ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК УДК 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-235-244

E-КОЛЬЦА МАЛЫХ РАНГОВ

А. В. Царев (г. Москва)

Аннотация

Ассоциативное кольцо R называется E-кольцом, если все эндоморфизмы его аддитивной группы R^+ являются левыми умножениями, то есть для любого $\alpha \in \operatorname{End} R^+$ найдется $r \in R$, такой что $\alpha(x) = x \cdot r$ для всех $x \in R$. E-кольца были введены в 1973 году Ф. Щультцем. Им посвящено большое количество работ, однако, в большинстве из них рассматриваются E-кольца без кручения. В данной работе рассматриваются E-кольца, в том числе и смешанные, ранги которых не превосходят 2. Хорошо известно, что E-кольца ранга 0 — это в точности кольца классов вычетов. Доказано, что E-кольца ранга 1 совпадают с бесконечными T-кольцами (с кольцами R_χ). Основным результатом статьи является описание E-колец ранга 2. А именно, доказано, что E-кольцо R ранга 2 либо раскладывается в прямую сумму E-колец ранга 1, либо имеет вид $\mathbb{Z}_m \oplus J$, где J — m-делимое E-кольцо без кручения, либо кольцо R S-сервантно вкладывается в кольцо $\prod\limits_{p \in S} t_p(R)$. Кроме того, получены некоторые результаты о нильрадикале смешанного E-кольца.

Ключевые слова: E-кольцо, E-группа, абелева группа, T-кольцо, факторно делимая группа.

Библиография: 15 названий.

E-RINGS OF LOW RANKS

A. V. Tsarev (Moscow)

Abstract

An associative ring R is called an E-ring if all endomorphisms of its additive group R^+ are left multiplications, that is, for any $\alpha \in \operatorname{End} R^+$ there is $r \in R$ such that $\alpha(x) = x \cdot r$ for all $x \in R$. E-rings were introduced in 1973 by P. Schultz. A lot of articles are devoted to E-rings. But most of them are considered torsion free E-rings. In this work we consider E-rings (including mixed rings) whose ranks do not exceed 2. It is well known that an E-ring of rank 0 is exactly a ring classes of residues. It is proved that E-rings of rank 1 coincide with infinite T-ring (with rings R_χ). The main result of the paper is the description of E-rings of rank 2. Namely, it is proved that an E-ring R of rank 2 or decomposes into a direct sum of E-rings of rank 1, or $R = \mathbb{Z}_m \oplus J$, where J is an m-divisible torsion free E-ring, or ring R is S-pure embedded in the ring $\prod\limits_{p \in S} t_p(R)$. In addition, we obtain some results about nilradical of a mixed E-ring.

Keywords: E-ring, E-group, abelian group, T-ring, quotient divisible group.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Понятие E-кольца появилось в работах Шультца [1, 2] в связи с рассмотрением проблемы 45 из книги Фукса [3]. Эта проблема формулируется следующим образом: «*Описать кольца R, для которых имеет место изоморфизм $R \cong \mathsf{E}(R^+)$*». Здесь R^+ — аддитивная группа кольца R, а $\mathsf{E}(R^+)$ — ее кольцо эндоморфизмов. Щультц обратил внимание на то, что изучение таких колец разбивается на два принципиально разных случая, в зависимости от того — коммутативны они или нет. Коммутативные кольца с условием $R \cong \mathsf{E}(R^+)$ Шультц назвал E-кольцами и их систематическому исследованию посвятил работы [2, 4]. Отметим, что вопрос о существовании некоммутативных колец с условием $R \cong \mathsf{E}(R^+)$ оставался открытым в течении 30 лет. Лишь в 2003 г. примеры таких колец были построены Гёбелем, Шелахом и Штрюнгманном в [5].

Коммутативность кольца R и условие $R \cong \mathsf{E}(R^+)$ равносильны тому, что имеет место канонический изоморфизм $R \to \mathsf{E}(R^+)$, действующий по правилу $a \mapsto \lambda_a$, где λ_a — оператор левого умножения на a ($\lambda_a(x) = ax$ для любого $x \in R$). В связи с этим, для определения E-колец можно использовать функциональное уравнение Коши

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{$*$}$$

Если рассматривать функциональное уравнение $(*)$ над произвольным кольцом R, то множество его решений над R — это в точности множество $\mathsf{E}(R^+)$. Следовательно, кольцо R является E-кольцом в том и только том случае, когда уравнение $(*)$ имеет над R только линейные однородные решения. Еще Коши знал, что всякое решение уравнения $(*)$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ или над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ имеет вид $f(x) = f(1)x$, т. е. $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются E-кольцами.

E-кольца не попали в классическую монографию Фукса [6] (второй том которой вышел в 1973 г.), однако, почти во всех более поздних книгах по теории абелевых групп E-кольцам посвящены параграфы или главы. Кроме того, в 2002 г. Винсонхалер опубликовал солидный обзор по E-кольцам и близким к ним алгебраическим структурам [7].

Тривиально описываются периодические и делимые E-кольца. Первые — это в точности кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_m$. Ко вторым относится только поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Кроме того, Боушелом и Шультцем в [4] с помощью структурных теорем Бьюмонта–Пирса описаны E-кольца без кручения конечного ранга. Там же выделены и рассмотрены два интересных класса E-колец — T-кольца и E-кольца с редуцированными копериодическими аддитивными группами.

В нашей работе продолжается изучение E-колец методами, разработанными Шультцем и Боушелом в [2, 4] с привлечением техники, предложенной Селе и Сендреем в [8] для изучения абелевых групп с коммутативными кольцами эндоморфизмов. Нас прежде всего будут интересовать E-кольца малых рангов ($\leqslant 2$). Описание таких колец у нас сводится к случаю E-колец без кручения или к случаю S-сервантных подколец колец $\mathbb{Z}_\chi$ (о кольцах $\mathbb{Z}_\chi$ см. ниже).

Всюду далее под кольцом мы будем понимать ассоциативное кольцо, а под группой — абелеву группу, записанную аддитивно. Групповая терминология, применяемая в работе к кольцам, относится к их аддитивным группам. Так, например, фразу «*T — сервантное подкольцо факторно делимого кольца R*», следует понимать как «*T — подкольцо кольца R и группа T^+ является сервантной подгруппой факторно делимой группы R^+*». Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел, а через P — множество всех простых чисел. Если S — подмножество R-модуля M, то через $\langle S \rangle$ и $\langle S \rangle_R$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S, а через $\langle S \rangle_*$ — сервантную оболочку множества S, состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S \rangle$ при некотором натуральном n. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ группы A будем называть линейно независимыми (над $\mathbb{Z}$), если равенство

$m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n = 0$ влечет $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$. Бесконечное множество называется линейно независимым, если линейно независимо любое его конечное подмножество. Рангом группы A называется мощность максимального линейно независимого подмножества в A (обозначается $r(A)$). p-рангом группы A называется размерность $\mathbb{Z}_p$-пространства A/pA (обозначается $r_p(A)$). Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать периодическую и p-примарную части группы A. Кольцо и группу эндоморфизмов группы A будем обозначать $\mathsf{E}(A)$ и $\operatorname{End} A$ соответственно. Если R — кольцо, то через R^+ будем обозначать его аддитивную группу.

Другие используемые определения и понятия стандартны и соответствуют монографии [6].

2. Основные результаты о E-кольцах

Познакомимся с основными техническими результатами теории E-колец. При этом, мы в основном, будем следовать работе [2].

Определение 1. Кольцо с единицей R называется *E-кольцом*, если всякий эндоморфизм ее аддитивной группы является левым умножением, т. е. для любого $\varphi \in \mathsf{E}(R^+)$ существует $a \in R$, такой что $\varphi(x) = \lambda_a(x) = ax$ для всех $x \in R$.

Лемма 1. *Любое E-кольцо коммутативно.*

Доказательство. Пусть R — E-кольцо. Для произвольного элемента $a \in R$ рассмотрим эндоморфизм $\rho_a \in \mathsf{E}(R^+)$, являющийся правым умножением на a, т. е. $\rho_a(x) = xa$ для каждого $x \in R$. Тогда из определения E-кольца следует, что существует элемент $b \in R$, такой что $\rho_a = \lambda_b$. Отсюда $\rho_a(1) = \lambda_b(1)$, т. е. $a = b$. Таким образом, $\rho_a = \lambda_a$ для любого $a \in R$. Тогда получаем

$$xy = \lambda_x(y) = \rho_x(y) = yx$$

для любых x, $y \in R$, т. е. R — коммутативное кольцо. □

Лемма 2. *Для кольца R следующие утверждения равносильны:*

1. *R — E-кольцо;*
2. *$\mathsf{E}(R^+)$ — коммутативное кольцо;*
3. *Если $\varphi \in \mathsf{E}(R^+)$ и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi = 0$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ — очевидно.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $\varphi(1) = 0$, тогда $\varphi(a) = \varphi\big(\lambda_a(1)\big) = \lambda_a\big(\varphi(1)\big) = 0$ для любого $a \in R$, т. е. $\varphi = 0$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $\varphi \in \mathsf{E}(R^+)$ и $\varphi(1) = a$. Рассмотрим эндоморфизм $(\varphi - \lambda_a) \in \mathsf{E}(R^+)$. Поскольку $(\varphi - \lambda_a)(1) = 0$, то $\varphi - \lambda_a = 0$ и $\varphi = \lambda_a$. Таким образом, R — E-кольцо. □

Лемма 3. *Если для аддитивной группы E-кольца R имеет место разложение $R^+ = A \oplus B$, то* $\operatorname{Hom}(A, B) = 0$ *и* $\operatorname{Hom}(B, A) = 0$.

Доказательство. По предыдущей лемме группа R^+ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов. Тогда все ее прямые слагаемые вполне характеристичны, а значит, $\operatorname{Hom}(A, B) = 0$ и $\operatorname{Hom}(B, A) = 0$. □

Напомним, что группы без кручения A и B называются *квазиравными*, если $mA \subseteq B$ и $mB \subseteq B$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если A и B квазиравны, то будем писать $A \doteq B$.

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если K — кольцо с единицей, являющееся подкольцом конечного индекса E-кольца R, то K — E-кольцо;*

2. *Если R и K — квазиравные ассоциативные кольца без кручения с единицей и R — E-кольцо, то K — тоже E-кольцо;*

3. *Нильрадикал E-кольца без кручения конечного ранга равен нулю.*

Доказательство. 1. Во-первых, заметим, что если $t_p(R) \neq 0$, то

$$R = t_p(R) \oplus R'_p, \ \text{ где } \ t_p(R) \cong \mathbb{Z}_{p^{k_p}} \ \text{ и } \ pR'_p = R'_p.$$

Это вытекает из коммутативности кольца $\mathsf{E}(R^+)$ (подробнее см., например, в [9, § 19]). Пусть $lR \subseteq K$, $l \in \mathbb{N}$, и $l = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$ — каноническое разложение числа l. Рассмотрим разложение $K = t_{p_1}(K) \oplus t_{p_2}(K) \oplus \ldots \oplus t_{p_n}(K) \oplus L$. Здесь L — кольцо с единицей (возможно $1_L \neq 1_R$). Пусть $p_i^{k_i} = |t_{p_i}(R)|$, $r_i = \max\{n_i, k_i\}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ и $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_s^{r_s}$. Тогда l делит m и $mR \subseteq L$.

Рассмотрим произвольный эндоморфизм $\varphi \in \mathsf{E}(L^+)$ и построим эндоморфизм $\alpha = \varphi - \lambda_{\varphi(1_L)}$, тогда $\alpha(1_L) = 0$. С другой стороны $m\varphi \in \mathsf{E}(R^+)$, следовательно, $m\varphi = \lambda_k$, где $k = m\varphi(1_L) \in L$. Отсюда $m\alpha = m\varphi - m\lambda_{\varphi(1_L)} = \lambda_k - m\lambda_{\varphi(1_L)} = 0$. Так как L не имеет m-кручения, то и $\mathsf{E}(L^+)$ не имеет m-кручения. Тогда из $m\alpha = 0$ вытекает, что $\alpha = 0$ и $\varphi = \lambda_{\varphi(1_L)}$. Таким образом, L — E-кольцо, а значит, и K — E-кольцо.

2. Является следствием утверждения из п. 1.

3. Пусть R — E-кольцо без кручения конечного ранга. Тогда по первой теореме Бьюмонта–Пирса $K \doteq S \oplus N$, где S — полупервичное кольцо, а N — нильрадикал кольца R. По доказанному выше, $T = S \oplus N$ тоже является E-кольцом. Предположим, что $N \neq 0$. Так как группа T^+ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов, то всякое ее прямое слагаемое является вполне характеристической подгруппой. Следовательно, S является идеалом кольца T, а значит, T/S — нильпотентное кольцо с единицей. Получили противоречие. □

Определение 2. Группа A называется *E-группой*, если на A можно задать умножение, превращающее ее в E-кольцо.

E-группы — это аддитивные группы E-колец. Следовательно, для произвольной E-группы A имеет место изоморфизм $A \cong \operatorname{End} A$ и, при этом, кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативное.

Теорема 5. *Пусть A — произвольная E-группа, тогда*

1. *Если $(A, \cdot)$ — ассоциативное кольцо с единицей, то для всякого умножения $* \in \operatorname{Mult} A$ найдется элемент $a \in A$, такой что $x * y = a \cdot x \cdot y$ для всех $x, y \in A$;*

2. *На группе A существует единственное (с точностью до изоморфизма) ассоциативное кольцо с единицей.*

Доказательство. 1. Пусть 1 — единица кольца $(A, \cdot)$ и $1 * 1 = a$, тогда

$$x * y = \lambda_x^*(\rho_y(1)) = \rho_y(\lambda_x^*(1)) = (x * 1)y = (\rho_1^*(\rho_x(1)))y =$$

$$= (\rho_x(\rho_1^*(1)))y = (1 * 1)xy = axy.$$

2. Пусть изоморфизм $A \cong \operatorname{End} A$ индуцирует на группе A структуру ассоциативного кольца с единицей $(A, \cdot)$. Тогда из леммы 1.3 следует, что $(A, \cdot)$ — коммутативное кольцо. Рассмотрим на группе A произвольную мультипликативную операцию $*$ такую, что $(A, *)$ — ассоциативное кольцо с единицей. В соответствии с п. 1, найдется элемент $a \in A$, такой что $x * y = a \cdot x \cdot y$ для всех $x, y \in A$. Обозначим через 1 и $1'$ единицы колец $(A, \cdot)$ и $(A, *)$ соответственно. Тогда из равенства $1' * 1 = 1$ вытекает равенство $a \cdot 1' \cdot 1 = a \cdot 1' = 1$, а значит, элемент a обратим в кольце

$(A, \cdot)$. Покажем, что отображение $f\colon (A, \cdot) \to (A, *)$, действующее по закону $f(x) = a^{-1} \cdot x$, является изоморфизмом колец:

$$f(x+y) = a^{-1}(x+y) = a^{-1}x + a^{-1}y = f(x) + f(y),$$

$$f(x) * f(y) = (a^{-1}x) * (a^{-1}y) = a \cdot a^{-1} \cdot x \cdot a^{-1} \cdot y = a^{-1}(x \cdot y) = f(x \cdot y).$$

Наконец, поскольку $a^{-1} * x = a \cdot a^{-1} \cdot x = x$ для любого $x \in A$, то $a^{-1} = 1'$, и следовательно, $f(1) = a^{-1} = 1'$. □

В заключении параграфа отметим интересный факт об эндоморфных образах E-групп.

Лемма 6. *Эндоморфный образ E-группы является E-группой, в частности прямое слагаемое E-группы является E-группой.*

Доказательство. Пусть A — E-группа и $(A, \cdot)$ — E-кольцо. Тогда эндоморфный образ группы A имеет вид aA. Определим умножение $*$ на группе aA по закону $ax * ay = axy$. Тогда $(aA, *)$ — коммутативное кольцо с единицей a. Если $\varphi \in \mathsf{E}(aA)$, то $\lambda_a\varphi \in \mathsf{E}(A)$, и значит, для любого $ax \in aA$

$$\varphi(ax) = (\lambda_a\varphi)(x) = \lambda_{(\lambda_a\varphi)(1)}(x) = \varphi(a)x = ayx,$$

где $ay = \varphi(a) \in aA$. Следовательно, $\varphi(ax) = ay * ax$, т. е. φ является умножением на элемент ay. Таким образом, $(aA, *)$ — E-кольцо и, значит, aA — E-группа. □

3. Смешанные E-кольца

При работе со смешанными E-кольцами мы воспользуемся техникой, разработанной еще Селе и Сендреем [8] для изучения групп с коммутативными кольцами эндоморфизмов.

Множество $\operatorname{supp}(A) = \{p \in P \mid t_p(A) \neq 0\}$ называется *носителем* группы A. Пусть R — произвольное E-кольцо и $S = \operatorname{supp}(R)$, тогда из коммутативности кольца $\mathsf{E}(R^+)$ для любого $p \in S$ получаем разложение $R^+ = t_p(R) \oplus R'_p$, где $t_p(R) \cong \mathbb{Z}_p^{k_p}$ и R'_p — p-делимая группа без p-кручения (подробнее об этом см., например, в [9, § 19]). Группы $t_p(R)$ и R'_p, очевидно, являются идеалами кольца R, т. е. приведенное выше групповое разложение является кольцевым. Для произвольного элемента $a \in R$ и всякого $p \in S$ рассмотрим равенство $a = a_p + a'_p$, где $a_p \in t_p(R)$ и $a'_p \in R'_p$. Построим отображение $\xi\colon R \to \prod\limits_{p \in S} t_p(R)$, действующее по закону $\xi(a) = (a_p)_{p \in S}$. Отображение ξ, очевидно, является гомоморфизмом колец, причем

$$\ker \xi = \bigcap_{p \in S} R'_p = \{a \in R \mid h_p(a) = \infty \ \text{ при всех } \ p \in S\},$$

здесь $h_p(a)$ — p-высота элемента a. Обозначим идеал $\ker \xi$ через J. Нетрудно видеть, что J — кольцо без кручения, более того оно p-делимо при любом $p \in S$. Множество J будем далее рассматривать и как идеал, и как кольцо (возможно без единицы).

Идеал J содержит единицу кольца R в том и только том случае, когда $J = R$ — кольцо без кручения. Кольцо J содержит единичный элемент в том и только том случае, если J выделяется в R прямым слагаемым. В [4] показано, что последнее равносильно тому, что J само является E-кольцом. Далее рассмотрим нильрадикал $\mathrm{N}(J)$ кольца J.

Предложение 7. *Пусть R — E-кольцо конечного ранга и $J = \bigcap\limits_{p \in S} R'_p$, тогда $\big(\mathrm{N}(J)\big)^2 = 0$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathrm{N}(J)$. Рассмотрим идеал aR кольца R. Поскольку a — нильпотентный элемент, то aR — нильпотентный идеал кольца R.

Группа aR является эпиморфным образом группы R^+, следовательно, aR — E-группа (см. лемму 6). Пусть $(aR, *)$ — E-кольцо, тогда по теореме 5 существует элемент $r \in aR$, такой что $xy = r * x * y$ для любых x, $y \in aR$. Так как aR — нильпотентный идеал кольца R, то для любого элемента $x \in aR$ найдется число $s \in \mathbb{N}$, такое что

$$0 = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{s \text{ раз}} = r^{s-1} * \underbrace{x * x * \ldots * x}_{s \text{ раз}}.$$

Тогда $\underbrace{(r * x) * (r * x) * \ldots * (r * x)}_{s \text{ раз}} = 0$ и, значит, $(r * x) \in \mathrm{N}(aR, *)$. Но $aR \subseteq J$, следовательно, $(aR, *)$ — E-кольцо без кручения конечного ранга. Тогда по предложению 4 получаем, что $\mathrm{N}(aR, *) = 0$ и $r * x = 0$. Таким образом, $r * aR = 0$, откуда $r = 0$. Следовательно, для любых x, $y \in aR$ верно равенство $xy = r * x * y = 0$, в частности, $a^2 = aa = 0$.

Наконец, пусть a, b — произвольные элементы из $\mathrm{N}(J)$. Тогда по доказанному выше $a^2 = 0$, $b^2 = 0$ и $(a + b)^2 = 0$. Отсюда $a^2 + 2ab + b^2 = 0$ и, значит, $ab = 0$. Таким образом, $\bigl(\mathrm{N}(J)\bigr)^2 = 0$. □

Пример. Нильрадикал E-кольца R в общем случае отличен от $\mathrm{N}(J)$, хотя бы потому, что $\mathrm{N}(R)$ может содержать еще и нильпотентные элементы конечного порядка, т. е. имеет место включение

$$\mathrm{N}(J) \oplus \bigoplus_{p \in S} p\bigl(t_p(R)\bigr) \subseteq \mathrm{N}(R).$$

Обратного включения может и не быть. Проиллюстрируем это на следующем примере. Напомним, что характеристика $\chi = (m_p)$ — это некоторая последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная простыми индексами. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$, где $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ при $m_p \neq \infty$ и $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел при $m_p = \infty$. Хорошо известно, что все кольца $\mathbb{Z}_\chi$ и все их сервантные подкольца с единицей являются E-кольцами. Рассмотрим характеристику $\chi = (2, 2, 2, \ldots)$. Обозначим через ε_p единицу кольца $\mathbb{Z}_{p^2}$ (и ее образ при естественном вложении $\mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_\chi$). Разобьем множество простых чисел на два бесконечных подмножества $P = P_1 \cup P_2$. Рассмотрим элемент $\alpha \in \mathbb{Z}_\chi$, такой что

$$\alpha_p = \begin{cases} \varepsilon_p, & p \in P_1 \\ p\varepsilon_p + \varepsilon_p, & p \in P_2, \end{cases}$$

и построим группу $R = \langle \alpha^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. Нетрудно видеть, что R — подкольцо кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Далее, поскольку $(\alpha - 1)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$, то $1 = 2\alpha - \alpha^2 \in R$ и $R = \langle 1, \alpha \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. Таким образом, R — сервантное подкольцо с единицей ранга 2 кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Следовательно, R — E-кольцо. В силу построения $J = 0$, но $\mathrm{N}(R) \neq \bigoplus_{p \in S} p\bigl(t_p(R)\bigr) = \bigoplus_{p \in P} p\mathbb{Z}_{p^2}$, поскольку $\alpha - 1 \in \mathrm{N}(R)$ и $o(\alpha - 1) = \infty$.

Далее естественно рассмотреть случай, когда $J = 0$.

Предложение 8. *Если R — E-кольцо, такое что $J = \bigcap_{p \in S} R'_p = 0$, то R вкладывается S-сервантно в кольцо $\prod_{p \in S} t_p(R)$.*

Доказательство. Поскольку $J = 0$, то гомоморфизм $\xi\colon R \to \prod_{p \in S} t_p(R)$ является вложением. Учитывая, что все группы R'_p $(p \in S)$ p-делимые и принимая во внимание изоморфизмы

$$R/t(R) \cong [R/t_p(R)]/[t(R)/t_p(R)] \cong R'_p/[t(R)/t_p(R)],$$

получаем, что факторгруппа $R/t(R)$ p-делима при любом $p \in S$. Из этого следует, что $\operatorname{im}\xi$ — p-сервантная подгруппа в $\prod_{p\in S} t_p(R)$ для любого $p \in S$. Действительно, отождествим группы R^+ и $\operatorname{im}\xi$ и рассмотрим равенство $a = p^m b$, где $a \in R$, $b \in \prod_{p\in S} t_p(R)$, $p \in S$ и $m \in \mathbb{N}$. В силу p-делимости группы $R/t(R)$ имеем $a = p^m c + t$, где $c \in R$ и $t \in t(R)$. Откуда $p^m b = p^m c + t$ и $p^m(b - c) = t \in t(R)$. Отсюда следует, что $b - c$ лежит в $t(R)$, а элемент b лежит в R. □

Отметим, что доказанное предложение фактически является следствием известной теоремы Селе–Сендрея [8, теорема 2] (см. также [9, теорема 19.4]). Далее рассмотрим еще один крайний случай, когда $r(J) = r(R) < \infty$.

Предложение 9. *Пусть A — смешанная группа конечного ранга с коммутативным кольцом эндоморфизмов, у которой подгруппа*

$$J = \{a \in R \mid h_p(a) = \infty \ \text{при всех}\ p \in S\}$$

имеет такой же ранг, что и A. Тогда группа A расщепляется.

Доказательство. В силу коммутативности кольца $\mathsf{E}(A)$ для любого $p \in S = \operatorname{supp}(A)$ имеет место разложение $A = t_p(A) \oplus A'_p$, где $t_p(A) \cong \mathbb{Z}_p^{k_p}$ и A'_p — p-делимая группа без p-кручения. Для произвольных $a \in A$ и $p \in S$ рассмотрим равенство $a = a_p + a'_p$, где $a_p \in t_p(A)$ и $a'_p \in A'_p$. Тогда отображение $\xi\colon A \to \prod_{p\in S} t_p(A)$, действующее по закону $\xi(a) = (a_p)_{p\in S}$ является гомоморфизмом, причем, очевидно, $\ker\xi = J$. Поскольку $r(A) = r(J)$, то $\operatorname{im}\xi = \bigoplus_{p\in S} t_p(A)$ — прямая сумма циклических групп.

Убедимся, что J — сервантная подгруппа в A. Так как A/J вкладывается в группу $\prod_{p\in S} t_p(A)$, то A/J не имеет элементов порядка p при любом $p \notin S$. Следовательно, J — p-сервантная подгруппа в A при любом простом $p \notin S$. Кроме того, J — p-делимая группа при любом $p \in S$, а значит, J — p-сервантная подгруппа в A и при любом простом $p \in S$. Таким образом, J сервантна в группе A.

Наконец, поскольку J сервантна в A и $A/J = \bigoplus_{p\in S} t_p(A)$ — прямая сумма циклических групп, то J выделяется в A прямым слагаемым (см. [6, теорема 28.2]), т. е. группа A расщепляется. □

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика. Если χ содержит символы ∞ или содержит бесконечно много ненулевых элементов, то в кольце $\mathbb{Z}_\chi$ рассмотрим подкольцо R_χ, сервантно порожденное единицей кольца, $R_\chi = \langle 1\rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. Если характеристика χ содержит лишь конечное число конечных элементов, то $\mathbb{Z}_\chi = \mathbb{Z}_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. В этом случае постоим кольцо $R_\chi = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$. Кольца R_χ — это в точности факторно делимые кольца ранга 1 (см. [10], [11] и [12]). Отметим также, что в [13] и [14] показано, что факторно делимые кольца ранга 1 совпадают с бесконечными T-кольцами.

В силу построения все кольца R_χ являются E-кольцами ранга 1. Оказывается, что верно и обратное, кольцами R_χ исчерпываются все E-кольца ранга 1.

Теорема 10. *Если R — E-кольцо ранга 1, то $R \cong R_\chi$ при некоторой χ.*

Доказательство. Рассмотрим короткую сервантно точную последовательность

$$0 \to t(R) \to R \to R/t(R) \to 0.$$

Она индуцирует короткую последовательность

$$0 \to \widehat{t(R)} \to \widehat{R} \to \widehat{R/t(R)} \to 0,$$

где $\widehat{\ }$ — функтор взятия $\mathbb{Z}$-адического пополнения. Хорошо известно (см., например, [6, теорема 39.8]), что вторая последовательность точна и расщепляется, т. е. $\widehat{R} \cong \widehat{t(R)} \oplus \widehat{R/t(R)}$. При этом, $\widehat{t(R)} \cong \prod\limits_{p\in S} t_p(R)$, а поскольку $R/t(R)$ — кольцо без кручения ранга 1, то $\widehat{R/t(R)} \cong \prod\limits_{p\in T} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, где $T = \{p \in P \mid p(R/t(R)) \neq R/t(R)\}$. Учитывая, что кольцо $R/t(R)$ p-делимо при любом $p \in S$, получаем, что $S \cap T = \varnothing$ и, значит, $\widehat{R} = \mathbb{Z}_\chi$ для некоторой характеристики χ.

Пусть $\mu\colon R \to \widehat{R}$ — естественный гомоморфизм, тогда $\mu(R)$ — сервантная подгруппа в $\widehat{R} = \mathbb{Z}_\chi$, причем $\ker\mu = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} nR$. Если $\ker\mu \neq 0$, то $\ker\mu$ — делимое кольцо без кручения ранга 1, т. е. $\ker\mu \cong \mathbb{Q}$. А тогда $\operatorname{im}\mu = \mathbb{Z}_m$ и, таким образом, $R \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$. Если же $\ker\mu = 0$, то R сервантно вкладывается в $\mathbb{Z}_\chi$, причем, отождествляя R с $\operatorname{im}\mu$, можно считать, что $1_{\mathbb{Z}_\chi} = 1_R$ и $t(\mathbb{Z}_\chi) = t(R)$. Следовательно, R совпадает с группой $R_\chi = \langle 1\rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. □

Отметим еще, что E-кольца ранга 0 — это в точности периодические E-кольца, т. е. кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_m$. Рассмотрим теперь ситуацию с E-кольцами ранга 2. Для доказательства основной теоремы нам понадобится теорема Бьюмонта–Пирса.

Теорема 11 [15]. *Пусть R — кольцо без кручения конечного ранга, $S = \mathbb{Q}\otimes R$ — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра. Запишем $S = P \oplus N$, где P — полупримитивная алгебра и N — радикал алгебры S. Положим $T = P \cap R$, тогда T — полупервичное кольцо, $N(R) = N \cap R$ и $T \oplus N(R)$ — подкольцо в R конечного индекса.*

Заметим, что если R — кольцо с единицей, то $T \oplus N(R)$ — подкольцо с 1 в R.

Теорема 12. *Пусть R — E-кольцо ранга 2 и $J = \bigcap\limits_{p\in S} R'_p$, тогда*

1. *Если $r(J) = 2$, то $R \cong \mathbb{Z}_m \oplus J$ и J — m-делимое E-кольцо без кручения;*
2. *Если $r(J) = 0$, то R вкладывается S-сервантно в кольцо $\prod\limits_{p\in S} t_p(R)$;*
3. *Если $r(J) = 1$, то $R \cong R_\chi \oplus R_\kappa$, где характеристики χ и κ несравнимые и $\chi_p < \infty$, $\kappa_p < \infty$ влечет $\chi_p\kappa_p = 0$.*

Доказательство. 1. Если $r(R) = r(J) = 2$, то образ гомоморфизма $\xi\colon R \to \prod\limits_{p\in S} t_p(R)$ является периодическим кольцом с единицей. Следовательно, $t_p(R) = 0$ почти при всех простых p. Поэтому $\operatorname{im}\xi \cong t(R) \cong \mathbb{Z}_m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, $R \cong \mathbb{Z}_m \oplus J$, причем J — E-кольцо, как прямое слагаемое E-кольца, и $mJ = J$ по лемме 3.

2. Вытекает из предложения 8.

3. Так как $r(J) = 1$, то J — кольцо без кручения ранга 1. Хорошо известно, что в этом случае группа J^+ либо является E-группой (когда тип группы J идемпотентен), либо J^+ допускает только структуру кольца с нулевым умножением.

1-й случай: J^+ — E-группа. Тогда гомоморфизм ξ расщепляется (доказано Шульцем — [2, теорема 6]) и $R \cong \operatorname{im}\xi \oplus \ker\xi$, при этом $\operatorname{im}\xi$ и $\ker\xi$ — E-кольца ранга 1. Следовательно, $\operatorname{im}\xi \cong R_\chi$ и $\ker\xi \cong R_\kappa$ (по теореме 10). Дополнительные условия п. 3 на характеристики χ и κ вытекают из леммы 3.

2-й случай: $J^2 = 0$. Рассмотрим факторкольцо $\overline{R} = R/t(R)$. По теореме Бьюмонта–Пирса кольцо $R/t(R)$ содержит подкольцо конечного индекса $\overline{T} \oplus \overline{N}$, где $\overline{T}$ — полупервичное кольцо, а $\overline{N} = \mathrm{N}(\overline{R})$ — нильрадикал кольца $\overline{R}$. Так как $J^2 = 0$ и $r(J) = 1$, то $r(\overline{N}) \geqslant 1$. При $r(\overline{N}) = 2$ получаем, что $\overline{R} = \overline{N}$ — нильпотентное кольцо с 1. Следовательно, $r(\overline{N}) = r(\overline{T}) = 1$.

Далее, пусть T и N — прообразы $\overline{T}$ и $\overline{N}$ при естественном гомоморфизме $R \to R/t(R)$. Тогда $T + N$ — подкольцо с единицей конечного индекса в кольце R. По предложению 4 кольцо

$T + N$ является E-кольцом. Нетрудно видеть, что $J \subseteq N$. Заметим, что J — сервантная подгруппа группы R^+, а значит, и группы N^+ (по построению J — пересечение прямых слагаемых группы R^+). Так как $r(N) = r(\overline{N}) = 1 = r(J)$, то для любого $a \in N$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $b \in J$, такие что $ma = b$. Поскольку J сервантна в N, то найдется элемент $b' \in J$, такой что $mb' = b$. Тогда $m(a - b') = 0$ и $a - b' = t \in t(R)$. Таким образом, $a = b' + t$, а значит, $N = J + t(R)$. По построению J не имеет ненулевых элементов конечного порядка, следовательно, $N = J \oplus t(R)$. Учитывая также, что $T \cap N = t(R)$, получаем равенство $T + N = T \oplus J$. Тогда J — E-кольцо, как прямое слагаемое E-кольца. Но группа J допускает только нулевое умножение. Получили противоречие, следовательно, данный случай невозможен. $\square$

4. Заключение

Заметим в заключении, что для известных примеров смешанных E-колец рассмотренный выше гомоморфизм $\xi\colon R \to \prod\limits_{p \in S} t_p(R)$ расщепляется или квазирасщепляется. Шультцем в [4] сформулирована проблема о существовании смешанных E-колец, для которых гомоморфизм ξ не квазирасщепляется. Из доказанных выше утверждений следует, что для случая E-колец ранга $\leqslant 2$ эта проблема решается отрицательно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schultz P. Periodic homomorphism sequences of abelian groups // Arch. Math. 1970. Vol. 21. P. 132-135.
2. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. 1973. Vol. 15. P. 60-69.
3. Fuchs L. Abelian groups. Publ. House of the Hungar. Acad. Sci. Budapest, 1958.
4. Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. Vol. 228, №3. P. 197-214.
5. Göbel R., Shelah S., Strüngmann L. Generalized E-Rings // arxiv.org. 2003.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. I, II. М.: Мир, 1973, 1977.
7. Vinsonhaler C., E-rings and related structures. In: Non-noethereian commutative ring theory. Math. Apl. Kluwer, Dordrecht. 2002. Vol. 520. P. 387-402.
8. Szele T., Szendrei J. On abelian groups with commutative endomorphism ring // Acta Mathematica Hungarica. 1951. Vol. 2, №3. P. 309-324.
9. Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.
10. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Том 17, №8. С. 153-167.
11. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Том 20, №5. С. 157-196.
12. Давыдова О. И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Том 13, №3. С. 25–33.

13. Царев А. В. T-кольца и факторно делимые группы ранга 1 // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2013. №4(24). С. 50–53.

14. Царев А. В. T-кольца // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Том 20, №5. С. 203–207.

15. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Ill. J. Math. 1961. Vol. 5. P. 6-98.

REFERENCES

1. Schultz, P. 1970, "Periodic homomorphism sequences of abelian groups *Arch. Math.*, vol. 21, pp. 132-135.

2. Schultz, P. 1973, "The endomorphism ring of the additive group of a ring *J. Austral. Math. Soc.*, vol. 15., pp. 60-69.

3. Fuchs, L. 1958, "Abelian groups Publ. House of the Hungar. Acad. Sci. Budapest.

4. Bowshell, R. A. & Schultz, P. 1977, "Unital rings whose additive endomorphisms commute *Math. Ann.*, vol. 228, no. 3, pp. 197-214.

5. Göbel, R., Shelah, S. & Strüngmann, L. 2003, "Generalized E-Rings arxiv.org. 2003.

6. Fuchs, L. 1970, 1973, "Infinite abelian groups vol. 1, 2, Academic press.

7. Vinsonhaler, C. 2002, "E-rings and related structures *Math. Apl.*, vol. 520, pp. 387-402.

8. Szele, T., Szendrei, J. 1951, "On abelian groups with commutative endomorphism ring *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 2, no. 3, pp. 309-324.

9. Krylov, P. A., Mikhalev, A. V. & Tuganbaev, A. A. 2013, "Endomorphism rings of Abelian groups vol. 2, Springer Science & Business Media.

10. Fomin, A. A. 2014, "To Quotient Divisible Group Theory. I *Journal of Mathematical Sciences* (New York), vol. 197, no. 5, pp. 688–697

11. Fomin, A. A. 2015, "To Quotient Divisible Group Theory. II *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* (russian translation), vol. 20, no. 5, pp. 157-196.

12. Davydova O. I. 2008, "Rank-1 quotient divisible groups *J. Math. Sci.*, vol. 154, no. 3, pp. 295-300.

13. Tsarev, A. V. 2013, "T-rings and rank-1 quotient divisible groups *Vestnik TGU* (russian translation), no. 4(24), pp. 50–53.

14. Tsarev, A. V. 2015, "T-rings *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* (russian translation), vol. 20, no. 5, pp. 203–207.

15. Beaumont, R., Pierce, R. 1961, "Torsion free rings *Ill. J. Math.*, vol. 5, pp. 6-98.

Московский педагогический государственный университет
Получено 14.03.2017 г.
Принято в печать 12.06.2017 г.