ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 517.581 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-205-221

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ГАММА-ФУНКЦИИ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

А. Ю. Попов (г. Москва)

Аннотация

В статье получены новые двусторонние оценки гамма-функции на действительной полуоси. Эти результаты дают в качестве следствия двусторонние оценки факториала, более сильные, нежели известные ранее. Найденные двойные неравенства для $n!$ верны при всех $n \geq 1$. Для $\Gamma(x+1)$ выведен ряд оценок; одни из них верны при всех $x > 0$, другие – при всех $x \geq 1/2$, а некоторые – при всех $x \geq 1$. Основные из полученных оценок связаны с понятием обвёртывания функции её асимптотическим рядом (если этот ряд является знакопеременным) в усиленном смысле, однако такая усиленная обвёртываемость пока доказана только для нескольких первых частичных сумм асимптотического ряда. Высказана гипотеза о том, что асимптотический ряд для логарифма гамма-функции обвёртывает его в усиленном смысле. В этом же духе получены новые неравенства для чисел сочетаний из $2n$ по n. Эти рассмотрения свидетельствуют о перспективности дальнейших исследований в данном направлении и дают метод получения новых двойных неравенств для функций, чей асимптотический ряд является знакопеременным.

Ключевые слова: гамма-функция, двусторонние оценки, асимптотическая формула.

Библиография: 15 названий.

TWO-SIDED ESTIMATES OF GAMMA-FUNCTION ON THE REAL SEMIAXIS

A. Yu. Popov (Moscow)

Abstract

In this paper we present new two-sided estimates of gamma-function $\Gamma(x+1)$ on the real semiaxis $x > 0$. Based on this result, we improve well-known estimates for the factorial $n!$, which hold for all $n \geq 1$. Some of obtained estimates of gamma-function $\Gamma(x+1)$ hold only for $x \geq 1/2$ and some only for $x \geq 1$. The main estimates are connected to the notion of alternation round of a function by asymptotic series in the strong sense. However such a strong alternation is proved only for several partial sums. We have a conjecture that the asymptotic series alternates round a logarithm of gamma-function in strong sense. Similary we propose new inequalities for the number of n-combination from $2n$. These considerations indicate that next investigation is promissing and give a method for construction of new two-sided estimates for functions having alternating asymptotic series.

Keywords: gamma-function, two-sided estimates, asymptotic behavior.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Во многих учебниках по математическому анализу доказывается асимптотическая формула Стирлинга

$$\Gamma(x+1) \sim S(x), \quad x \to +\infty, \quad \text{где} \quad S(x) = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x},$$

и следующее её «неасимптотическое» уточнение:

$$S(x) < \Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x}\right) \quad \forall x > 0. \tag{1}$$

Статья посвящена дальнейшим уточнениям двойного неравенства (1).

В книге [1, гл. 12] доказано, что разность

$$\varphi(x) = \ln\Gamma(x+1) - \ln S(x) \tag{2}$$

при $x \to +\infty$ имеет асимптотический ряд

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} x^{1-2k}. \tag{3}$$

Через B_{2k} обозначены числа Бернулли [2](гл. 4, §2)), [3] (гл. 4, §3). Они образуют знакопеременную последовательность: $B_{2k} = (-1)^{k-1}|B_{2k}|$; поэтому асимптотический ряд (3) является знакопеременным. Там же в [1] доказано, что значение функции $\varphi(x)$ при любом $x > 0$ всегда лежит между суммой m и суммой $m+1$ членов ряда, каково бы ни было натуральное число m. Обозначим

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}|B_{2k}|}{2k(2k-1)} x^{1-2k}.$$

Цитированный результат влечёт за собой справедливость двойных неравенств

$$S(x)\exp\bigl(\sigma_{2N}(x)\bigr) < \Gamma(x+1) < S(x)\exp\bigl(\sigma_{2N+1}(x)\bigr) \tag{4}$$

при любых $x > 0$ и $N \in \mathbb{N}$. Таким образом неравенство (1) можно рассматривать как вырожденный случай (4), соответствующий значению $N = 0$. В случае $N = 1$ неравенство (4) принимает вид

$$S(x)\exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3}\right) < \Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5}\right) \qquad \forall x > 0. \tag{5}$$

Это неравенство недавно было переоткрыто Ю. Мачисом [4]. Оно было доказано им только при $x \in \mathbb{N}$ (тем самым, речь шла о двусторонней оценке факториала), но совершенно иным способом, нежели в [1].

В середине 20-го века Г. Роббинс [5] вывел оценку снизу для факториала

$$S(n)\exp\left(\frac{1}{12n+1}\right) < n! \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Неравенство (6) слабее левого неравенства (5), поскольку при положительных значениях x имеем

$$\frac{1}{12x+1} < \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} \Leftrightarrow x > \frac{6+\sqrt{66}}{30} = 0.4708\ldots.$$

Но если бы в левой части (6) вместо $n \in \mathbb{N}$ стояла бы переменная $x > 0$, а в правой части – обобщение факториала $\Gamma(x+1)$, то получился бы новый результат, поскольку он усиливал бы оценку Сонина [6,7]

$$S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+6}\right) < \Gamma(x+1) \quad \forall x > 0, \tag{7}$$

которая, несмотря на её давность, даже в 70-е годы 20-го века не была перекрыта (естественно при малых x) и приводилась в математической энциклопедии [8].

В статье усилено двойное неравенство (5). Доказано, что при всех $x > 0$ верна двусторонняя оценка

$$S(x)\exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3+12x}\right) < \Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5+360x^3}\right). \tag{8}$$

Заметим, что справедливы тождества

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3+12x} = \frac{1}{12x+0.4x^{-1}}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5+360x^3} = \frac{1}{12x+0.4x^{-1} - \frac{106x^{-1}}{1050x^2+265}}. \tag{10}$$

Из тождества (9) и левого неравенства (5) получается оценка снизу

$$S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+0.4x^{-1}}\right) < \Gamma(x+1) \qquad \forall x > 0.$$

Как видно, она нуждается в усилении при малых x. В связи с этим доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Положим $a(x) = 0.4x^{-1}$ при $x \geq 0.5$, $a(x) = 0.8$ при $0 < x < 0.5$. Тогда при любом $x > 0$ верно неравенство*

$$S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+a(x)}\right) < \Gamma(x+1). \tag{11}$$

Из (5) также видно, что если рассмотреть функцию $S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+b/x}\right)$, взяв $b \in (0, 0.4)$, то она при всех достаточно больших значениях x даёт оценку $\Gamma(x+1)$ сверху. Если же положить $b = 0.336$, то оценка сверху будет выполняться при любом $x \geq 1$.

Теорема 2. *При любом $x \geq 1$ верно неравенство*

$$\Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+a_0(x)}\right), \quad \text{где} \quad a_0(x) = \frac{0.336}{x}. \tag{12}$$

Следствие 1. *При любом $x \geq 1$ справедливо двойное неравенство*

$$S(x)\exp\left(\frac{x}{12x^2+2/5}\right) < \Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{x}{12x^2+1/3}\right).$$

Принципиальную роль в доказательстве теоремы 2 сыграло небольшое усиление оценки (8) при $x \geq 1$ (см. §2).

Неравенства (11) и (12), как и каждый результат подобного рода, допускают дальнейшее уточнение.

Теорема 3. *Выполняется двойное неравенство*

$$S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+a_1(x)}\right) < \Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+a_2(x)}\right), \tag{13}$$

в котором

$$a_1(x) = \frac{0.4-0.1(x+0.5)^{-2}}{x}, \quad a_2(x) = \frac{0.4-(53/525)x^{-2}}{x}. \tag{14}$$

Левое неравенство верно по крайней мере при $x \geq 0.5$, а правое – при любом $x > 0$.

Замечание 1. *Из тождества (10) и правого неравенства (5) получается оценка сверху*

$$\Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+0.4x^{-1}-\frac{106x^{-1}}{1050x^2+265}}\right). \tag{15}$$

Видно, что оценка сверху (13) является огрублением (15). Тем не менее постоянная 53/525 в выражении (14) для функции a_2 является точной: её нельзя заменить меньшей. Это следует из асимптотики (см. выше (3),(4))

$$\ln\Gamma(x+1) = \ln S(x) + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} + O\left(\frac{1}{x^7}\right), \quad x\to+\infty, \tag{16}$$

которую можно переписать в виде

$$\ln\Gamma(x+1) = \ln S(x) + \frac{1}{12x+0.4x^{-1}-(53/525)x^{-3}+O(x^{-5})}, \quad x\to+\infty. \tag{17}$$

2. Усиление оценки сверху гамма-функции

Теорема 4. *Рассмотрим три пары чисел (x_0, c):*

$$(x_0=0, c=360), \quad (x_0=1/2, c=567), \quad (x_0=1, c=711). \tag{18}$$

При любом $x > x_0$ справедливо неравенство

$$\Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5+cx^3}\right), \tag{19}$$

где (x_0, c) – любая из пар (18). Для второй и третьей пары (x_0, c) неравенство (19) верно также при $x = x_0$.

Замечание 2. *Асимптотика (16) показывает, что усиление неравенства (19) возможно только за счёт увеличения c; другие константы в этом неравенстве точные.*

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим функцию

$$F_c(x) = \ln\Gamma(x+1) - \ln S(x) - \frac{1}{12x} + \frac{1}{360x^3} - \frac{1}{1260x^5+cx^3}.$$

Неравенство (19) равносильно отрицательности $F_c(x)$ на луче $x_0 < x < +\infty$. А так как согласно (16) имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} F_c(x) = 0$, то достаточно доказать неравенство

$$F_c(x) < F_c(x+1) \quad \forall x > x_0. \tag{20}$$

Действительно, из (20) сразу же следует, что ситуация ($\exists \xi > x_0 : F_c(\xi) \geq 0$) невозможна, поскольку тогда $\{F_c(\xi+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ окажется возрастающей последовательностью положительных чисел, а это противоречит стремлению к нулю $F_c(x)$ при $x \to +\infty$.

Согласно определению функции F_c и тождествам

$$\begin{aligned}&\ln\Gamma(x+2) - \ln\Gamma(x+1) = \ln(x+1)\\ &\ln S(x+1) - \ln S(x) = \ln(x+1) + \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{x+1}{x}\right) - 1,\end{aligned} \tag{21}$$

неравенство (20) равносильно следующему

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - \\ - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) + \frac{1}{1260}\left(\frac{1}{x^5+\lambda x^3} - \frac{1}{(x+1)^5+\lambda(x+1)^3}\right), \tag{22}$$

$$\lambda = c/1260, \quad x > x_0. \tag{23}$$

Обозначим $x + 1/2 = y$. Тогда неравенство (22) принимает вид

$$y\ln\left(\frac{y+1/2}{y-1/2}\right) - 1 < \frac{1}{12(y^2-1/4)} - \frac{3y^2+1/4}{360(y^2-1/4)^3} + \\ + \frac{5y^4+5y^2/2+1/16+\lambda(3y^2+1/4)}{1260(y^2-1/4)^3\left((y^2-1/4)^2+\lambda(2y^2+1/2)+\lambda^2\right)}, \tag{24}$$

$y \in (x_0+1/2, +\infty)$. Положим $t = (2y)^{-1}$ (тогда переменная t пробегает интервал $0 < t < (1+2x_0)^{-1}$) и разложим левую часть неравенства (24) в степенной ряд:

$$y\ln\left(\frac{y+1/2}{y-1/2}\right) - 1 = \frac{1}{2t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}. \tag{25}$$

Правая же часть неравенства (24) окажется равна

$$\frac{y^{-2}}{12\left(1-\frac{1}{4y^2}\right)} - \frac{3y^{-4}+y^{-6}/4}{360\left(1-\frac{1}{4y^2}\right)^3} + \frac{5y^{-6}+5y^{-8}/2+y^{-10}/16+\lambda(3y^{-8}+y^{-10}/4)}{1260\left(1-\frac{1}{4y^2}\right)^3\left(\left(1-\frac{1}{4y^2}\right)^2+\lambda(2y^{-2}+y^{-4}/2)+\lambda^2y^{-4}\right)} = \\ = \frac{t^2}{3(1-t^2)} - \frac{2(3t^4+t^6)}{45(1-t^2)^3} + \frac{16\big(5t^6+10t^8+t^{10}+\lambda(12t^8+4t^{10})\big)}{315(1-t^2)^3\big((1-t^2)^2+8\lambda(t^2+t^4)+16\lambda^2t^4\big)}.$$

В результате этих преобразований, разделив обе части (24) на $t^2 = u$ и обозначив $4\lambda = \mu$, придём к задаче доказательства неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{n-1}}{2n+1} < \frac{1}{3(1-u)} - \frac{2(3u+u^2)}{45(1-u)^3} + \\ + \frac{16\big(5u^2+10u^3+u^4+\mu(3u^3+u^4)\big)}{315(1-u)^3\big((1-u)^2+2\mu(u+u^2)+\mu^2u^2\big)}, \quad 0 < u < \frac{1}{(1+2x_0)^2}. \tag{26}$$

Умножим обе части (26) на $1-u > 0$ и воспользуемся формулой

$$(1-u)\sum_{n=1}^{\infty}a_nu^{n-1} = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)u^k.$$

Получим, что требуется доказать неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+1}\right)u^k<\frac{16\big(5u^2+10u^3+u^4+\mu(3u^3+u^4)\big)}{315(1-u)^2\big((1-u)^2+2\mu(u+u^2)+\mu^2u^2\big)}-\frac{2(3u+u^2)}{45(1-u)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\frac{3+u}{(1-u)^2}<8\frac{5u+10u^2+u^3+\mu(3u^2+u^3)}{(1-u)^2\big((1-u)^2+2\mu(u+u^2)+\mu^2u^2\big)}+315\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^{k-1}}{(2k+1)(2k+3)}. \quad (27)$$

Докажем неравенство более сильное, чем (27), а именно получающееся в результате замены ряда в правой части (27) его первыми четырьмя слагаемыми:

$$7\frac{3+u}{(1-u)^2}<8\frac{5u+10u^2+u^3+\mu(3u^2+u^3)}{(1-u)^2\big((1-u)^2+2\mu(u+u^2)+\mu^2u^2\big)}+21+9u+5u^2+\frac{35}{11}u^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7(3+u)<\frac{40u+80u^2+8u^3+8\mu(3u^2+u^3)}{(1-u)^2+2\mu(u+u^2)+\mu^2u^2}+\left(21+9u+5u^2+\frac{35}{11}u^3\right)(1-u)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40<\frac{40+80u+8u^2+8\mu(3u+u^2)}{(1-u)^2+2\mu(u+u^2)+\mu^2u^2}+8u+\frac{24u^2-15u^3+35u^4}{11}.$$

После умножения последнего неравенства на положительную функцию

$$(1-u)^2+2\mu(u+u^2)+\mu^2u^2\equiv 1+(2\mu-2)u+(1+\mu)^2u^2,$$

раскрытия скобок, перенесения всех слагаемых в правую часть, записи её в виде многочлена по степеням переменной u, а затем деления его на $u>0$ приходим к задаче доказательства неравенства

$$0<P(u,\mu),\quad 0<u<(1+2x_0)^{-2},\quad \text{где}\quad P(u,\mu)=\sum_{k=0}^{5}b_k(\mu)u^k, \quad (28)$$

$$b_0(\mu)=168-56\mu,\quad b_1(\mu)=-40\mu^2-56\mu-45\frac{9}{11},\quad b_2(\mu)=8\mu^2+20\frac{4}{11}\mu+\frac{25}{11},$$

$$b_3(\mu)=\frac{24\mu^2+18\mu+89}{11},\quad b_4(\mu)=\frac{-15\mu^2+40\mu-85}{11},\quad b_5(\mu)=35(1+\mu)^2/11.$$

Покажем, что многочлен $P(u,\mu)$ является на отрезке $0\le u\le 1$ выпуклой функцией переменной u при любом значении параметра $\mu\ge 0.4$. Действительно, имеем

$$P_{uu}(u,\mu)=2b_2(\mu)+6b_3(\mu)u+12b_4(\mu)u^2+20b_5(\mu)u^3.$$

Поскольку коэффициенты b_2 b_3 b_5 положительны при любом $\mu>0$, $b_4(\mu)<0$, то при любом $u\in[0,1]$ выполняется неравенство

$$P_{uu}(u,\mu)\ge\left(2b_2(\mu)+6b_3(\mu)+12b_4(\mu)\right)u^2=4u^2(35\mu^2+259\mu-109)/11.$$

Нетрудно проверить, что $35\mu^2+259\mu-109>0$, если $\mu\ge 0.4$. Отсюда заключаем, что $P_{uu}(u,\mu)>0$ $(\forall u\in[0,1]\quad\forall\mu\ge 0.4)$.

Рассмотрим первую из пар (18): $x_0=0$, $c=360$. Из (23) находим $\mu=4\lambda=4c/1260=8/7$, и согласно (28) требуется доказать неравенство

$$0<P(u,8/7),\quad \text{при}\quad 0<u<1. \quad (29)$$

Непосредственным вычислением выводятся тождества

$$P(1,\mu)=\sum_{k=0}^{5} b_k(\mu)=128-80\mu-28\mu^2, \quad P_u(1,\mu)=\sum_{k=0}^{5} k b_k(\mu)=-7\mu^2+36\mu-32,$$

которые влекут за собой равенства

$$P(1,8/7)=0, \quad P_u(1,8/7)=0. \tag{30}$$

Из (30) и выпуклости функции $P(u,8/7)$ на отрезке $0\le u\le 1$ следует, что $\min\{P(u,8/7)\mid 0\le u\le 1\}=P(1,8/7)=0$, и неравенство (29) выполняется.

При рассмотрении второй и третьей пар (18) достаточны более грубые оценки. Поскольку $b_5(\mu)>0$, $b_4(\mu)<0$, $b_3(\mu)>0$, то при $u\in(0,1)$ имеем

$$b_3(\mu)u^3+b_4(\mu)u^4+b_5(\mu)u^5>b_3(\mu)u^3+b_4(\mu)u^4>(b_3(\mu)+b_4(\mu))u^3=(9\mu+58\mu+4)u^3/11>0.$$

Следовательно,

$$Q(u,\mu)\equiv b_0(\mu)+b_1(\mu)u+b_2(\mu)u^2<P(u,\mu) \quad \forall u\in(0,1),$$

и мы вправе заменить (28) более сильным, но более простым неравенством

$$0<Q(u,\mu), \quad 0<u\le u_0=(1+2x_0)^{-2}, \tag{31}$$

и доказывать именно его. Сначала проверим справедливость неравенства (31) при $u=u_0$.

Возьмём вторую из пар (18) $x_0=1/2$, $c=567$. Тогда $u_0=1/4$, $\mu=1.8$,

$$Q(u_0,\mu)=Q(\frac{1}{4},1.8)=b_0(1.8)+\frac{b_1(1.8)}{4}+\frac{b_2(1.8)}{16}=-1.9+\frac{5}{110}+\frac{b_2(1.8)}{16}. \tag{32}$$

А так как $b_2(\mu)>8\mu^2+20\mu$, то $b_2(\mu)/16>0.5\mu^2+\mu$,

$$\frac{b_2(1.8)}{16}>\frac{1.8^2}{2}+1.8=3.42. \tag{33}$$

Из (32), (33) видно, что для второй пары (18) неравенство (31) при $u=u_0$ выполняется. Для третьей пары $x_0=1$, $c=711$ имеем $u_0=1/9$, $\mu=79/35$,

$$Q(u_0,\mu)=Q\left(\frac{1}{9},\frac{79}{35}\right)=b_0\left(\frac{79}{35}\right)+\frac{1}{9}b_1\left(\frac{79}{35}\right)+\frac{1}{81}b_2\left(\frac{79}{35}\right)=-\frac{193}{2205}-\frac{1}{11}+\frac{1}{81}b_2\left(\frac{79}{35}\right). \tag{34}$$

А так как функция b_2 возрастает и $b_2(\mu)>8\mu^2+20\mu$, то

$$b_2\left(\frac{79}{35}\right)>b_2(2)>32+40=72. \tag{35}$$

Из (34), (35) видно, что неравенство (31) при $u=u_0$ выполняется для третьей пары (18).

Для доказательства (31) при всех $u\in(0,u_0)$ осталось заметить, что функция $Q(u,\mu)$ убывает на интервале $0<u<1$, каково бы ни было $\mu>0$. Действительно, ввиду положительности $b_2(\mu)$ и включения $u\in(0,1)$ имеем

$$Q_u(u,\mu)=b_1(\mu)+2ub_2(\mu)<b_1(\mu)+2b_2(\mu)=-24\mu^2-15\frac{3}{11}\mu-41\frac{3}{11}<0.$$

Таким образом неравенство (28) доказано для всех трёх пар (18), причём для второй и третьей пары также и при $u=(1+2x_0)^{-2}$. Согласно проведённым выше рассуждениям этим установлена справедливость неравенства (20), причём для второй и третьей пары также и при $x=x_0$. Теорема 4 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Согласно теореме 4 при любом $x \ge 1$ верно неравенство

$$\Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 711x^3}\right).$$

Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно вывести оценку

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 711x^3} < \frac{1}{12x + kx^{-1}} \quad \forall x \ge 1, \quad \text{где} \quad k = 0.336. \tag{36}$$

Перепишем соотношение (36) в эквивалентной форме

$$\frac{1}{12x} - \frac{x}{12x^2 + k} < \frac{1}{360x^3} - \frac{1}{1260x^5 + 711x^3} \Leftrightarrow \frac{k}{12x^2 + k} < \frac{1}{30x^2} - \frac{1}{105x^4 + 59.25x^2}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $30x^2$ и обозначив $x^2 = v$, получим равносильные (36) неравенства

$$\frac{21v}{25v + 0.7} < 1 - \frac{1}{3.5v + 1.975} \Leftrightarrow \frac{1}{3.5v + 1.975} < \frac{4v + 0.7}{25v + 0.7} \Leftrightarrow 25v + 0.7 < (3.5v + 1.975)(4v + 0.7),$$

которые требуется доказать при $v \ge 1$. Последнее неравенство после раскрытия скобок, переноса всех слагаемых в одну часть и приведения подобных принимает вид

$$p(v) \equiv 14v^2 - 14.65v + 0.6825 > 0.$$

Оно действительно выполняется при любом $v \ge 1$, поскольку $p(1) = 0.0325 > 0$ и многочлен p возрастает на луче $[1, +\infty)$. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \ln\Gamma(x+1) - \ln S(x) - \frac{1}{12x + a(x)}. \tag{37}$$

Неравенство (11) означает положительность функции F. Доказательство положительности $F(x)$ начнём со значений $x \ge 0.5$.

Убедимся в том, что неравенство

$$F(x+1) < F(x) \quad \forall x \ge 0.5 \tag{38}$$

влечёт за собой положительность функции F на луче $[0.5, +\infty)$. Действительно, если бы существовала точка $\xi \in [0.5, +\infty)$, в которой $F(\xi) \le 0$, то вследствие (38) $\{F(\xi + n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ оказалась бы убывающей последовательностью отрицательных чисел, а это противоречило бы предельному соотношению $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ (см. (1)).

Из (37) и определения функции $a(x) = 0.4/x$ при $x \ge 0.5$ заключаем, что неравенство (38) равносильно такому

$$\ln\Gamma(x+2) - \ln S(x+1) - \frac{x+1}{12(x+1)^2 + 0.4} < \ln\Gamma(x+1) - \ln S(x) - \frac{x}{12x^2 + 0.4}, \quad x \ge 0.5. \tag{39}$$

С помощью тождеств (21) перепишем неравенство (39) в следующей эквивалентной форме

$$\frac{x}{12x^2+0.4}-\frac{x+1}{12(x+1)^2+0.4}<\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-1. \tag{40}$$

Покажем, что неравенство (40) выполняется на самом деле при любом $x>0$. Перейдём к переменной $y=x+0.5$, а после – к переменной $t=(2y)^{-1}=(2x+1)^{-1}$, как это было сделано в §2. Левая часть неравенства (40) равна

$$\frac{12(x+1)^2+0.4x-12x^2(x+1)-0.4(x+1)}{(12x^2+0.4)(12(x+1)^2+0.4)}=\frac{12y^2-3.4}{144y^4-62.4y^2+11.56}=$$

$$=\frac{12y^{-2}-3.4y^{-4}}{144-62.4y^{-2}+11.56y^{-4}}=\frac{48t^2-54.4t^4}{144-249.6t^2+184.96t^4}=\frac{3t^2-3.4t^4}{9-15.6t^2+11.56t^4}.$$

Правая часть неравенства (40) разложена в степенной ряд (25). Поэтому приходим к задаче доказательства неравенства

$$\frac{3t^2-3.4t^4}{9-15.6t^2+11.56t^4}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}\quad\forall t\in(0,1). \tag{41}$$

Разделим обе части (41) на t^2 и докажем более сильное неравенство, получающееся в результате замены степенного ряда в правой части (41) его первыми двумя слагаемыми:

$$\frac{3-3.4t^2}{9-15.6t^2+11.56t^4}<\frac{1}{3}+\frac{t^2}{5}\Leftrightarrow\frac{5.4t^2-11.56t^4}{3(9-15.6t^2+11.56t^4)}<\frac{t^2}{5}\Leftrightarrow\frac{27-57.8t^2}{27-46.8t^2+34.68t^4}<1.$$

Последнее неравенство верно при любом $t\in(0,1)$, поскольку знаменатель дроби, стоящей в его левой части, положителен, а числитель меньше знаменателя. Доказательство неравенства (38) завершено.

Теперь докажем неравенство (11) при $0<x<0.5$. В этом случае

$$F(x)=\ln\Gamma(x+1)-\ln S(x)-(12x+0.8)^{-1}, \tag{42}$$

и требуется проверить положительность $F(x)$ на интервале $0<x<0.5$. Это будет сделано с помощью разложения функции $F(x)$ в ряд

$$F(x)=F(0.5)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1-2x)^n,\quad 0<x<1. \tag{43}$$

(Разложение возможно ввиду голоморфности F в правой полуплоскости.) Поскольку ряд (43) является рядом Тейлора функции F с центром разложения 0.5 (записанным в несколько иной форме), то его коэффициенты находятся по формулам

$$a_n=\frac{(-1)^nF^{(n)}(0.5)}{2^nn!},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{44}$$

Для их вычисления найдём производные функции F всех порядков, используя стандартное обозначение $\Psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ и тождество [9] (стр. 775) $\Psi^{(m)}(z)=(-1)^{m-1}m!\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+z)^{-m-1}$, $m\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}$. Имеем

$$F'(x)=\Psi(x+1)-\ln x-0.5/x+(x+1/15)^{-2}/12, \tag{45}$$

$$F''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(k+x)^{-2} - 1/x + 0.5x^{-2} - (x+1/15)^{-3}/6, \tag{46}$$

$$\frac{(-1)^n F^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(k+x)^{-n} - \frac{x^{1-n}}{n(n-1)} + \frac{x^{-n}}{2n} - \frac{1}{12}\left(x+\frac{1}{15}\right)^{-n-1}, \quad n \geq 2. \tag{47}$$

Из (42) находим

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{17} - \frac{\ln 2}{2} > 0.006. \tag{48}$$

Из (45) и равенств $\Psi(1/2) = -\gamma - \ln 4$, $\Psi(x+1) = \Psi(x) + 1/x$ [9] (стр. 774) находим

$$F'(0.5) = 364/289 - \gamma - \ln 2 < -0.01 \tag{49}$$

($\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} 1/k - lnn\right) = -\Psi(1) = 0.577215\ldots$ – постоянная Эйлера-Маскерони). На основании (44) и (47) при $n \geq 2$ получаем следующую формулу для коэффициентов ряда (43):

$$a_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{-n} + b_n, \quad \text{где} \quad b_n = \frac{n-2}{2n(n-1)} - \frac{1}{6}\left(\frac{15}{17}\right)^{n+1}. \tag{50}$$

Докажем положительность чисел a_n при всех $n \geq 9$. Рассмотрим функцию

$$c(x) = \frac{3(x-2)}{x-1} - x\left(\frac{15}{17}\right)^{x+1}.$$

Имеем $c'(x) = 3(x-1)^{-2} + (\alpha x - 1)(15/17)^{x+1}$, где $\alpha = \ln(17/15) > 1/8$. Отсюда видно, что $c'(x) > 0$ ($\forall x \geq 8$) и функция c возрастает на луче $[8, +\infty)$. А так как $c(9) > 0$, то $c(x) > 0$ на луче $9 \leq x < +\infty$. Осталось заметить, что $a_n > b_n = c(n)/(6n)$. Поэтому все слагаемые ряда (43) с номерами $n \geq 9$ положительны на интервале $0 < x < 0.5$ и верно неравенство

$$F(x) > F(0.5) + \sum_{n=1}^{8} a_n(1-2x)^n, \quad 0 < x < 0.5. \tag{51}$$

Оценим снизу числа a_n при $3 \leq n \leq 8$. Непосредственные вычисления дают следующий результат

$$b_3 = \frac{1}{12} - \frac{15^4}{6\cdot 17^4} = \frac{-17729}{12\cdot 17^4} > -\frac{2}{113}, b_4 = \frac{1}{12} - \frac{15^5}{6\cdot 17^5} = \frac{-98893}{12\cdot 17^5} > -\frac{2}{172},$$

$$b_5 = \frac{3}{40} - \frac{15^6}{6\cdot 17^6} = \frac{-3524793}{40\cdot 17^6} > \frac{-2}{547}, b_6 = \frac{1}{15} - \frac{15^7}{6\cdot 17^7} = \frac{-33619529}{30\cdot 17^7} > \frac{-1}{366},$$

$$b_7 = \frac{5}{84} - \frac{15^8}{6\cdot 17^8} = \frac{-1001681545}{84\cdot 17^8} > \frac{-1}{584},$$

$$b_8 = \frac{3}{56} - \frac{15^9}{6\cdot 17^9} = \frac{-3041058009}{56\cdot 17^9} > \frac{-1}{2160}.$$

Отсюда и из (50) находим

$$a_3 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{-3} + b_3 > \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{7}(2k+1)^{-3} + b_3 =$$

$$= \frac{4645519862131}{274195945398375} + b_3 > \frac{2}{119} - \frac{2}{113} = \frac{-12}{13447} > \frac{-1}{1120},$$

$$a_4 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{-4} + b_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^4}{96} - 1\right) + b_4 > \frac{1}{273} + b_4 > \frac{1}{273} - \frac{1}{172} = \frac{-101}{46956} > \frac{-1}{464},$$

$$a_5 = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{-5} + b_5 > \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{3}(2k+1)^{-5} + b_5 =$$

$$= \frac{57365351}{63814078125} + b_5 > \frac{1}{1113} - \frac{2}{547} = \frac{-1679}{608811} > \frac{-1}{360},$$

$$a_6 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{-6} + b_6 = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi^6}{960} - 1\right) + b_6 > \frac{1}{4156} + b_6 > \frac{1}{4156} - \frac{1}{366} = \frac{-1895}{760548} > \frac{-1}{400},$$

$$a_7 = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{-7} + b_7 > \frac{1}{7\cdot 3^7} + b_7 > \frac{1}{15309} - \frac{1}{584} = \frac{-14725}{8940456} > \frac{-1}{600},$$

$$\sum_{n=3}^{8} a_n > -\frac{1}{1120} - \frac{1}{460} - \frac{1}{360} - \frac{1}{400} - \frac{1}{600} - \frac{1}{2160} = -\frac{1457}{139104} > -\frac{1}{95}.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\sum_{n=3}^{8} a_n z^n > -z^3/95 \quad \forall z \in (0,1). \tag{52}$$

Из (51), (52), положив $z = 1 - 2x$, находим

$$F(x) > F(0.5) + a_1 z + a_2 z^2 - z^3/95, \quad 0 < x < 0.5. \tag{53}$$

А так как согласно (44) имеем $a_1 = -F'(0.5)/2$, $a_2 = F''(0.5)/8$, то из (53), (48), (49) выводим неравенство

$$F(x) > 0.006 + 0.005z + F''(0.5)z^2/8 - z^3/95, \quad z = 1 - 2x, \quad 0 < x < 0.5.$$

Полученное неравенство показывает, что для доказательства положительности $F(x)$ на интервале $0 < x < 0.5$ достаточно проверить положительность числа $F''(0.5)$. Из (46) находим

$$F''(0.5) = 4\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^{-2} - \frac{4500}{4913} = \frac{\pi^2 - 8}{2} - \frac{4500}{4913} > \frac{3.14^2 - 8}{2} - \frac{45}{49} = 0.9298 - \frac{45}{49} > 0.$$

Доказательство положительности функции (42) на интервале $(0, 0.5)$ завершено, и этим теорема 1 полностью доказана.

5. Доказательство теоремы 3.

Начнём с вывода оценки сверху (13). По теореме 4 при любом $x > 0$ верно неравенство

$$\Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 360x^3}\right), \tag{54}$$

Из (54) и тождества

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 360x^3} = \frac{1}{12x + 0.4x^{-1} - \frac{106x^{-1}}{1050x^2 + 265}}, \quad x > 0,$$

следует неравенство

$$\Gamma(x+1) < S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+0.4x^{-1}-\frac{106x^{-1}}{1050x^2+265}}\right) <$$
$$< S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+0.4x^{-1}-\frac{106x^{-1}}{1050x^2}}\right) = S(x)\exp\left(\frac{1}{12x+a_2(x)}\right).$$

Выведем оценку снизу (13). Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \ln\Gamma(x+1) - \ln S(x) - (12x+a_1(x))^{-1}, \tag{55}$$

Оценка снизу (13) означает положительность этой функции. И если доказать неравенство

$$\Phi(x+1) < \Phi(x) \quad \forall x \geq 0.5, \tag{56}$$

то вследствие стремления $\Phi(x)$ к нулю при $x \to +\infty$ положительность $\Phi(x)$ на луче $0.5 \leq x < +\infty$ будет доказана. Ввиду (55) неравенство (56) принимает вид

$$\ln\Gamma(x+2) - \ln S(x+1) - \frac{1}{12(x+1)+a_1(x+1)} < \ln\Gamma(x+1) - \ln S(x) - \frac{1}{12(x)+a_1(x)}. \tag{57}$$

Воспользовавшись тождествами (21), перепишем неравенство (57) в следующей равносильной форме:

$$\frac{1}{12x+a_1(x)} - \frac{1}{12(x+1)+a_1(x+1)} < \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1, \quad x \geq 0.5. \tag{58}$$

Обозначим $b(x) = xa_1(x) = 0.4 - 0.1(x+0.5)^{-2}$ и преобразуем левую часть неравенства (58), сделав последовательно замены переменной $x+0.5=y$, $t=(2y)^{-1}$ (если $0.5 \leq x < +\infty$, то $0 < t \leq 0.5$). Получим тождества

$$\frac{1}{12x+a_1(x)} - \frac{1}{12(x+1)+a_1(x+1)} = \frac{x}{12x^2+b(x)} - \frac{x+1}{12(x+1)^2+b(x+1)} =$$
$$= \frac{12x(x+1)+x(b(x+1)-b(x))-b(x)}{144x^2(x+1)^2+12x^2b(x+1)+12(x+1)^2b(x)+b(x)b(x+1)} =$$
$$= \frac{12y^6+24y^5+8.6y^4-6.8y^3-3.1y^2+0.2y+0.05}{144y^8+288y^7+81.6y^6-124.8y^5-53.24y^4+20.72y^3+7.28y^2-1.88y-0.33} =$$
$$= \frac{3t^2+12t^3+8.6t^4-13.6t^5-12.4t^6+1.6t^7+0.8t^8}{9+36t+20.4t^2-62.4t^3-53.24t^4+41.44t^5+29.12t^6-15.04t^7-5.28t^8}.$$

Теперь увеличим последнюю дробь, немного упростив её. Нетрудно проверить, что числитель и знаменатель этой дроби положительны на полуинтервале $0 < t \leq 0.5$, поэтому, уменьшив знаменатель дроби (оставляя его положительным), мы увеличим саму дробь. Поскольку

$$29.12t^6 - 15.04t^7 - 5.28t^8 \geq 29.12t^6 - (15.04/2)t^6 - (5.28/4)t^6 = 20.28t^6 \quad \text{при} \quad t \in (0, 0.5],$$

то верна следующая оценка сверху левой части неравенства (58):

$$\frac{1}{12x+a_1(x)} - \frac{1}{12(x+1)+a_1(x+1)} < \frac{3t^2+12t^3+8.6t^4-13.6t^5-12.4t^6+1.6t^7+0.8t^8}{9+36t+20.4t^2-62.4t^3-53.25t^4+41.4t^5+20.28t^6}, \tag{59}$$

в которой $x \in [0.5, +\infty)$, $t = (2x+1)^{-1} \in (0, 0.5]$. Правая же часть неравенства (58), как было показано в (25), равна сумме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^{2n}/(2n+1)$. Поэтому после деления обеих частей (58) на t^2 и применения оценки (59) получаем, что достаточно доказать неравенство

$$\frac{3 + 12t + 8.6t^2 - 13.6t^3 - 12.4t^4 + 1.6t^5 + 0.8t^6}{9 + 36t + 20.4t^2 - 62.4t^3 - 53.25t^4 + 41.4t^5 + 20.28t^6} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-2}}{2n+1}, \quad 0 < t \le 0.5. \tag{60}$$

Вычтя из обеих частей (60) 1/3 и разделив получившееся неравенство на t^2, придём к равносильному (60) неравенству

$$\frac{1.8 + 7.2t + 5.35t^2 - 12.2t^3 - 5.96t^4}{9 + 36t + 20.4t^2 - 62.4t^3 - 53.25t^4 + 41.4t^5 + 20.28t^6} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{2n-4}}{2n+1}, \quad 0 < t \le 0.5. \tag{61}$$

Вычтя из обеих частей (61) 1/5 и разделив получившееся неравенство на t^2, придём к задаче доказательства неравенства

$$\frac{6.35 + 1.4t + 23.45t^2 - 41.4t^3 - 20.28t^4}{45 + 180t + 102t^2 - 312t^3 - 266.25t^4 + 207t^5 + 101.4t^6} < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{t^{2n-6}}{2n+1}, \quad 0 < t \le 0.5. \tag{62}$$

Сумма ряда, стоящего в правой части (62) превосходит его первое слагаемое, равное 1/7. Знаменатель и числитель дроби, стоящей в левой части (62) положительны, причём знаменатель остаётся положительным даже после его уменьшения – удаления двух последних слагаемых. Следовательно, удалив два последних слагаемых из знаменателя дроби, стоящей в левой части (62), мы увеличим дробь, и таким образом достаточно доказать неравенство

$$\frac{6.35 + 1.4t + 23.45t^2 - 41.4t^3 - 20.28t^4}{45 + 180t + 102t^2 - 312t^3 - 266.25t^4} < \frac{1}{7}, \quad 0 < t \le 0.5. \tag{63}$$

Ввиду положительности знаменателей дробей в (63) данное неравенство равносильно такому:

$$7(6.35 + 1.4t + 23.45t^2 - 41.4t^3 - 20.28t^4) < 45 + 180t + 102t^2 - 312t^3 - 266.25t^4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < 0.55 + 170.2t - 62.15t^2 - 22.2t^3 - 124.29t^4 \quad 0 < t \le 0.5. \tag{64}$$

При $t \in (0, 0.5]$ имеем

$$170.2t - 62.15t^2 - 22.2t^3 - 124.29t^4 > 170t - 64t^2 - 24t^3 - 128t^4 \ge$$
$$\ge 170t - (64/2)t - (24/4)t - (128/8)t = 116t > 0.$$

Отсюда сразу же следует, что неравенство (64) выполняется. Доказательство теоремы 3 завершено.

6. Заключение. Обвёртывание функции асимптотическим рядом в усиленном смысле

Напомним одно определение из теории асимптотических рядов [10], [11] (гл. 13), [12](отдел I, глава 4). Пусть на луче $(0, +\infty)$ заданы действительнозначная функция f и система положительных функций $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{k\to\infty}\big(f_{k+1}(x)/f_k(x)\big) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$. Предположим, что f имеет знакопеременный асимптотический ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} f_k(x), \quad x \to +\infty, \tag{65}$$

то есть при любом $N \in \mathbb{N}$ верно соотношение

$$f(x) - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} f_k(x) = o\big(f_N(x)\big), \quad x \to +\infty.$$

Определение 1. *Функция f обвёртывается рядом (65) на луче $(x_0, +\infty)$, если при любом $m \in \mathbb{N}_0$ и любом $x > x_0$ верно двойное неравенство*

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} f_k(x) < f(x) < \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^{k-1} f_k(x). \tag{66}$$

При $m = 0$ двойное неравенство (66) принимает вид

$$0 < f(x) < f_1(x) \quad \forall x > x_0. \tag{67}$$

При $m = 1$ имеем

$$f_1(x) - f_2(x) < f(x) < f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) \quad \forall x > x_0. \tag{68}$$

Заметим, что неравенства (68) сильнее (67) лишь при «достаточно больших» значениях x, а при «небольших» значениях x сравнение этих неравенств зависит от специфики поведения функций f_1, f_2, f_3.

Положим $g_k(x) = 1/f_k(x)$ и обозначим $\sigma_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} (-1)^{k-1}/g_k(x)$ N-ю частичную сумму ряда (65). Дадим следующее определение.

Определение 2. *Будем говорить, что ряд (65) усиленно обвёртывает функцию f на луче $(x_0, +\infty)$, если при любом $m \in \mathbb{N}$ и любом $x > x_0$ верно двойное неравенство*

$$\sigma_{2m-1}(x) - \frac{1}{g_{2m}(x) + g_{2m-1}(x)} < f(x) < \sigma_{2m}(x) + \frac{1}{g_{2m}(x) + g_{2m+1}(x)}. \tag{69}$$

Неравенство (69) является одновременным усилением двух двойных неравенств

$$\sigma_{2m}(x) < f(x) < \sigma_{2m+1}(x), \quad \sigma_{2m-2}(x) < f(x) < \sigma_{2m-1}(x).$$

Например, при $m = 1$ имеем

$$\frac{1}{g_1(x)} - \frac{1}{g_2(x) + g_1(x)} < f(x) < \frac{1}{g_1(x)} - \frac{1}{g_2(x)} + \frac{1}{g_2(x) + g_3(x)}. \tag{70}$$

Нетрудно убедиться в том, что неравенство (70) одновременно усиливает (67) и (68).

В отношении асимптотического ряда (2) для функции φ автором доказано неравенство (70), которое в данном конкретном случае есть неравенство (8). Это – усиленная обвёртываемость (69) при $m = 1$. Возникла гипотеза, что асимптотический ряд (2) не только обвёртывает функцию φ (это давно известно), но и усиленно обвёртывает её на луче $(0, +\infty)$. Доказать её пока не удалось.

Тем не менее, идея проверить, верны ли равенства (70), усиливающие одновременно (67) и (68) оказалась плодотворной и в другой актуальной задаче – двусторонней оценке центрального биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$. Ввиду справедливости асимптотики

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty,$$

удобно рассматривать последовательность

$$c_n = 4^{-n}\binom{2n}{n} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2n}dt.$$

Последовательность c_n встречается в ряде классических формул математического анализа. Приведём только два примера [13](гл. 5):

$$(1-q)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n, \quad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(1-q^2\sin^2\varphi)^{-1/2}d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 q^{2n}, \quad |q|<1.$$

Часто возникает потребность дать достаточно точную двустороннюю оценку c_n (см., например, недавние публикации [14],[15]). Очевидно, c_n является значением в натуральной точке n функции

$$C(x) = 4^{-x}\Gamma(2x+1)\Gamma^{-2}(x+1).$$

Из (2) нетрудно вывести представление $\ln C(x) = -0.5\ln(\pi x) + \varphi(2x) - 2\varphi(x)$, которое вместе с (16) даёт асимптотику

$$\ln C(x) = -\frac{1}{2}\ln(\pi x) - \frac{1}{8x} + \frac{1}{192x^3} - \frac{1}{640x^5} + O\Big(\frac{1}{x^7}\Big), \quad x\to+\infty.$$

Выяснилось, что неравенство вида (70) для функции

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\ln(\pi x) + \ln C(x) \equiv \varphi(2x) - 2\varphi(x)$$

справедливо, а именно

$$-\frac{1}{8x} + \frac{1}{192x^3} - \frac{1}{640x^5+192x^3} < \varphi_1(x) < -\frac{1}{8x} + \frac{1}{192x^3+8x} \quad \forall x>0. \tag{71}$$

Метод доказательства двойного неравенства (71) в точности такой же, как и двойного неравенства (8). Двойное неравенство (71) после несложных преобразований даёт двусторонние оценки

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\exp\left(-\frac{1}{8n+\frac{1}{3n+1/n}}\right) < c_n < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\exp\left(-\frac{1}{8n+\frac{1}{3n}}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Проведенное исследование показывает, что когда какая-либо функция имеет знакопеременный асимптотический ряд, то проверка её усиленной обвёртываемости этим рядом может дать новые более сильные двусторонние оценки этой функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, part 2, 1927. 616 pp.

2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 432 с.

3. Lang S. Elliptic functions. London. Amsterdam. Dod Mills. Ontario. Sydney. Tokio, Addison-Wesley publishing company, Inc, 1973. 326 pp.

4. Мачис Ю. Ю. О формуле Стирлинга. // Liet. Matem. Rink., 2007, V. 47, spec.nr., p. 526-530.

5. Robbins H. A remark on Stirling's formula // The American mathematical monthly, 1955, V. 62, № 1(Jan), p. 26-29.

6. Sonin N. Sur les termes complementaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling // Annales de l'Ecol norm., 1889, ser 3., t.6, p. 257-262.

7. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: ГИТТЛ, 1954. 244 с.

8. Купцов Л. П. Гамма-функция // Математическая энциклопедия, Т.1, С. 866-870. М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1977.

9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды, т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

10. Федорюк М.В. Обвёртывающий ряд. Математическая энциклопедия, Т.3., С. 1096. М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1982.

11. Hardy G. H. Divergent Series. Oxford Univ. Pr, Oxford, 1949. 396 pp.

12. Polya G., Szego G. Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis I, Reihen. Integralrechnung. Funktionentheorie [Texte imprime], Berlin : Springer , 1925. 338 s.

13. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. Изд. 2-е, перераб., М.: Наука, Гл. ред. физ. -мат. литературы, 1970. 304 с.

14. Белов А. С. Оценка остаточного члена в асимптотическом решении одной экстремальной задачи, связанной с неотрицательными тригонометрическими полиномами // Матем. заметки. 2016. Т. 100, Вып. 2. С. 303–307.

15. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое// Математический форум Ч. 1. Исследования по математическому анализу, Т. 8, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, 2014. С.126–175.

REFERENCES

1. Whittaker, E. T. & Watson, G. N. 1927, *A Course of Modern Analysis.*, 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press, part 2, 616 pp.

2. Gelfond, A. O. 1967, *Ischislenie conechnyh raznostej [Calculus of Finite Differences].*, Nauka, Moscow, 432 pp.

3. Lang, S 1973, *Elliptic functions.* Addison-Wesley publishing company Inc., London. Amsterdam. Dod Mills. Ontario. Sydney. Tokio, 326 pp.

4. Machis, Yu. Yu. 2007, "About Stirling's formula", *Liet. Matem. Rink.*, vol. 47, spec.nr., pp. 526-530.

5. Robbins, H 1955, "A remark on Stirling's formula", *The American mathematical monthly*, vol. 62, no 1(Jan), pp. 26-29.

6. Sonin, N 1889, "Sur les termes complementaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling", *Annales de l'Ecol norm.*, ser. 3., t. 6, pp. 257-262.

7. Sonin N. Ya. 1954, *Issledovaniya o cilindricheskih funkciyah i specialnyh polinomah [Investigations of cylinder functions and special polynomials].*, GITTL, Moscow, 244 pp.

8. Kupcov L. P. 1977, "Gamma-function", *Matematicheskaya-ehnciklopediya*, *Sovetskaya ehnciklopediya*, Moscow, vol. 1, 866-870 pp.

9. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev, O. I. 1981, *Integraly-i-ryady [Integrals and series].*, Nauka, Moscow, vol. 1, 800 pp.

10. Fedoryuk, M. V. 1982, "Wrapping series", *Matematicheskaya-ehnciklopediya*, *Sovetskaya ehnciklopediya*, Moscow, vol.3, 1096 p.

11. Hardy, G. H. 1949, *Divergent Series*, Oxford Univ. Pr, Oxford, 396 pp.

12. Polya, G. & Szego, G. 1925, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis I*, Reihen. Integralrechnung. Funktionentheorie [Texte imprime], Springer, Berlin, 338 s.

13. Ahiezer, N. I. 1970. *Ehlementy-teorii-ehllipticheskih-funkcij [Elements of the theory of elliptic functions].* 2nd ed., Nauka, Moscow, 304 pp.

14. Belov, A. S. 2016, "An estimate of the remainder term in the asymptotic solution of an extremal problem connected with nonnegative trigonometric polynomials", *Mat. notes.*, vol. 100, no. 2, 303–307 pp.

15. Tihonov, I. V., Sherstyukov, V. B. & Petrosova, M. A. "Bernstein polynomials: old and new" *Matematicheskij forum ch.1 Issledovaniya po matematicheskomu analizu(Mathematical forum Ch. 1. Studies in mathematical analysis)*, Vladikavkaz, 2014. vol. 8, pp.126–175.

Получено 10.03.2017 г.
Принято в печать 12.06.2017 г.