

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 512.554.36

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-195-204

**О ГОМОЛОГИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ РАДИКАЛА
ДЖЕКОБСОНА ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ И ЛОКАЛЬНО
НИЛЬПОТЕНТНОГО РАДИКАЛА
ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБР ЛИ****С. А. Пихтильков**, О. А. Пихтилькова, А. А. Горелик, Л.Б. Усова, (г. Оренбург)**Аннотация**

Один из способов изучения свойств колец, алгебр, алгебр Ли, а также их идеалов предполагает сведение их описания через свойства модулей над этими кольцами, алгебрами, алгебрами Ли. В статье рассматриваются вопросы исследования радикалов алгебр Ли, обсуждаются возможности гомологического описания радикала Джекобсона алгебры Ли и нильпотентного радикала специальной алгебры Ли.

В первом разделе работы вводятся основные понятия исследуемых в дальнейшем радикалов и алгебр Ли.

Второй раздел посвящен радикалу Джекобсона для алгебр Ли. Доказано, что пересечение аннуляторов всех неприводимых модулей над произвольной алгеброй Ли L совпадает с пересечением алгебры Ли L и радикала Джекобсона универсальной обертывающей алгебры.

Приведены примеры алгебр Ли, подтверждающие данный факт, а также позволяющие доказать равенство нильпотентного радикала PI -неприводимо представленному радикалу конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль. Рассмотрены соотношения локально нильпотентного радикала и естественных, гомологически заданных радикалов: неприводимо представленного, PI -неприводимо представленного и конечно неприводимо представленного.

В третьем разделе работы показано, что для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль имеет место включение локально нильпотентного радикала в PI -неприводимо представленный, причем в общем случае это включение строгое. Сопоставление первичного радикала с PI -неприводимо представленным позволяет сделать вывод, что ни одно из возможных включений не выполняется и PI -неприводимо представленный радикал не является локально разрешимым в общем случае.

Приведен пример специальной алгебры Ли L над полем F , $\text{char} F \neq 2$, в которой, при условии ненулевого неприводимо представленного радикала, локально нильпотентный радикал равен нулю.

Ключевые слова: алгебра Ли, специальная алгебра Ли, радикал Джекобсона алгебр Ли, локально нильпотентный радикал специальной алгебры Ли

Библиография: 15 названий.

**ON THE HOMOLOGICAL DESCRIPTION
OF THE JACOBSON RADICAL FOR LIE ALGEBRAS
AND THE LOCALLY NILPOTENT RADICAL
FOR SPECIAL LIE ALGEBRAS****S. A. Pikhtil'kov**, O. A. Pikhtilkova, A. A. Gorelik, L. B. Usova, (Orenburg)

Abstract

One way to study the properties of rings, algebras, Lie algebras and their ideals presupposes their description via the properties of modules over these rings, algebras, Lie algebras. This article deals with the study of radicals of Lie algebras. We discuss the possibility of homological descriptions of the Jacobson radical of Lie algebras and nilpotent radical of the special Lie algebra.

The first section introduces the concepts of radicals of Lie algebras.

The second section is devoted to the Jacobson radical of Lie algebras. It is proved that the intersection of all annihilators of irreducible modules over an arbitrary Lie algebra L coincides with the intersection of the Lie algebras L and the Jacobson radical of the universal enveloping algebra. This section contains examples that prove this fact. This examples allows to prove the equality of the nilpotent radical of PI -irreducible represented radical of finite-dimensional Lie algebra over a field of characteristic zero. We find the correlation between the locally nilpotent radical and others radicals of Lie algebras such that the irreducible represented radical, the PI -irreducible represented radical and the finitely irreducible represented radical.

In the third section it is shown that the locally nilpotent radical is included in the PI -irreducible represented radical for an arbitrary special Lie algebra L over a field F of characteristics zero. We have proved that the prime radical is not included in the PI -irreducible represented radical. The reverse inclusion for these radicals does not hold. The PI -irreducible represented radical is not locally solvable in the general case. Shows an example of a special Lie algebra L over a field F with the locally nilpotent radical, which has is equal to zero.

Keywords: Lie algebra, special Lie algebra, the Jacobson radical of Lie algebras, the locally nilpotent radical of special Lie algebras.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

К основным инструментам построения структурной теории алгебраических систем относится радикал [1]. Изучение свойств различных радикалов бесконечномерных алгебр Ли является одним из актуальных направлений исследований в современной алгебре.

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008), Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли. Под гомологическим описанием идеалов колец, алгебр, алгебр Ли понимается их задание через модули [2].

В данной работе обсуждается вопрос о возможности гомологического описания радикала Джекобсона алгебр Ли и локально нильпотентного радикала специальных алгебр Ли.

Далее в работе нам понадобится ряд определений.

В 1963 г. В. Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [3], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI -алгебра Ли, если существует ассоциированная PI -алгебра A , такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем PI -представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L , для которого ассоциированная алгебра представления $A(L)$ является PI -алгеброй.

Следующее определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L , если их нет.

Приведем определения естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли, которые в дальнейшем нам понадобятся для сопоставления с радикалом Джекобсона [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Обозначим через $\text{Irr}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L , если их нет и назовем неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Обозначим через $\text{IrrPI}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет и назовем PI -неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Обозначим через $\text{IrrFin}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет и назовем конечно неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. По аналогии с конечномерными алгебрами назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности представления. Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F .

Кроме того, в работе используется понятие первичного радикала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Назовем алгебру Ли L первичной, если для любых двух ее идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

Идеал P алгебры Ли L является первичным, если фактор-алгебра L/P — первична.

Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех ее первичных идеалов.

2. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли

Напомним, что радикалом Джекобсона алгебры Ли L называется пересечение максимальных идеалов и сама алгебра L , если их нет [4].

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [4].

Для бесконечномерных алгебр Ли свойства радикала Джекобсона исследовал F. Kubo [6].

Известно, что существует специальная алгебра Ли, локально нильпотентный радикал которой строго содержится в радикале Джекобсона [7, пример 1].

Пусть M — неприводимый L -модуль. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную элементами алгебры L в алгебре $\text{End}(M)$.

Ю. А. Бахтурин использовал пересечение аннуляторов конечномерных неприводимых представлений для доказательства теоремы Леви-Мальцева для конечномерных алгебр Ли [8]. Известно, что для конечномерных алгебр Ли пересечение аннуляторов конечномерных представлений совпадает с нильпотентным радикалом [9] и, следовательно, с радикалом Джекобсона для поля нулевой характеристики [4].

Л. А. Симонян рассмотрел пары $L \subseteq A^{(-)}$, где L — алгебра Ли над полем F характеристики нуль, A — локально конечная ассоциативная алгебра [10]. Он ввел обозначение $J_A(L) = L \cap J(A)$.

В [10] доказано:

1. Всякий идеал алгебры Ли L , состоящий из нильпотентных в A элементов, лежит в $J_A(L)$;
2. Если R — локально разрешимый идеал L , то $[R, L] \subseteq J_A(L)$.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть L — произвольная алгебра Ли. Тогда

$$\text{Irr}(L) = L \cap J(U(L)),$$

где $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть M — произвольный неприводимый $U(L)$ -модуль. Тогда M также является неприводимым L -модулем.

Имеет место включение $\text{Irr}(L)$ содержится в аннуляторе $U(L)$ модуля M .

Так как радикал Джекобсона $J(U(L))$ ассоциативной алгебры $U(L)$ совпадает с пересечением аннуляторов всех неприводимых $U(L)$ -модулей, получим $\text{Irr}(L) \subseteq J(U(L))$.

Пусть $x \in L \cap J(U(L))$ — произвольный, M — произвольный неприводимый L -модуль, $A(L)$ — ассоциированная с представлением L ассоциативная алгебра и $\alpha : L \rightarrow A(L)^{(-)}$ — гомоморфизм алгебр Ли, задающий L -модуль M .

Тогда существует его продолжение $\bar{\alpha} : U(L) \rightarrow A(L)$, где $\bar{\alpha}$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр и $\bar{\alpha}(l) = \alpha(l)$ для всех $l \in L$.

Следовательно, M также является $U(L)$ -модулем.

Модуль M неприводим над $U(L)$ тогда и только тогда, когда неприводимым является L -модуль M .

Следовательно, x содержится в аннуляторе модуля M и $x \in \text{Irr}(L)$.

Включение $J(U(L)) \subseteq \text{Irr}(L)$ завершает доказательство теоремы.

ПРИМЕР 3. Пусть $L = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in F\}$ — двумерная абелева алгебра Ли над полем F . Ее универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ изоморфна кольцу многочленов $F[x, y]$ от коммутирующих переменных x и y .

Как известно, $J(F[x, y]) = 0$.

Следовательно, $\text{Irr}(L) = 0$.

Этот пример не противоречит нашим представлениям о радикалах конечномерных алгебр Ли. Нильпотентный радикал $N(L)$ алгебры Ли L также равен нулю.

ПРИМЕР 4. Дадим новую интерпретацию следующего известного примера.

Пусть F — поле характеристики нуль, $F[x]$ — кольцо многочленов.

Зададим для произвольного $f(x) \in F[x]$ три отображения:

$$a(f(x)) = f'(x), \quad b(f(x)) = x \cdot f(x), \quad e(f(x)) = f(x).$$

Легко проверить, что тождественное отображение e коммутирует с a и b , $[a, b] = e$.

Мы получили представление трехмерной разрешимой алгебры Ли

$$L = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \in F\}$$

в алгебре эндоморфизмов $\text{End}(F[x])$.

Легко проверить, что векторное пространство $F[x]$ является неприводимым L -модулем. Следовательно, $\text{Irr}(L) = 0$.

Алгебре $U(L)$ соответствует градуированная алгебра, которая является алгеброй многочленов от трех коммутирующих переменных [9].

Легко проверить, что круговая композиция $u \circ v = u + v - uv$ не может быть равна нулю для элементов $u, v \in U(L)$ не совпадающих со свободным членом.

Как известно, радикалом Джекобсона ассоциативной алгебры является наибольший правый правоквазирегулярный идеал [11], который в алгебре $U(L)$ равен нулю.

Следовательно, $J(U(L)) = 0$.

Согласно [9], $N(L) = \{\alpha e \mid \alpha \in F\}$.

Покажем, что не существует неприводимого L -модуля задающего PI -представление алгебры L .

Пусть M — такой модуль.

Тогда алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L .

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI -алгеброй. Согласно теореме Капланского [11], она простая, конечномерная над своим центром Z .

Тогда алгебра $A(L)$ имеет точное неприводимое представление в некотором модуле V размерности n над Z .

Пусть $\bar{Z}$ алгебраическое замыкание Z .

Конечномерная алгебра $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ над $\bar{Z}$ имеет конечномерное представление в модуле $\bar{Z} \otimes_Z V$, которое может не быть неприводимым.

Рассмотрим композиционный ряд $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ -модулей:

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = \bar{Z} \otimes_Z V,$$

в котором каждый фактор M_k/M_{k-1} ($k = 2, \dots, n$) — неприводим.

Согласно теореме Ли [12, стр. 62], разрешимая алгебра $\bar{Z} \otimes_Z \bar{L}$ представима треугольными матрицами в некотором базисе модуля M_k/M_{k-1} , а, следовательно, и порожденная ей алгебра $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$.

Из неприводимости модуля M_k/M_{k-1} над $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ следует $\dim_{\bar{Z}} M_k/M_{k-1} = 1$.

Алгебра $\bar{Z} \otimes_Z \bar{L}$ имеет треугольное представление в некотором базисе модуля $\bar{Z} \otimes_Z V$. Следовательно, алгебры $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ и $A(L)$ также имеют треугольное представление, что противоречит простоте алгебры $A(L)$.

Алгебра Ли L является разрешимой ступени 2. Получим, $P(L) = L$ (первичный радикал совпадает с разрешимым для конечномерных алгебр [13]).

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из примера 3, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Тогда $\text{Irr}PI(L) = N(L)$, где $N(L)$ — нильпотентный радикал алгебры Ли L .

ТЕОРЕМА 3. Пусть основное поле имеет нулевую характеристику. Тогда следующие включения в общем случае строгие:

$$\text{Irr}(L) \subset \text{Irr}PI(L) \subset \text{Irr}Fin(L). \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строгость первого включения следует из примера 3.

Докажем строгость второго включения.

Пусть $F \subseteq K$ — расширение поля F , которое не является конечномерным. Таким, например, будет поле рациональных функций с коэффициентами из F .

Алгебра sl_2K является простой алгеброй Ли над K . Несложно проверить, что sl_2K является простым кольцом Ли и, следовательно, простой алгеброй Ли над F .

Алгебра sl_2K имеет точное PI -представление над двумерным арифметическим векторным пространством K^2 .

Следовательно, $\text{Irr}PI(sl_2K) = 0$.

В силу бесконечномерности над полем F и простоты алгебра sl_2K не может иметь конечномерных неприводимых представлений над F .

Следовательно, $IrrFin(sl_2K) = sl_2K$.

Предлагаем считать радикалом Джекобсона алгебры Ли L пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет. Из теоремы 2 и результата Маршалла следует, что $IrrPI(L) = J(L)$ для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

3. О гомологическом описании локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли

Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли является обобщением нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли [7, 9]. В работе [7] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. ([7]) Пусть алгебра Ли L имеет PI -представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M . Тогда:

- i) Все идеалы J алгебры L , такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in J$, содержатся в одном из них, например U .
- ii) Образ $\bar{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $End(M)$.
- iii) Идеал U является множеством элементов $x \in L$, таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L .

Исследуем соотношения локально нильпотентного радикала и радикалов $Irr(L)$, $IrrPI(L)$, $IrrFin(L)$.

Далее будет показана строгость этих включений в общем случае и приведен пример конечномерной алгебры Ли L , для которой включение

$$Irr(L) \subset N(L) \quad (2)$$

строгое.

ТЕОРЕМА 5. Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль имеет место включение $N(L) \subset IrrPI(L)$, причем в общем случае это включение строгое.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть алгебра Ли L над полем F характеристики нуль имеет PI -представление в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над F , такое, что L — модуль M неприводим. Пусть I — некоторый локально разрешимый идеал алгебры Ли L . Тогда образ $\bar{I}$ идеала в алгебре $End(M)^{(-)}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — неприводимый $A(L)$ -модуль, алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $(\bar{L})$ алгебры Ли L .

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI -алгеброй. Согласно теореме Капланского [11] она простая, конечномерная над своим центром Z , изоморфна алгебре матриц над телом $A(L) \cong \Delta_m, m \in N$.

Тогда алгебра $A(L)$ имеет точное неприводимое представление в некотором модуле V размерности n над Z .

Пусть Z алгебраическое замыкание.

Конечномерная алгебра $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ над $\bar{Z}$ имеет конечномерное представление в модуле $\bar{Z} \otimes_Z V$, которое может не быть неприводимым.

Рассмотрим композиционный ряд $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ - модулей:

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = \bar{Z} \otimes_Z V,$$

в котором каждый фактор M_k/M_{k-1} ($k = 2, \dots, n$) - неприводим.

Согласно теореме Ли [6] разрешимая алгебра $\bar{Z} \otimes_Z \bar{L}$ представима треугольными матрицами в некотором базисе модуля M_k/M_{k-1} , а следовательно, и порожденная ей алгебра $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$.

Из неприводимости модуля M_k/M_{k-1} над $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ следует $\dim_Z M_k/M_{k-1} = 1$.

Алгебра $\bar{Z} \otimes_Z \bar{L}$ имеет треугольное представление в некотором базисе модуля $\bar{Z} \otimes_Z V$.

Рассуждая так же, как выше, получим $\dim_Z V = 1$.

Следовательно, $A(L) = \Delta$, где Δ тело, конечномерное над Z . Модуль V , неприводимый над телом, одномерен над Δ и конечномерен над Z .

Применим теорию конечномерных алгебр Ли к алгебре $Z \otimes_Z A(L)$.

Образ локально разрешимого идеала $\bar{I}$ является разрешимым идеалом. Если алгебра действует на конечномерное векторное пространство неприводимым образом, то ее разрешимый идеал лежит в центре.

Следовательно, идеал $\bar{I}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Локально нильпотентный идеал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным [7].

Пусть алгебра Ли L имеет неприводимое PI - представление в алгебре эндоморфизмов $\phi : L \rightarrow \text{End}(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F .

Тогда согласно лемме 1 $\phi(N(L)) \supseteq Z(\phi(L))$.

Алгебра Ли $\phi(L)$ порождает ассоциативную алгебру $A(L)$. Ее центр $Z(\phi(L))$ лежит в центроиде неприводимого L - модуля M .

Согласно лемме Шура [11] центроид неприводимого модуля является телом.

Следовательно, ненулевые элементы $\phi(N(L))$ не лежат в наибольшем идеале локальной нильпотентности модуля M . Получили $\phi(N(L)) = 0$.

Из произвольности неприводимого PI - представления M следует включение

$$N(L) \subseteq \text{Irr} PI(L).$$

Строгость включения следует из примера.

ПРИМЕР 5. Пример специальной алгебры Ли L над полем F , $\text{char} F \neq 2$, такой, что $\text{Irr}(L) \neq 0$, локально нильпотентный радикал которой равен нулю.

В частности, $\text{Irr}(L)$ радикальная специальная алгебра Ли. Для алгебры Ли L справедливо строгое включение

$$N(L) \subset \text{Irr}(L). \quad (3)$$

Обозначим через B коммутативную алгебру над полем F формальных степенных рядов со свободным членом от одной коммутирующей переменной.

Идеал рядов без свободного члена R - это известный пример коммутативной радикальной алгебры Ли [14].

Рассмотрим алгебру матриц второго порядка B_2 с элементами из B . Известно, что ее радикал Джекобсона $J(B_2)$ равен R_2 [11], [14].

В частности, при гомоморфном отображении ϕ алгебры B_2 в алгебру эндоморфизмов неприводимого B_2 - модуля M справедливо $\phi(R_2) = 0$.

Рассмотрим алгебру Ли $L = B \otimes_F sl_2(F)$, где $sl_2(F)$ - алгебра Ли матриц второго порядка над F со следом нуль. Обозначим через H идеал $H = R \otimes_F sl_2(F)$.

Алгебра L вложена в PI - алгебру B_2 и, следовательно, является специальной.

Пусть $\phi : L \rightarrow End(M)^{(-)}$ - неприводимое PI - представление алгебры L .

Покажем, что тогда модуль M является B - модулем.

Из неприводимости M следует, что любой его элемент представим в виде линейной комбинации элементов $l_1(l_2(\dots(l_n(m))\dots))$, где $l_1, l_2, \dots, l_n \in L, m \in M, n > 0$.

Элемент l_1 является линейной комбинацией элементов

$$a_1 e_{12} + a_2 e_{21} + a_3 (e_{11} - e_{22}), a_1, a_2, a_3 \in B.$$

Каждый из элементов $e_{12}, e_{21}, e_{11} - e_{22}$ представим в виде коммутатора элементов алгебры Ли L .

Можно считать, что любой из элементов M представим в виде линейной комбинации элементов $[l'_1, l''_2](l_2(\dots(l_n(m))\dots))$, где $l_1, l_2, \dots, l_n \in L, m \in M$.

Пусть $b \in B$ - произвольный. Определим $b([l'_1, l''_2](l_2(\dots(l_n(m))\dots))) = [l'_1, bl''_2](l_2(\dots(l_n(m))\dots))$.

Можно проверить, что по отношению к определенному умножению M является B -модулем.

Множество RM является подмодулем M .

Предположим, что $RM \neq 0$. Тогда существует $m \in M, m \neq 0$, такой, что $Rm \neq 0$.

Множество Rm является ненулевым подмодулем M . Следовательно, $Rm = M$.

Существует элемент $r \in R$, такой, что $rm = m$. Элемент r имеет правый квазиобратный $t \in B$. Тогда $r + t - rt = 0$.

Получим $0 = (r + t - rt)m = rm + tm - rtm = m + tm - tm = m$. Противоречие с предположением $m \neq 0$.

Мы доказали, что $RM = 0$. Следовательно, $HM = 0, H \subseteq Irr(l)$.

Естественный гомоморфизм алгебры L в алгебру $L/H = sl_2(F)$ имеет неприводимое представление.

Мы доказали, что $Irr(L) = IrrPI(L) = IrrFin(L) = H$.

Пусть K - кольцо частных алгебры B . Тогда $L \subseteq K_2^{(-)}$, которая имеет точное представление в K^2 .

Легко проверить, что наибольший идеал нильпотентности такого представления алгебры L равен нулю.

Следовательно, $N(L) = 0$.

Строгое включение $0 \subset H$ завершает обоснование примера.

Далее будет рассмотрен вопрос о соотношении между $IrrPI(L)$ и $P(L)$ для произвольной алгебры Ли L .

Следующий вопрос также является естественным: является ли радикал $IrrPI(L)$ локально нильпотентным или локально разрешимым для специальной алгебры Ли?

Теорема 6 дает ответы на эти вопросы.

ТЕОРЕМА 6. 1. Ни одно из включений $IrrPI(L) \subseteq P(L)$ и $P(L) \subseteq IrrPI(L)$ не выполнено в общем случае.

2. В общем случае $IrrPI(L)$ не является локально разрешимым даже для специальных алгебр Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Строгость включения $IrrPI(L) \subseteq P(L)$ имеет место даже для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Для таких алгебр L справедливо $Irr(L) = N(L)$ [10].

Пусть $L = F_n, n \geq 1$.

Тогда $\text{IrrPI}(L) = 0$, $P(L) = \{\sigma E \mid \sigma \in F, E - \text{единичная матрица порядка } n\}$.

Для доказательства строгости включения $P(L) \subseteq \text{IrrPI}(L)$ воспользуемся примером. В примере построена специальная алгебра L , такая, что $\text{IrrPI}(L) \neq 0$.

Покажем, что $P(L) = 0$. Первичный радикал специальной алгебры Ли локально разрешим. Покажем, что алгебра L не содержит ненулевых локально разрешимых идеалов.

Пусть K - кольцо частных коммутативной алгебры формальных степенных рядов B .

Тогда алгебра $K \otimes_F L$ является простой, конечномерной над K алгеброй Ли. В частности, она не содержит ненулевых локально разрешимых идеалов.

Делаем вывод, что $P(K \otimes_F L) = 0$, но тогда $P(L) = 0$. Мы также доказали вторую часть теоремы. Идеал $\text{IrrPI}(L) \neq 0$.

В силу простоты алгебры $K \otimes_F L$ идеал $K \otimes_F \text{IrrPI}(L) = K \otimes_F L$.

Следовательно, идеал $\text{IrrPI}(L)$ не является локально разрешимым.

4. Заключение

Таким образом, установлено, что нельзя дать естественное гомологическое описание радикала Джекобсона.

Аналогично утверждение и относительно локально нильпотентного радикала. Включения (1), (2) и (3) показывают, что нельзя дать характеристику локально нильпотентного радикала в виде пересечения ядер неприводимых представлений некоторых естественных типов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. 496 с.
2. Михалев А.В., Скорняков Л.А. Гомологическая классификация колец // Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Сов. энциклопедия, 1977-1985. Т. 1: А - Г. С. 1052.
3. Латышев В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями // Сиб. мат. журнал. 1963. Т. 4. N 4. С. 821-829.
4. Marshall E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra. J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 416-422.
5. Пихтильков С.А. Структурная теория специальных алгебр Ли. Оренбург: Оренбургский гос. ун-т, 2013. 171 с.
6. Kubo F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. 1991. V. 38. P. 23-30.
7. Пихтильков С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. Вып. 3. С. 769-782.
8. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 448 с.
9. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III). М.: Мир, 1976.
10. Симонян Л. А. О радикале Джекобсона алгебры Ли // Латвийский математический ежегодник. 1993. Вып. 34. С. 230-234.

11. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972. 190 с.
12. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 356 с.
13. Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. Вып. 3. С. 643-648.
14. Джекобсон Н. Строение колец. М.: Изд-во иност. литературы, 1961. 392 с.
15. Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы. М.: Мир, 1974. 152 с.

REFERENCES

1. Andrunakievich, V. A., & Ryabukhin, Y. M. 1979, *Radicals of algebras and structure theory*, Nauka, Moscow.
2. Mikhalev, A.V., & Skornjakov S.A. 1977-1985. "Homological classification of rings" *Mathematical encyclopedia*, vol. 1, p. 1052.
3. Latyshev V. N. 1963, "On Lie algebras with identical relations", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 4, pp. 821-829.
4. Marshall, E. I. 1967, "The Frattini subalgebras of a Lie algebra", *J. London Math. Soc.*, vol. 42, pp. 416-422.
5. Pikhtilov, S.A. 2013, *Structural theory of special Lie algebras*, Orenburg State University, Orenburg.
6. Kubo, F. 1991, "Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical", *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat.Sci.*, vol. 38, pp. 23-30.
7. Pikhtilov, S.A. 2002, "On locally nilpotent radical of special Lie algebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 8, no. 3, pp. 769-782.
8. Bakhturin, Yu. A. 1985, *The identities in Lie algebras*, Nauka, Moscow.
9. Burbaki, N. 1976, *Lie groups and algebras (chapter I-III)*, Mir, Moscow.
10. Simonyan L. A. 1993, "On the Jacobson radical of the Lie algebra" *Latvian Math. Yearbook*, vol. 34, pp. 230-234.
11. Herstein, I. 1972, *Noncommutative Rings*, Mir, Moscow.
12. Jacobson, N. 1964, *Lie Algebras*, Mir, Moscow.
13. Beidar, K. I. & Pikhtilov, S. A. 2000, "The prime radical of the special Lie algebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 6, no. 3, pp. 643-648.
14. Jacobson, N. 1961, *Structure of Rings*, Izd. IL, Moscow.
15. Kaplansky, I. 1974, *Lie Algebras and Locally Compact Groups*, Mir, Moscow.

Оренбургский государственный университет

Получено 25.12.2016 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.