_1(t_P(M_1)), \ldots, 0) + f(0, \ldots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))). \end{gathered}$$

По предположению каждая k-арная эндофункция аддитивна, поэтому эндофункция f аддитивна. $\square$

Теорема 6. *Пусть $M = tf(M) \bigoplus \mathcal{R}_t(M) \bigoplus \mathcal{D}_t(M)$ — R-модуль такой, что $tf(M) \neq 0$, $\mathcal{D}_t(M) \neq 0$ и $supp(\mathcal{R}_t(M)) \subseteq supp(\mathcal{D}_t(M))$. Тогда $End_R(M)$ — UA-кольцо. Если модуль $tf(M)$ обобщенно эндопримален, то M — обобщенно эндопримальный модуль.*

Доказательство. Рассмотрим проекции $e_{tf}\colon M \to tf(M)$, $e_{rt}\colon M \to \mathcal{R}_t(M)$ и $e_{dt}\colon M \to \to \mathcal{D}_t(M)$.

Покажем, что

$$(0 : e_{dt}End_R(M)e_{tf})_r \bigcap e_{tf}End_R(M)e_{tf} = 0.$$

Пусть $\varphi \in e_{tf}End_R(M)e_{tf}$ и $\varphi(x) \neq 0$ для некоторого $x \in tf(M)$. Поскольку R-модуль $\mathcal{D}_t(M)$ инъективен, то ненулевой гомоморфизм $R\varphi(x) \to \mathcal{D}_t(M)$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi\colon tf(M) \to \mathcal{D}_t(M)$. Отсюда $\psi\varphi \neq 0$.

Проверим справедливость равенства

$$(0 : e_{dt}End_R(M)e_{tf})_l \bigcap e_{dt}End_R(M)e_{dt} = 0.$$

Пусть $0 \neq \varphi \in e_{dt}End_R(M)e_{dt}$. Поскольку модуль $\mathcal{D}_t(M)$ является прямой суммой модулей типа P^∞, имеем $\varphi(R(Q^k)) \neq 0$ для некоторого подмодуля $R(Q^k)$. Если $0 \neq x \in tf(M)$, то ненулевой гомоморфизм $Rx \to R(Q^k)$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi\colon tf(M) \to \mathcal{D}_t(M)$ и $\varphi\psi \neq 0$.

Равенство

$$(0 : e_{dt}End_R(M)e_{rt}) \bigcap e_{rt}End_R(M)e_{rt} = 0,$$

следует из того, что естественное вложение $R(P^n) \to R(P^\infty)$ может быть продолжено до гомоморфизма $\psi\colon \mathcal{R}_t(M) \to \mathcal{D}_t(M)$ для $P \in supp(\mathcal{R}_t(M))$.

Докажем обобщенную эндопримальность модуля M. Как и в предыдущем утверждении, каждая эндофункция $f\colon M \to M$ является обобщенной терм-функцией. Пусть каждая k-арная эндофункция модуля M аддитивна и пусть $f\colon M^{k+1} \to M$ — произвольная эндофункция. Докажем, что

$$f(x_1 + y_1, \ldots, x_{k+1} + y_{k+1}) = f(x_1, \ldots, x_{k+1}) + f(y_1, \ldots, y_{k+1})$$

для всех $x_1, y_1, \ldots, x_{k+1}, y_{k+1} \in M$.

Поскольку модуль M расщепляется, элементы x_i и y_i представимы в виде

$$x_i = x_i(tf(M)) + x_i(rt(M)) + x_i(dt(M)),\ y_i = y_i(tf(M)) + y_i(rt(M)) + y_i(dt(M)),$$

где $x_i(tf(M)), y_i(tf(M)) \in tf(M)$, $x_i(rt(M)), y_i(rt(M)) \in \mathcal{R}_t(M)$ и, наконец, справедливо $x_i(dt(M)), y_i(dt(M)) \in \mathcal{D}_t(M)$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Помимо ранее введенных, мы будем использовать следующие обозначения:

- $\overline{rt_P(x)} = (x_1(rt_P(M)), \ldots, x_{k+1}(rt_P(M))) \in t_P(\mathcal{R}_t(M))^{k+1}$,
- $\overline{dt_P(x)} = (x_1(dt_P(M)), \ldots, x_{k+1}(dt_P(M))) \in t_P(\mathcal{D}_t(M))^{k+1}$.

Аналогично, как в предыдущем утверждении,

$$f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{tf(x)}) + f(\overline{tf(y)}) + \sum_{P \in S_t} f(\overline{rt_P(x)} + \overline{rt_P(y)}) + \sum_{P \in S_t} f(\overline{dt_P(x)} + \overline{dt_P(y)}),$$

где $S_t \subseteq supp(M)$ и $x_i(t(M)), y_i(t(M)) \in \sum_{P\in S_t} t_P(M)$ для всех $i \in \{1, \ldots, k+1\}$.

Для каждого $P \in S_t$ можно считать, что элементы $x_1(dt_P(M)), y_1(dt_P(M))$ принадлежат некоторому подмодулю $R(P^{m_P})$, где $m_P < \omega$. Пусть $x_1(dt_P(M)) = r_P t_P$ и $y_1(dt_P(M)) = s_P t_P$, где $r_P, s_P \in R$ и $t_P \in R(P^{m_P})$. Существуют эндоморфизмы $\varphi_P \in End_R(M)$ такие, что $\varphi_P t_P(\mathcal{R}_t(M)) = R(P^{m_P})$, $\varphi_P \restriction \mathcal{D}_t(M) = id$ и $\varphi_P a_P = t_P$ для некоторых $a_P \in t_P(\mathcal{R}_t(M))$. Таким образом,

$$\begin{gathered}
f(\overline{dt_P(x)} + \overline{dt_P(y)}) = f(r_P t_P + s_P t_P, \ldots, \varphi_P x_{k+1}(dt_P(M)) + \varphi_P y_{k+1}(dt_P(M))) = \\
= f(\varphi_P r_P a_P + \varphi_P s_P a_P, \ldots, \varphi_P x_{k+1}(dt_P(M)) + \varphi_P y_{k+1}(dt_P(M))) = \\
= \varphi_P f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) = \\
= \varphi_P(e_{rt} + e_{dt}) f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) = \\
= \varphi_P e_{rt} f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) + \\
+ \varphi_P e_{dt} f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) = \\
= \varphi_P f(r_P a_P + s_P a_P, \ldots, 0) + \varphi_P f(0, \ldots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) = \\
= f(x_1(dt_P(M)) + y_1(dt_P(M)), \ldots, 0) + f(0, \ldots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))).
\end{gathered}$$

По предположению каждая k-арная эндофункция аддитивна, поэтому эндофункция f аддитивна.

Существует вложение $\varphi\colon \mathcal{R}_t(M) \to \mathcal{D}_t(M)$, которое можно отождествить с некоторым эндоморфизмом модуля M. Поскольку эндофункция $f\colon M^{k+1} \to M$ аддитивна на $\mathcal{D}_t(M)$, мы получаем

$$\begin{gathered}
\varphi \sum_{P\in S_t} f(\overline{rt_P(x)} + \overline{rt_P(y)}) = \sum_{P\in S_t} f(\varphi\overline{rt_P(x)} + \varphi\overline{rt_P(y)}) = \\
= \sum_{P\in S_t} f(\varphi\overline{rt_P(x)}) + \sum_{P\in S_t} f(\varphi\overline{rt_P(y)}) = \varphi \sum_{P\in S_t} f(\overline{rt_P(x)}) + \varphi \sum_{P\in S_t} f(\overline{rt_P(y)}).
\end{gathered}$$

Учитывая, что φ — мономорфизм, заключаем, что эндофункция f аддитивна на $\mathcal{R}_t(M)$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Kaarli, L. Marki. Endoprimal Abelian groups // Jour. Austral. Math. Soc. 1999. V. 67. 412 – 428.

2. K. Kaarli, L. Marki. Endoprimal Abelian groups of torsion-free rank 1 // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2004. V. 112. 117 – 130.

3. R. Gobel, K. Kaarli, L. Marki, S. Wallutis. Endoprimal torsion-free separable groups // Jour. of Alg. and Its Appl. 2004. V. 3. 61 – 73.

4. U. Albrecht, S. Breaz, W. Wickless. Generalized endoprimal abelian groups // Jour. of Alg. and Its Appl. 2006. V. 5. 1 – 17.

5. B.A. Davey. Dualisability in general and endodualisability in particular // Logic and Algebra, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 1996. V. 180. 437 – 455.

6. B.A. Davey, J.G. Pitkethly. Endoprimal algebras // Algebra Universalis. 1997. V. 38. 266 – 288.

7. Д.С. Чистяков. Сепарабельные модули без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2015. Т. 6. 53 – 59.

8. Д.С. Чистяков. Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов // Матем. заметки. 2012. Т. 91. 878 – 884.

9. О.В. Любимцев, Д.С. Чистяков. Об абелевых группах без кручения с UA-кольцом эндоморфизмов // Вестник томского гос. универ. 2011. Т. 14. 55 – 58.

10. О.В. Любимцев, Д.С. Чистяков. UA-свойства модулей над коммутативными нетеровыми кольцами // Изв. вузов. Матем. 2016. Т. 11. 42 – 52.

11. R.E. Johnson. Rings with unique addition // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. 55 – 61.

12. W.S. Martindale, III. When are multiplicative mappings additive? // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. 695 – 698.

13. A.V. Mikhalev. The multiplicative classification of associative rings // Math. Sb. 1988. V. 135(177). 210 – 224.

14. Chr.-F. Nelius. Ringe mit eindentinger Addition. Paderborn. 1974.

15. C.E. Rickart. One-to-one mappings of rings and lattices // Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. 758 – 764.

16. W. Stephenson. Unique addition rings // Can. J. Math. 1969. V. 21(6). 1455 – 1461.

17. I.I. Artamonova. On uniqueness of addition in semirings // Fundam. Prikl. Mat. 1997. V. 3. 1093 – 1100 (in Russian).

18. I.V. Arzhantsev. Uniqueness of addition in semisimple Lie algebras // Russian Math. Surveys. 2001. V. 56. 569 – 571.

19. A.B. van der Merwe. Unique addition modules // Comm. in Alg. 1999. V. 27. 4103 – 4115.

20. О.В. Любимцев, Д.С. Чистяков. Модули без кручения с UA-кольцами эндоморфимов // Матем. заметки. 2015. Т. 98. 898 – 906.

21. О.В. Любимцев. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов// Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4. 1419 – 1422.

22. О.В. Любимцев. Периодические абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. 2001. Т. 70. 736 – 741.

23. О.В. Любимцев. Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. 2015. Т. 98. 125 – 133.

24. О.В. Любимцев. Алгебраически компактные абелевы группы с UA-кольцами эндоморфимов // Фунд. и прикл. математика. 2015. Т. 20. 121 – 129.

25. О.В. Любимцев, Д.С. Чистяков. Смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов // Матем. заметки. 2015. Т. 97. 556–565.

26. П.А. Крылов, А.А. Туганбаев. Модули над областями дискретного норирования. М.: Факториал Пресс. 2007.

REFERENCES

1. Kaarli K., Marki L. 1999, ”Endoprimal Abelian groups” , *Jour. Austral. Math. Soc.*, vol. 67, pp. 412-428.

2. Kaarli K., Marki L. 2004, ”Endoprimal Abelian groups of torsion-free rank 1”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, vol. 112, pp. 117-130.

3. Gobel R., Kaarli K., Marki L., Wallutis S. 2004, ”Endoprimal torsion-free separable groups”, *Jour. of Alg. and Its Appl.*, vol. 3, pp. 61-73.

4. Albrecht U., Breaz S., Wickless W. 2006, ”Generalized endoprimal abelian groups”, *Jour. of Alg. and Its Appl.*, vol. 5, pp. 1-17.

5. Davey B.A. 1996, ”Dualisability in general and endodualisability in particular”, *Logic and Algebra, Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, vol. 180, pp. 437-455.

6. Davey B.A., Pitkethly J.G. 1997, ”Endoprimal algebras”, *Algebra Universalis*, vol. 38, pp. 266-288.

7. Чистяков Д.С. 2015, ”Сепарабельные модули без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов”, *Изв. вузов. Математика*, т. 6, с. 53-59.

8. Чистяков Д.С. 2012, ”Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов *Матем. заметки* т. 91, с. 878-884.

9. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. 2011, ”Об абелевых группах без кручения с UA-кольцом эндоморфизмов” *Вестник томского гос. универ.*, т. 14, с. 55-58.

10. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. 2016, ”UA-свойства модулей над коммутативными нетеровыми кольцами”, *Изв. вузов. Матем.*, т. 11. 42-52.

11. Johnson R.E. 1958, "Rings with unique addition *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 9, pp. 55-61.

12. Martindale W.S. 1969, ”When are multiplicative mappings additive?”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 21, pp. 695-698.

13. Mikhalev A.V. 1988, ”The multiplicative classification of associative rings”, *Math. Sb.*, vol. 135, pp. 210-224.

14. Nelius Chr.-F. 1974, ”Ringe mit eindentinger Addition”, Paderborn.

15. Rickart C.E. 1948, ”One-to-one mappings of rings and lattices”, *Amer. Math. Soc.*, vol. 54, pp. 758-764.

16. Stephenson W. 1969, ”Unique addition rings”, *Can. J. Math.*, vol. 21, pp. 1455-1461.

17. Artamonova I.I. 1997, ”On uniqueness of addition in semirings”, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 3, pp. 1093-1100.

18. Arzhantsev I.V. 2001, ”Uniqueness of addition in semisimple Lie algebras”, *Russian Math. Surveys*, vol. 56, pp. 569-571.

19. van der Merwe A.B. 1999, ”Unique addition modules”, *Comm. in Alg.*, vol. 27, pp. 4103-4115.

20. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. 2015, ”Модули без кручения с UA-кольцами эндоморфимов”, *Матем. заметки*, т. 98, с. 898-906.

21. Любимцев О.В. 1998, ”Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов”, *Фунд. и прикл. математика*, т. 4, с. 1419-1422.

22. Любимцев О.В. 2001, ”Периодические абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, т. 70, с. 736-741.

23. Любимцев О.В. 2015, ”Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, т. 98, с. 125 – 133.

24. Любимцев О.В. 2015, ”Алгебраически компактные абелевы группы с UA-кольцами эндоморфимов”, *Фунд. и прикл. математика*, т. 20, с. 121-129.

25. Любимцев О.В, Чистяков Д.С. 2015, ”Смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, т. 97, с. 556-565.

26. Крылов П.А., Туганбаев А.А. 2007, ”Модули над областями дискретного норирования”, М.: Факториал Пресс.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Получено 21.03.2017 г.
Принято в печать 14.06.2017 г.