ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 2

УДК 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-245-255

О КОЛЬЦАХ КВАЗИЭНДОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ СИЛЬНО НЕРАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 4

А. В. Чередникова (г. Кострома)

Аннотация

Кольцом квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ абелевой группы G без кручения конечного ранга называется делимая оболочка кольца эндоморфизмов этой группы. Элементы кольца $\mathcal{E}(G)$ называются квазиэндоморфизмами группы G. Таким образом, квазиэндоморфизмы группы G — это обычные эндоморфизмы, формально поделенные на ненулевые целые числа.

В статье рассматриваются кольца квазиэндоморфизмов класса сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с одним τ-адическим соотношением, псевдоцоколь которых имеет ранга 1. При этом используется описание групп этого класса с точностью до квазиизоморфизма в терминах четырехмерных над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ подпространств алгебры $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p\in P} K_p$, где P — множество простых чисел, (m_p) — занумерованные простыми индексами p неотрицательное целое число и символ ∞, $\tau = [(m_p)]$ — фиксированный тип, $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} в случае $m_p < \infty$, и K_p — кольцо целых p-адических чисел при $m_p = \infty$. Существующая связь между квазиэндоморфизмами группы G рассматриваемого класса и эндоморфизмами соответствующего ей подпространства U алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ позволяет представить квазиэндоморфизмы этой группы в виде матриц порядка 4 над полем рациональных чисел.

В работе получена классификация колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4, с одним τ-адическим соотношением, псевдоцоколь которых имеет ранг 1. Доказано, что с точностью до изоморфизма существует 2 алгебры и 1 бесконечная серия алгебр с рациональным параметром, которые реализуются в качестве колец квазиэндоморфизмов рассматриваемого класса групп.

Ключевые слова: кольцо квазиэндоморфизмов, абелева группа, группа без кручения конечного ранга, сильно неразложимая группа.

Библиография: 17 названий.

ON QUASI-ENDOMORPHISM RINGS OF SOME STRONGLY INDECOMPOSABLE TORSION-FREE ABELIAN GROUPS OF RANK 4

A. V. Cherednikova (Kostroma)

Abstract

By the quasi-endomorphism ring $\mathcal{E}(G)$ of a torsion-free Abelian group G of finite rank we mean divisible hull of the endomorphism ring of the group. The elements of $\mathcal{E}(G)$ is called quasi-endomorphisms of G. Thus the quasi-endomorphisms of the group G is normal endomorphisms, which formally divided by non-zero integers.

In the paper it is considered quasi-endomorphism rings of class of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with one τ-adic relation, whose pseudo-socles have rank 1. Let $\tau = [(m_p)]$ be a fixed type, where m_p is a non-negative integer or the symbol ∞, indexed by elemets of P, the set of primes numbers. Denote by $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ the residue class ring modulo p^{m_p} in the case $m_p < \infty$ and ring of p-adic integers if $m_p = \infty$. We use the description of the groups from the above class up to quasi-isomorphism in terms of four-dimension over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ subspaces of algebra $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}\otimes\prod_{p\in p} K_p$. The existing relationship between the quasi-endomorphisms of a group G of this class and endomorphisms of the corresponding of this group subspace U of the algebra $\mathbb{Q}(\tau)$ allows us to represent the quasi-endomorphisms of the group G in the form of a matrices of order 4 over the field of rational numbers.

In this paper, a classification of the quasi-endomorphism rings of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with one τ-adic relation, whose pseudo-socles have rank 1, is obtained. It is proved that, up to isomorphism, there exist two algebras and one infinite series of algebras with rational parameter, which are realized as quasi-endomorphism rings of groups of this class.

Keywords: quasi-endomorphism ring, Abelian group, torsion-free group of finite rank, strongly indecomposable group.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Всюду в статье слово «группа» будет означать абелеву группу без кручения конечного ранга, записанную аддитивно.

Задача классификации колец квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения малых рангов возникла в 1961 году в связи с введением Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в совместной работе [1] понятия «кольца квазиэндоморфизмов группы» — минимальной рациональной алгебры, содержащей кольцо эндоморфизмов этой группы. В этой же работе они указали с точностью до изоморфизма все алгебры, реализующиеся в качестве колец квазиэндоморфизмов групп ранга 2. Понятия и конструкции, разработанные Дж. Рейдом в работе [2] позволили использовать кольца квазиэндоморфизмов группы как при изучении самой группы, так и ее кольца эндоморфизмов. Классификация колец квазиэндоморфизмов групп ранга 3 была получена автором в конце 1990-х годов [3, 4, 5].

Задача классификации колец квазиэндоморфизмов групп ранга 4 в настоящее время не является полностью решенной. На пути ее решения автором получен ряд результатов. В частности, классификационная задача полностью решена для почти вполне разложимых групп ранга 4 [6, 7].

В рамках рассматриваемой проблемы наибольший интерес представляет случай сильно неразложимых групп. В монографии Т. Фатикони [8, теорема 4.4.9] представлено решение классификационной задачи для сильно неразложимых групп ранга 4, совпадающих со своими псевдоцоколями. Изучению колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 4, отличных от своих псевдоцоколей, посвящены работы автора [9] и [10].

Настоящая работа посвящена задаче классификации алгебр квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 4 с одним τ-адическим соотношением, псевдоцоколь которых имеет ранг 1.

2. Предварительные сведения

2.1. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и G — произвольная группа. Тогда $\mathbb{Q}\otimes G$ является ее делимой оболочкой, которую можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{Q}$, аддитивная группа которого содержит G в качестве подгруппы. Пусть группа H содержится в делимой оболочке $\mathbb{Q}\otimes G$ группы G.

Говорят, что группы G и H квазиравны и пишут $G \doteq H$, если существуют натуральные числа n и m такие, что $nG \subseteq H$ и $mH \subseteq G$.

Определение 1. *Семейство ненулевых подгрупп G_i ($i \in I$, где I — конечное множество) делимой оболочки $\mathbb{Q}\otimes G$ группы G называется квазиразложением группы G, если $G \doteq \oplus_{i\in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется квазислагаемым группы G. Группа G называется сильно неразложимой, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями.*

Определение 2. *Кольцом квазиэндоморфизмов группы G называется кольцо всех линейных преобразований f пространства $\mathbb{Q}\otimes G$ таких, что $nf(G) \subseteq G$ для некоторых ненулевых целых чисел n. Обозначим его через $\mathcal{E}(G)$. Элементы из $\mathcal{E}(G)$ называются квазиэндоморфизмами группы G.*

Таким образом, кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ представляет собой $\mathbb{Q}$-алгебру, порожденную кольцом $E(G)$ в кольце всех линейных преобразований пространства $\mathbb{Q}\otimes G$.

Определение 3. *Псевдоцоколем $Soc\ G$ группы G называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами.*

Псевдоцоколь группы имеет важное значение при исследовании колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимой группы. Это связано со следующим результатом, который мы будем использовать в дальнейшем.

Предложение 1 (Reid [2]). *Пусть P — некоторая (равносильно любая) минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G и $J(\mathcal{E}(G))$ — радикал Джекобсона кольца квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G. Тогда*

$$dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/J(\mathcal{E}(G))) = r(P),$$

где $r(P)$ — ранг подгруппы P.

В статье, кроме отмеченных в тексте, используются следующие обозначения:
P — множество простых чисел; если $p \in P$, то $Z(p^m)$ — циклическая группа порядка p^m при целом неотрицательном m, либо квазициклическая группа в случае $m = \infty$; $< u_1, u_2, ..., u_n >_{\mathbb{Q}}$ — подпространство векторного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденное векторами $u_1, u_2, ..., u_n$; м. л. н. с. — максимальная линейно-независимая система.

Отсутствующие в работе определения, факты и обозначения общеприняты и соответствуют [11, 12].

2.2. τ-адические числа

Характеристикой называется последовательность (m_p) неотрицательных целых чисел и символов ∞, занумерованная простыми индексами. Две характеристики *эквивалентны*, если они различаются не более чем в конечном числе конечных p-компонент. Класс эквивалентности характеристики (m_p) называется *типом* и обозначается через $\tau = [(m_p)]$.

Пусть фиксирован тип τ. Положим $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p}, если $m_p < \infty$, и $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел в случае $m_p = \infty$.

Определение 4. *Алгебра над полем рациональных чисел*

$$\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p\in P} K_p$$

называется алгеброй τ-адических чисел, а ее элементы — τ-адическими числами.

Заметим, что алгебра τ-адических чисел, введенная Фоминым [13], представляет собой обобщение поля p-адических чисел и кольца универсальных чисел Куликова [14].

Любое τ-адическое число α представляется в виде $\alpha = r \otimes (\alpha_p)$, где $r \in \mathbb{Q}, (\alpha_p) \in \prod_{p \in P} K_p$. Причем это представление не является однозначным.

Наибольший показатель h_p степени простого числа p, для которого p^{h_p} делит $\alpha_p \in K_p$ называется *p-высотой элемента* α_p в кольце K_p. При этом, если $\alpha_p = 0$, то $h_p = m_p$. *Типом τ-адического числа* $\alpha = r \otimes (\alpha_p)$ называется набор p-высот (h_p) элементов $\alpha_p \in K_p$ по всем простым числам p. Тип τ-адического числа α не зависит от выбора представления числа α и меньше либо равен τ. Свойства τ-адических чисел изложены в [15, 16].

2.3. Группы с одним τ-адическим соотношением

Класс $\mathfrak{F}$ групп с одним τ-адическим соотношением был выделен А. А. Фоминым [15] при решении задачи построения инвариантов, описывающих абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квазиизоморфизма, в духе работы Бьюмонта–Пирса [1].

Пусть G — группа конечного ранга и τ — некоторый фиксированный тип. Положим $G(p) = G/p^{m_p}G$, если $m_p < \infty$, и $G(p) = \widehat{G}_p$ — p-адическое пополнение группы G в случае $m_p = \infty$. Тогда $G_\tau = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} G(p)$ не зависит от выбора характеристики типа τ, и называется *τ-адическим пополнением группы* G [15]. Отметим, что G_τ является модулем над кольцом $\mathbb{Q}(\tau)$.

Определение 5 ([15]). *Группа G с м. л. н. с. $x_1, x_2, ..., x_n$, для которой в τ-адическом пополнении группы G_τ выполнено равенство*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \quad (1)$$

со взаимно простыми в совокупности τ-адическими коэффициентами, называется группой с одним τ-адическим соотношением.

Соотношение (1) называется порождающим соотношением группы G. Любое другое порождающее соотношение группы G получается домножением соотношения (1) на обратимые τ-адические числа.

Замечание Пусть F — свободная подгруппа ранга n группы G ранга n. Известно, что

$$A/F \cong \bigoplus_{p \in P} (Z(p^{i_{1p}}) \oplus ... \oplus Z(p^{i_{np}})),$$

где $0 \le i_{1p} \le ... \le i_{np} \le \infty$ — целые неотрицательные числа или символы ∞. Положим $\tau_1 = [(i_{1p})], ..., \tau_n = [(i_{np})]$. Набор типов $\tau_1 \le ... \le \tau_n$ не зависит от выбора подгруппы F и называется *типом Ричмена группы* G [17]. Класс $\mathfrak{F}$ групп с одним τ-адическим соотношением совпадает с классом групп, имеющих тип Ричмена $0, 0, ..., \tau$ ([16], глава II, § 7).

Рассмотрим краткое описание инвариантов коредуцированных (т. е. не содержащих свободных прямых слагаемых) групп класса $\mathfrak{F}$.

Говорят, что подпространство $U = < \alpha_1, ..., \alpha_n >_{\mathbb{Q}}$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ имеет *нулевой тип*, если τ-адические числа в совокупности взаимно просты. Конечномерные над $\mathbb{Q}$ подпространства U и V нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ называются *эквивалентными*, если существует обратимое τ-адическое число α такое, что $U = \alpha V$.

Пусть G — коредуцированнная группа класса $\mathfrak{F}$ ранга $n > 1$. В этом случае τ-адические коэффициенты $\alpha_1, ..., \alpha_n$ порождающего соотношения (1) в совокупности взаимно просты и образуют базис подпространства $U = < \alpha_1, ..., \alpha_n >_{\mathbb{Q}}$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. Класс эквивалентности $[U]$ подпространства U нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ размерности n над $\mathbb{Q}$ является инвариантом группы G, который называется *τ-адическим инвариантом* размерности n.

Пусть U — конечномерное над $\mathbb{Q}$ подпространство алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. Тогда $U : U = \{\alpha \in \mathbb{Q}(\tau) \mid \alpha U \subset U\}$ замкнуто относительно умножения, содержит единицу и является конечномерной над $\mathbb{Q}$ подалгеброй алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$.

Предложение 2 ([16]; теорема III.4.1). *Пусть коредуцированной группе G конечного ранга соответствует пространство нулевого типа U, $U \subset \mathbb{Q}(\tau)$. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфна конечномерной над $\mathbb{Q}$ подалгебре $U : U$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. В частности, $\mathcal{E}(G)$ — коммутативное кольцо.*

Предложение 3 ([16]; теорема III.4.9). *Пусть G — коредуцированная группа конечного ранга класса F с τ-адическим инвариантом $[U]$. Группа G сильно неразложима тогда и только тогда, когда в $U : U$ отсутствуют нетривиальные идемпотенты.*

3. Основной результат

Соглашение В нижеследующей теореме нижний индекс $\mathbf{i}$ в обозначении алгебры $\mathbf{A_i^{(j)}}$ есть ее размерность над $\mathbb{Q}$, верхний индекс $\mathbf{j}$ — порядковый номер алгебры. Кроме этого, в обозначении алгебр $\mathbf{A_4^{(2)}}(\mathbf{n}), \mathbf{B_4}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$, а также в записях представляющих их матриц, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ — рациональные параметры.

Теорема 1. *Пусть G — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 4 с одним τ-адическим соотношением и $Soc\ G$ имеет ранг 1. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A_4^{(1)}} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right) \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_4^{(2)}}(\mathbf{n}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & \mathbf{n}z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right) \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_4^{(3)}} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right) \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию теоремы и $[U]$ — ее τ-адический инвариант, где U является подпространством нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. Очевидно, что G является коредуцированной группой. Согласно предложению 2 кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G коммутативно и изоморфно подалгебре $U : U$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. При этом $U : U \cong U$ и $dim_{\mathbb{Q}}(U : U) = dim_{\mathbb{Q}}(U) = 4$ (см. [15, следствия 4.2 и 5.4]). Так как $Soc\,G$ имеет ранг 1, то на основании предложения 1 имеем $dim_{\mathbb{Q}}(U/J(U)) = 1$, где $J(U)$ — радикал Джекобсона кольца U. Согласно предложению 3 в кольце U отсутствуют нетривиальные идемпотенты. Следовательно, в качестве базиса пространства U можно выбрать систему τ-адических чисел $1, \alpha, \beta, \gamma$, где 1 — единица кольца $\mathbb{Q}(\tau)$, а α, β, γ являются необратимыми линейно независимыми τ-адическими числами. Значит, для некоторой м. л. н. с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы G в ее τ-адическом пополнении G_τ выполняется равенство $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4 = 0$.

Пусть φ — произвольный элемент $U : U$, через f_φ обозначим соответствующий φ квазиэндоморфизм группы G при изоморфизме $\mathcal{E}(G)$ и $U : U$ (см. предложение 2). Отметим, что между квазиэндоморфизмами группы G и элементами алгебры $U : U$, представляющими собой домножения на τ-адические числа, которые переводят U в U, имеет место следующее соответствие (см. [16, глава III, §4]):

$$\begin{pmatrix} f_\varphi(x_1) \\ f_\varphi(x_2) \\ f_\varphi(x_3) \\ f_\varphi(x_4) \end{pmatrix} = T_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где T_φ — матрица эндоморфизма $\varphi \in U : U$. Обозначим через T_{f_φ} матрицу, j-й столбец которой есть координатный столбец элемента $f_\varphi(x_j)$ относительно
м. л. н. с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы G, и назовем ее матрицей квазиэндоморфизма f_φ. Тогда из равенства (2) следует, что

$$T_{f_\varphi} = (T_\varphi)^t, \tag{3}$$

где $(T_\varphi)^t$ — матрица, транспонированная к T_φ.

Известно [10], что кольцо квазиэндоморфизмов сильно неразложимой группы ранга 4, псевдоцоколь которой имеет ранг 1, является с точностью до изоморфизма подалгеброй следующей алгебры:

$$\mathbf{A} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & u & v \\ 0 & 0 & x & w \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Так как $\mathcal{E}(G) \subset A$, то, в силу равенства (3), координатный столбец элемента $\varphi 1$ является первой строкой матрицы $T_{f_\varphi} \in \mathcal{E}(G)$. Отсюда и ввиду того, что $dim_{\mathbb{Q}}(U) = 4$, элементы первой строки произвольной матрицы алгебры $\mathcal{E}(G)$ должны быть линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Пусть K — коммутативное подкольцо кольца A, элементы первой строки произвольной матрицы которого линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $J(K)$ — его радикал Джекобсона.

Непосредственные вычисления показывают следующее:

1) если $J(K)^2 = 0$, то $\mathbf{K} \cong \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_4^{(1)}}$;

2) если $J(K)^2 \neq 0$ и $J(K)^3 = 0$, то K изоморфно алгебре

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & \mathbf{k}y \\ 0 & 0 & x & \mathbf{n}z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{B_4(k, n)};$$

3) если $J(K)^3 \neq 0$, то $\mathbf{K} \cong \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_4^{(3)}}$.

Покажем, что каждая из алгебр $\mathbf{A_4^{(1)}}, \mathbf{B_4(k, n)}$ и $\mathbf{A_4^{(3)}}$ реализуются в качестве кольца квазиэндоморфизмов некоторой сильно неразложимой группы ранга 4 класса с псевдоцоколем ранга 1.

Рассмотрим в подпространстве $U = < 1, \alpha, \beta, \gamma >_{\mathbb{Q}}$ нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$, где $[U]$ — τ-адический инвариант группы G, эндоморфизм домножения на $\varphi \in U$. Эндоморфизм φ представляется с рациональными коэффициентами r_1, r_2, r_3, r_4 в виде $\varphi = r_1 1 + r_2\alpha + r_3\beta + r_4\gamma$ и на базисных элементах действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi 1 &= r_1 1 + r_2\alpha + r_3\beta + r_4\gamma, \\ \varphi\alpha &= r_1\alpha + r_2\alpha^2 + r_3\beta\alpha + r_4\gamma\alpha, \\ \varphi\beta &= r_1\beta + r_2\alpha\beta + r_3\beta^2 + r_4\gamma\beta, \\ \varphi\gamma &= r_1\gamma + r_2\alpha\gamma + r_3\beta\gamma + r_4\gamma^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_4^{(1)}}$. Согласно равенству (3) матрица T_φ эндоморфизма φ имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ t & 0 & 0 & x \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что для базисных элементов α, β, γ радикала Джекобсона $J(U)$ алгебры U выполняются следующие соотношения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = 0. \tag{6}$$

Таким образом, алгебра $\mathbf{A_4^{(1)}}$ реализуется в качестве кольца квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G тогда и только тогда, когда необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям (6).

Предположим, что $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{B_4(k, n)}$. В этом случае матрица T_φ эндоморфизма φ имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ t & \mathbf{k}y & \mathbf{n}z & x \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тогда, учитывая (4) и (7), получаем, что базисные элементы α, β, γ радикала Джекобсона $J(U)$ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha^2 = \mathbf{k}\gamma, \beta^2 = \mathbf{n}\gamma, \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = \gamma^2 = 0.$$

Возьмем в качестве базиса пространства U элементы $1, \alpha, \beta, \gamma'$, где $\gamma' = \mathbf{k}\gamma$. Тогда в новом базисе матрица T_φ эндоморфизма φ имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ t & y & \mathbf{n}z & x \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Отсюда на основании (3) матрица квазиэндоморфизма $f \in \mathcal{E}(G)$, соответствующего эндоморфизму φ, имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & \mathbf{n}z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Следовательно, если необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям

$$\alpha^2 = \gamma, \beta^2 = \mathbf{n}\gamma, \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = \gamma^2 = 0, \tag{10}$$

то $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_4^2(n)}$. Очевидно, верно и обратное.

Замечание Легко видеть, что алгебры, отвечающие двум различным значениям параметра, изоморфны тогда и только тогда, когда отношение параметров является квадратом.

Допустим теперь, что $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_4^{(3)}}$. В этом случае матрица T_φ эндоморфизма φ имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & y & x & 0 \\ t & z & y & x \end{pmatrix}. \tag{11}$$

На основании (4) и (11) для базисных элементов α, β, γ радикала Джекобсона $J(U)$ имеем

$$\alpha^2 = \beta, \alpha\beta = \gamma, \beta^2 = \alpha\gamma = \beta\gamma = \gamma^2 = 0. \tag{12}$$

Получили, что алгебра $\mathbf{A_4^{(3)}}$ реализуется в качестве кольца квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G тогда и только тогда, когда необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям (12).

Пример 6. *Пусть тип $\tau = [(6, 6, ...)]$. Тогда $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^6}$. Зафиксируем τ-адические числа $\alpha = 1 \otimes (p^3)$, $\beta = 1 \otimes (p^4)$ и $\gamma = 1 \otimes (p^5)$. Рассмотрим подпространство $U =< 1, \alpha, \beta, \gamma >_{\mathbb{Q}}$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. Пространство U имеет нулевой тип, так как τ-адические числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ взаимно просты в совокупности.*

Имеем тип $\alpha = [(3, 3, ...)]$, тип $\beta = [(4, 4, ...)]$ и тип $\gamma = [(5, 5, ...)]$. Следовательно, необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям (6). Значит, $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_4^{(1)}}$.

Пример 7. *Пусть тип $\tau = [(6, 6, ...)]$ и $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^6}$. Рассмотрим τ- адические числа $\alpha = 1 \otimes (p^2)$, $\beta = 1 \otimes (p^5), \gamma = 1 \otimes (p^4)$. Подпространство $U =< 1, \alpha, \beta, \gamma >_{\mathbb{Q}}$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ имеет нулевой тип, тип $\alpha = [(2, 2, ...)]$, тип $\gamma = [(5, 5, ...)]$ и тип $\beta = [(4, 4, ...)]$. Тогда*

$$\alpha^2 = \gamma, \beta^2 = 0, \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = \gamma^2 = 0.$$

Следовательно, для необратимых элементов α, β, γ пространства U выполняются соотношения (10) для случая $n = 0$. Отсюда $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_4^2(0)}$.

Пример 8. *Пусть тип $\tau = [(4, 4, ...)]$ и $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^4}$. Рассмотрим сильно неразложимую группу G ранга 4 из ([16], пример 4.11). Соответствующее ей подпространство U нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$, где $[U]$ — τ-адический инвариант группы G, имеет следующий базис: $1, \alpha = 1 \otimes (p), \alpha^2, \alpha^3$. Легко видеть, что необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям (12). Следовательно, $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_4^{(3)}}$.*

4. Заключение

В работе получена классификация колец квазиэндоморфизмов класса сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с одним τ-адическим соотношением, псевдоцоколь которых имеет ранга 1.

Доказано, что с точностью до изоморфизма существует 2 алгебры и 1 бесконечная серия алгебр с рациональным параметром, которые реализуются в качестве колец квазиэндоморфизмов групп рассматриваемого класса. При этом серийные алгебры, отвечающие двум различным значениям параметра, изоморфны тогда и только тогда, когда отношение параметров является квадратом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. 1961. V. 38. P. 1–41.

2. Reid J. D. On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group // Topics in Abelian Groups. 1963. P. 51–68.

3. Чередникова А. В. Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга // Абелевы группы и модули. 1996. № 13–14. С. 237–242.

4. Чередникова А. В. Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули. 1996. № 13–14. С. 224–236.

5. Cherednikova A. V. Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable torsion-free abelian groups // Math. Notes. 1998. V. 63. № 5–6. P. 670–678.

6. Cherednikova A. V. Quasi-endomorphism rings of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with zero Jacobson radical // J. Math. Sci. 2014. V. 197. № 5. P. 698–702.

7. Cherednikova A. V. Quasi-endomorphism of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 that do not coincide with their pseudo-socles // Math. Notes. 2015. V. 97. № 3–4. P. 621–631.

8. Faticoni T. G. Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups. Boca Raton–London– New York: CRC Press, 2007. 338 pp.

9. Cherednikova A. V. Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable tortion-free abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 3 // J. Math. Sci. 2011. V. 177. № 6. P. 942–946.

10. Cherednikova A. V. Quasi-endomorphism rings of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 1 // J. Math. Sci. 2014. V. 197. № 5. P. 703–707.

11. Fuchs L. Infinite Abelian grops, Vol. 1. New York–London: Academic Press, 1970. 290 pp.

12. Fuchs L. Infinite Abelian grops, Vol. 2. New York–London: Academic Press, 1973. 363 pp.

13. Фомин А. А. Сервантно свободные группы // Абелевы группы и модули. 1986. Т. 6. С. 145–164.

14. Куликов Л. Я. Группы расширений абелевых групп // Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда (Ленинград, 1961). Т. 2. Л. 1964. С. 9–11.

15. Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ-адическим соотношением // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 1. С. 83–104.

16. Фомин А. А. Абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квазиэндоморфизма. Дис. ... д.ф.-м.н., МПГУ, М., 1992. 260 с.

17. Richman F. A Class of Rank-2 Torsion Free Groups. Studies on Abelian Groups, Berlin, Springer, 1968, 327–333.

REFERENCES

1. Beaumont, R. A., Pierce, R.S. 1961, "Torsion free groups of rank two", *Mem. Amer. Math*, vol. 38, pp. 1–41.

2. Reid, J. D. 1963, "On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group", *Topics in Abelian Groups*, pp. 51–68.

3. Cherednikova, A. V. 1996, "Quasi-endomorphism rings of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 3", *Abelian Groups and Modules*, no. 13–14, pp. 237–242.

4. Cherednikova, A. V. 1996, "Quasi-endomorphism rings of decomposable torsion-free Abelian groups of rank 3", *Abelian Groups and Modules*, no. 13–14, pp. 224–236.

5. Cherednikova, A. V. 1998, "Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable torsion-free abelian groups", *Math. Notes*, vol. 63, no. 5–6, pp. 670–678.

6. Cherednikova, A. V. 2014, "Quasi-endomorphism rings of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with zero Jacobson radical", *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 698–702.

7. Cherednikova A. V. "Quasi-endomorphism rings of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 that do not coincide with their pseudo-socles", *Math. Notes*, vol. 97, no. 3–4, pp. 621–631.

8. Faticoni, T. G. 2007, "Direct Sum Decompositions of Tortion-Free Finite Rank Groups", *CRC Press*, Boca Raton-London-New York. 338 pp.

9. Cherednikova, A. V. 2011, "Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable tortion-free abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 3", *J. Math. Sci.*, vol. 177, no. 6, pp. 42–946.

10. Cherednikova, A. V. 2014 "Quasi-endomorphism rings of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 1", *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 703–707.

11. Fuchs, L. 1970. "Infinite Abelian grops", *Academic Press*, vol. 1, New York–London. 290 pp.

12. Fuchs, L. 1973. "Infinite Abelian grops", *Academic Press*, vol. 2, New York–London. 363 pp.

13. Fomin, A. A. 1986, "Pure free groups", *Abelian Groups and Modules*, vol. 6, pp. 145–164. (Russian)

14. Kulikov, L. Y. 1964, "Groups of extensions of Abelian groups", *Proc. of the 4th All-Union Math. Conf. (Leningrad, 1961)*, vol. 2, Leningrad, pp. 9–11. (Russian)

15. Fomin, A. A. 1989, "Abelian groups with one tau-adic relation", *Algebra and Logic*, vol. 28, no 1, pp. 83–104. (Russian)

16. Fomin, A. A. 1992, "Finite Rank Torsion-Free Abelian Groups up to Quasi-Isomorphism", Doctorate thesis in the physico-mathematical sciences, *Mosc. ped. gos. univ.*, Moscow. 260 pp. (Russian)

17. Richman, F. 1968, "A Class of Rank-2 Torsion Free Groups", *Studies on Abelian Groups*, pp. 327–333.

Костромской государственный технологический университет
Получено 31.06.2016
Получено 4.01.2017 г.
Принято в печать 12.03.2017 г.