

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 514.76

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-183-194

**СТРОЕНИЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУР
ТОТАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ГЛАВНОГО
 T^1 -РАССЛОЕНИЯ С ПЛОСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ НАД
НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ
МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ**

И. А. Петров (г. Москва)

Аннотация

В статье получено строение почти эрмитовых структур тотального пространства главного T^1 -расслоения с плоской связностью над некоторыми классами почти контактных метрических многообразий, такими, как контактные, K -контактные, сасакиевые, нормальные, косимплектические, слабо косимплектические, точнее косимплектические и почти косимплектические. Над контактным и K -контактным многообразием почти эрмитова структура принадлежит классу $W_2 \oplus W_4$. Форма Ли отличается от формы плоской связности на постоянный множитель, равный -2 . При этом двойственное векторное поле Ли отличается от некоторого векторного поля из вертикального распределения на этот же постоянный множитель. Также, эта почти эрмитова структура является локально конформно почти келеровой. Над сасакиевым многообразием почти эрмитова структура принадлежит классу W_4 . Форма Ли отличается от формы плоской связности на постоянный множитель, равный 2 . При этом двойственное векторное поле Ли также отличается от некоторого векторного поля из вертикального распределения на этот же постоянный множитель. Над слабо косимплектическим многообразием почти эрмитова структура является семикелеровой. Форма Ли, как и двойственное векторное поле Ли, являются тождественно нулевыми. Над косимплектическим многообразием почти эрмитова структура является келеровой. Также, форма Ли, как и двойственное векторное поле Ли, являются тождественно нулевыми. Над нормальным многообразием почти эрмитова структура является эрмитовой. Над точнее косимплектическим многообразием почти эрмитова структура является G_1 почти эрмитовой структурой, а над почти косимплектическим многообразием является G_2 почти эрмитовой структурой.

Ключевые слова: главное T^1 -расслоение, почти контактная метрическая структура, почти эрмитова структура, форма Ли, локальная конформность.

Библиография: 15 названий.

**THE STRUCTURE OF ALMOST HERMITIAN STRUCTURES
OF TOTAL SPACE OF PRINCIPAL FIBER T^1 -BUNDLE WITH
FLAT CONNECTION OVER SOME CLASSES OF ALMOST
CONTACT METRIC MANIFOLDS**

I. A. Petrov (Moscow)

Abstract

In paper we studied almost Hermitian structures of total space of principal fiber T^1 -bundle with flat connection over some classes of almost contact metric manifolds, such as contact, K -contact, Sasakian, normal, cosymplectic, nearly cosymplectic, exactly cosymplectic and weakly cosymplectic manifolds. Over contact and K -contact manifolds almost Hermitian

structure belongs to the $W_2 \oplus W_4$ class. Lee's form is different from the form of the flat connection by constant factor, equal to -2 . Moreover, dual Lee's vector field is different from some vector field from vertical distribution by the same constant factor. Also, this almost Hermitian structure is local conformal almost Kahlerian. Over Sasakian manifolds almost Hermitian structure belongs to the W_4 class. Lee's form is different from the form of the flat connection by constant factor, equal to 2 . Moreover, dual Lee's vector field also is different from some vector field from vertical distribution by the same constant factor. Over weakly cosymplectic manifolds almost Hermitian structure is semiKahlerian. Lee's form and dual Lee's vector field are identically zero. Over cosymplectic manifolds almost Hermitian structure is Kahlerian. Also, Lee's form and dual Lee's vector field are identically zero. Over normal manifolds almost Hermitian structure is Hermitian. Over exactly cosymplectic manifolds almost Hermitian structure is G_1 almost Hermitian structure, and over nearly cosymplectic manifolds almost Hermitian structure is G_2 almost Hermitian structure.

Keywords: principal fiber T^1 -bundle, almost contact metric structure, almost Hermitian structure, Lee's form, local conformity.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Главные тороидальные расслоения, т.е. расслоения со структурной группой, являющейся компактной абелевой группой, которая изоморфна r -мерному тору [8], интересны и актуальны не только дифференциальной геометрии, но и теоретической физике. Исследованию главных тороидальных расслоений посвящена статья В.Ф. Кириченко [8], в которой он развил результаты Д. Блэра [9], Ш. Кобаяси [10] и Й. Ватанабэ [11]. В ней он получает аппарат исследования главных тороидальных расслоений, а также рассматривает почти эрмитовы структуры, которые он фиксирует на базе расслоения, тем самым индуцируя почти контактные метрические структуры на тотальном пространстве. И. П. Борисовский в своей работе [12] рассматривает частный случай главных тороидальных расслоений, а именно такие, структурная группа которых изоморфна 1-мерному тору. В ней он фиксирует на базе расслоения келерову почти эрмитову структуру, получая сасакиеву почти контактную метрическую структуру на тотальном пространстве. Л. А. Игнаточкина в своей работе [13] также рассматривает главные T^1 -расслоения над почти эрмитовыми многообразиями, а затем изучает преобразования почти контактных метрических структур, получающихся на тотальном пространстве.

А. В. Савинову, рассматривающему главные T^1 -расслоения над почти контактными метрическими многообразиями, в работе [6] удалось получить формулы связи компонент виртуального и структурного тензоров почти эрмитовой структуры тотального пространства и компонент структурных тензоров почти контактной метрической структуры базы расслоения.

В данной работе рассматриваются главные T^1 -расслоения над некоторыми классами почти контактных метрических многообразий. Фиксируя плоскую связность в главном расслоении, также можно индуцировать почти эрмитову структуру на тотальном пространстве, формулы связи при этом получаются из формул, полученных в [6]. Рассматриваются форма и векторное поле Ли почти эрмитовой структуры, а также доказываются некоторые теоремы о локальной конформности.

2. Предварительные сведения

Пусть многообразие M имеет размерность $2n + 1$, $\mathfrak{X}(M)$ — его модуль гладких векторных полей. Также, пусть на нем фиксированы четыре тензорных поля: дифференциальная 1-форма η , называемая *контактной формой*, векторное поле ξ , называемое *векторным полем Роба*,

эндоморфизм Φ , называемый *структурным эндоморфизмом* и риманова метрика g . При этом должны выполняться условия:

$$1) \eta(\xi) = 1; 2) \eta \circ \Phi = 0; 3) \Phi(\xi) = 0; 4) \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi;$$

$$5) g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y); X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Тогда четверку (η, ξ, Φ, g) называют *почти контактной метрической структурой* [14].

С помощью структурного эндоморфизма можно определить тензорное поле N_Φ типа $(2, 1)$ (называемое *тензорным полем Нейенхейса*) по формуле:

$$4N_\Phi(X, Y) = \Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]; X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ковариантный дифференциал $\nabla \Phi$ в римановой связности метрики g определяет 6 тензорных полей B, C, D, E, F, G , которые называются *структурными тензорами* почти контактной метрической структуры. На пространстве расслоения A -реперов над многообразием M со структурной группой $\{e\} \times U(n)$ их ненулевые компоненты $B = \{C_{ab}{}^c, C^{ab}{}_c\}$, $C = \{\tilde{C}^{abc}, \tilde{C}_{abc}\}$, $D = \{C^{ab}, C_{ab}\}$, $E = \{C^a{}_b, C_a{}^b\}$, $F = \{\tilde{D}_{ab}, \tilde{D}^{ab}\}$, $G = \{D^a, D_a\}$ выражаются через $\nabla \Phi$:

$$C^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}\Phi_{b,c}^a, \quad \tilde{C}^{abc} = \frac{i}{2}\Phi_{b,\hat{c}}^a,$$

$$C^{ab} = -i\Phi_{0,\hat{b}}^a + \frac{i}{2}\Phi_{\hat{b},0}^a, \quad C^a{}_b = -i\Phi_{0,b}^a, \quad C_{ab}{}^c = \frac{i}{2}\Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}},$$

$$\tilde{C}_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}}, \quad C_{ab} = i\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{i}{2}\Phi_{b,0}^{\hat{a}},$$

$$C_a{}^b = i\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}, \quad \tilde{D}_{ab} = -i\Phi_{[a,b]}^0, \quad \tilde{D}^{ab} = i\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0,$$

$$D_b = -i\Phi_{b,0}^0, \quad D^b = i\Phi_{b,0}^0.$$

Пусть многообразие P имеет размерность $2n + 2$, $\mathfrak{X}(P)$ — его модуль гладких векторных полей. Пусть также на нем фиксированы два тензорных поля: эндоморфизм J , называемый *почти комплексной структурой*, и риманова метрика $\tilde{g}$. При этом должны выполняться условия:

$$1) J \circ J = -id; 2) \tilde{g}(JX, JY) = \tilde{g}(X, Y); X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

Тогда пару $(J, \tilde{g})$ называют *почти эрмитовой структурой*. С помощью почти эрмитовой структуры определяется *келерова форма* F и *форма Ли* α по формулам:

$$F(X, Y) = \tilde{g}(JX, Y); \quad \alpha(X) = -\frac{1}{n}\delta F \circ J(X); \quad X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

Для формы Ли существует двойственное ей векторное поле $\alpha^\#$, называемое *векторным полем Ли*, для которого выполняется [5]:

$$\alpha(X) = \tilde{g}(X, \alpha^\#); \quad X \in \mathfrak{X}(P).$$

Ковариантный дифференциал $\tilde{\nabla} J$ в римановой связности метрики $\tilde{g}$ определяет 2 тензорных поля B и C , одно из которых называется *виртуальным*, а другое *структурным* тензором почти эрмитовой структуры. На пространстве расслоения A -реперов над многообразием P со структурной группой $U(n)$ их ненулевые компоненты $B = \{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$, $C = \{B^{abc}, B_{abc}\}$ выражаются через $\tilde{\nabla} J$:

$$B_{ab}{}^c = \frac{i}{2}J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}J_{b,c}^a, \quad B_{abc} = -\frac{i}{2}J_{[b,c]}^{\hat{a}}, \quad B^{abc} = \frac{i}{2}J_{[\hat{b},\hat{c}]}^a.$$

Ковариантный дифференциал $\tilde{\nabla}J$ выражается через виртуальный и структурный тензор, виртуальный зависит от *примитивного* и *бесследного* тензоров, а структурный от *кососимметричного* и *квазисимметричного*. Обнуляя тот или иной тензор, получается 16 классов почти эрмитовых структур [5], которые совпадают с классификацией [7].

Рассмотрим главное расслоение (P, M, π, T^1) , у которого базой расслоения является нечетномерное многообразие M с почти контактной метрической структурой (η, ξ, Φ, g) , а структурной группой является одномерный тор T^1 . Тогда, на тотальном пространстве, которое будет являться четномерным многообразием P , зафиксировав связность и обозначив ее форму связности через ω , задается почти эрмитова структура $(J, \tilde{g})$ по формулам:

$$J = i_H \circ \Phi \circ \pi_* - \omega \otimes \tilde{\xi} + \pi^* \eta \otimes \nu; \quad \tilde{g}(X, Y) = g(\pi_* X, \pi_* Y) \circ \pi + \omega(X)\omega(Y),$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, i_H — горизонтальный лифт, $\tilde{\xi} = i_H \xi$, $\nu = \lambda(1)$, $\lambda : \mathfrak{g} = \mathbb{R} \rightarrow f$, а $\mathfrak{g}$ — присоединенная алгебра Ли T^1 , которая для одномерного тора является вещественной прямой, а f — векторное пространство фундаментальных векторных полей [6].

В работе [6] получены формулы связи структурных тензоров почти контактной метрической структурой и виртуального и структурного тензоров почти эрмитовой.

Зафиксируем плоскую связность, тогда эти формулы примут вид:

$$\begin{aligned} B^{ab}{}_c &= C^{ab}{}_c, \quad B^{ab}{}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(D^{ab} - C^{[ab]}), \quad B^{a0}{}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}C^a{}_b, \quad B^{a0}{}_0 = \frac{1}{2}D^a, \\ B^{0a}{}_b &= -\frac{1}{\sqrt{2}}C^a{}_b, \quad B_{ab}{}^c = C_{ab}{}^c, \quad B_{a0}{}^0 = \frac{1}{2}D_a, \\ B_{ab}{}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{ab} - C_{[ab]}), \quad B_{a0}{}^b = \frac{1}{\sqrt{2}}C_a{}^b, \quad B_{0a}{}^b = -\frac{1}{\sqrt{2}}C_a{}^b, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} B^{abc} &= C^{abc}, \quad B^{ab0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}C^{ab}, \quad B^{0ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}D^{ab}, \\ B^{0a0} &= \frac{1}{4}D^a, \quad B_{abc} = C_{abc}, \\ B_{a0b} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}C_{ab}, \quad B_{0ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}D_{ab}, \quad B_{00a} = -\frac{1}{4}D_a. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Нормальная структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *нормальной*, т. е. тензор Нейенхейса ее структурного эндоморфизма представим в виде [1]:

$$N_\Phi = -2d\eta \otimes \xi.$$

Рассмотрим критерий нормальной структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{abc} = C_{ab} = D_{ab} = D_a = 0.$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{abc} = B_{0ab} = B_{00a} = B_{a0b} = 0. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. *Структурный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с нормальной структурой на базе расслоения является тождественно нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (3) можно переписать в виде:

$$B_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0 \dots n$, что означает тождественное равенство нулю структурного тензора. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается эрмитово многообразие, согласно классификации [5].

4. Косимплектическая структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *косимплектической* [2], т.е.:

$$\nabla\Phi = 0.$$

Рассмотрим критерий косимплектической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{abc} = C_{ab}{}^c = C_{ab} = C_a{}^b = D_a^b = D_{ab} = D_a = 0.$$

Используя формулы (1), получим, что компоненты виртуального тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{ab}{}^c = B_{a0}{}^b = B_{a0}{}^0 = B_{ab}{}^0 = B_{0a}{}^b = 0. \quad (4)$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{abc} = B_{0ab} = B_{00a} = B_{a0b} = 0. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2. *Виртуальный и структурный тензоры почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с косимплектической структурой на базе расслоения являются тождественно нулевыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (4) можно представить в виде:

$$B_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0,$$

а формулы (5) в виде:

$$B_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0 \dots n$, т.е. виртуальный и структурный тензоры являются тождественно нулевыми. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается келерово многообразие, согласно классификации [5].

ТЕОРЕМА 3. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с косимплектической структурой на базе расслоения является тождественно нулевой. При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ также является тождественно нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Компоненты формы Ли выражаются через компоненты виртуального тензора следующим образом:

$$\alpha_\beta = -\frac{2}{n} B_{\gamma\beta}{}^{\gamma},$$

где $\beta, \gamma = 0 \dots n$ [15]. Виртуальный тензор является тождественно нулевым, следовательно форма и векторное поле Ли также являются тождественно нулевыми. $\square$

5. Контактная метрическая и K -контактная структура

В 1953 году китайский математик Чжень Шэньшэнь впервые построил расслоение реперов над нечетномерным многообразием, являющимся дифференцируемым и обладающего контактной формой. Позднее, американский математик Альфред Грей назвал такие многообразия контактными. В 1960 году Сасаки доказал, что на таком многообразии внутренним образом порождается структурный эндоморфизм и векторное поле Рибба, а также можно определить риманову метрику, т.е. построил почти контактную метрическую структуру, которая являлась бы контактной.

Почти контактная метрическая структура будет являться *контактной* тогда и только тогда:

$$d\eta(X, Y) = g(X, \Phi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Рассмотрим критерий контактной метрической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{[abc]} = C_{[ab]} = C_{ab}{}^c = D_{ab} = D_a = 0, \quad 2C_a{}^b = D_a^b = -2i\delta_a^b.$$

Используя формулы (1), получим, что компоненты виртуального тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$\begin{aligned} B_{ab}{}^c &= B^{ab}{}_0 = B^{ab}{}_c = B^{a0}{}_0 = B_{a0}{}^0 = B_{ab}{}^0 = 0, \\ B^{a0}{}_b &= \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_b^a, \quad B^{0a}{}_b = -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_b^a, \quad B_{a0}{}^b = -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b, \quad B_{0a}{}^b = \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{[abc]} = B^{[abc]} = B_{0ab} = B^{0ab} = B_{00a} = B^{00a} = B_{[a|0|b]} = B^{[a|0|b]} = 0. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 4. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с контактной метрической структурой на базе расслоения примитивен, а структурный тензор квазисимметричен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, положив $\alpha^0 = -\sqrt{2}i$, $\alpha^a = 0$, непосредственная проверка с использованием формул (6) показывает, что:

$$B^{\lambda\mu}{}_{\nu} = \alpha^{[\lambda}\delta_{\nu}^{\mu]},$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$, т.е. виртуальный тензор является примитивным. Например, покажем, что $B^{a0}{}_b = \alpha^{[a}\delta_b^{0]}$:

$$B^{a0}{}_b = \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b = \frac{1}{2}(0 \cdot \delta_b^0 - (-\sqrt{2}i) \cdot \delta_b^a) = \frac{1}{2}(\alpha^a \cdot \delta_b^0 - \alpha^0 \cdot \delta_b^a) = \alpha^{[a}\delta_b^{0]}.$$

Используя формулы (7), можно показать, что:

$$B_{[\lambda\mu\nu]} = 0,$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$, т.е. структурный тензор является квазисимметричным. Покажем, например, что $B_{[a0b]} = 0$:

$$B_{[a0b]} = \frac{1}{6}(B_{a0b} + B_{0ba} + B_{ba0} - B_{0ab} - B_{ab0} - B_{b0a}).$$

Из (7) следует, что $B_{0ab} = 0$. Используя это, получаем:

$$B_{[a0b]} = \frac{1}{6}(B_{a0b} + B_{b0a} - B_{ab0} - B_{b0a}).$$

Структурный тензор кососимметричен по последним двум индексам, т.е.:

$$B_{ba0} = -B_{b0a}, \quad B_{ab0} = -B_{a0b}.$$

Получаем:

$$B_{[a0b]} = \frac{1}{6}(2B_{a0b} - 2B_{b0a}) = \frac{1}{3}(B_{a0b} - B_{b0a}).$$

Из (7) следует, что $B_{[a|0|b]} = 0$, т.е. $B_{a0b} - B_{b0a} = 0$. Получаем, что $B_{[a0b]} = 0$.

Следовательно, на тотальном пространстве получается почти эрмитово многообразие класса $W_2 \oplus W_4$, согласно классификации [5]. $\square$

ТЕОРЕМА 5. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с контактной метрической структурой на базе расслоения отличается от формы связности ω на постоянный множитель, равный -2 . При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ отличается от векторного поля ν из вертикального распределения на этот же постоянный множитель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим локальное сечение главного расслоения A -реперов над многообразием M и получим базис $(\xi, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ комплексификации локального модуля векторных полей. Подействовав горизонтальным лифтом i_H на этот базис, можно получить векторные поля $(\tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}})$ на тотальном пространстве P . С помощью $\tilde{\xi}$ и ν построим еще два векторных поля: $\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\tilde{\xi} - i\nu}{\sqrt{2}}$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} = \frac{\tilde{\xi} + i\nu}{\sqrt{2}}$. Тогда, набор векторных полей $(\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}, \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}})$ будет являться базисом комплексификации локального модуля векторных полей на P [6].

Т.к. компоненты формы Ли равны: $\alpha^0 = -\sqrt{2}i$, $\alpha^a = 0$, то компоненты двойственного вектора Ли будут равны: $(\alpha^\#)^0 = -\sqrt{2}i$, $(\alpha^\#)^a = 0$ и формулы комплексно сопряженные. Векторное поле Ли можно разложить по базису:

$$\alpha^\# = (\alpha^\#)^{\hat{0}} \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} + (\alpha^\#)^0 \tilde{\varepsilon}_0.$$

Подставляя обозначения $\tilde{\varepsilon}_0$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}$ и компонент векторного поля $\alpha^\#$ получим, что $\alpha^\# = -2\nu$, а из этого получаем, что $\alpha = -2\omega$. $\square$

ТЕОРЕМА 6. *Почти эрмитова структура $W_2 \oplus W_4$ на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью над контактным многообразием будет являться локально конформно почти келеровой, т.е. для каждой точки такого многообразия с такой структурой существует окрестность и функция f , такие, что структура $(J, e^{2f}\tilde{g})$ будет почти келеровой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. форма Ли α отличается от формы связности ω на постоянный множитель, а связность является плоской, т.е. форма этой связности является замкнутой, следовательно, и форма Ли является замкнутой. Используя [7], получаем, что данная почти эрмитова структура будет являться локально конформно почти келеровой. $\square$

Можно рассмотреть подкласс контактных метрических структур на базе расслоения, таких что:

$$\nabla_X(\eta)Y = g(X, \Phi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Они называются *K-контактными структурами*. Критерий, записанный в компонентах $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения *A*-реперов отличается от критерия контактных метрических структур, только тем, что добавляется условие:

$$C_{ab} = C^{ab} = 0.$$

В этом случае виртуальный тензор почти эрмитовой структуры главного T^1 -расслоения будет также являться примитивным, а структурный также квазисимметричным, что говорит о принадлежности почти эрмитовой структуры к классу $W_2 \oplus W_4$. Такая структура также является локально конформно почти келеровой. Форма Ли α и векторное поле Ли $\alpha^\#$, по аналогии с контактными метрическими структурами, также отличаются от формы связности ω и векторного поля ν из вертикального распределения на постоянный множитель, равный -2 .

6. Сасакиева структура

Многообразие называется *многообразием Сасаки*, если:

$$\nabla_X(\Phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Примером многообразия Сасаки может являться нечетномерная сфера, снабженная канонической сасакиевой структурой.

Критерий сасакиевой структуры в компонентах $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения *A*-реперов выглядит следующим образом [5]:

$$C_{abc} = C_{ab}{}^c = C_{ab} = D_{ab} = D_a = 0, \quad C_a{}^b = i\delta_a^b.$$

Используя формулы (1), получим, что компоненты виртуального тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{ab}{}^c = B^{ab}{}_0 = B^{ab}{}_c = B^{a0}{}_0 = B_{a0}{}^0 = B_{ab}{}^0 = 0,$$

$$B^{a0}{}_b = -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_b^a, \quad B^{0a}{}_b = \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_b^a, \quad B_{a0}{}^b = \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b, \quad B_{0a}{}^b = -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b.$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{abc} = B^{abc} = B_{0ab} = B^{0ab} = B_{00a} = B^{00a} = B_{a0b} = B^{a0b} = 0. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 7. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с сасакиевой структурой на базе расслоения примитивен, а структурный тензор является тождественно нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство примитивности виртуального тензора аналогично доказательству в контактных метрических структурах, однако в сасакиевых компоненты формы Ли следует положить равными:

$$\alpha^0 = \sqrt{2}i, \quad \alpha^a = 0.$$

Используя (8), непосредственная проверка показывает, что:

$$B_{\lambda\mu\nu} = 0,$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается почти эрмитово многообразие класса W_4 , согласно классификации [5].

ТЕОРЕМА 8. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с сасакиевой структурой на базе расслоения отличается от формы связности ω на постоянный множитель, равный 2. При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ отличается от векторного поля ν из вертикального распределения на этот же постоянный множитель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. компоненты формы Ли равны: $\alpha^0 = \sqrt{2}i$, $\alpha^a = 0$, то компоненты двойственного вектора Ли будут равны: $(\alpha^\#)^0 = \sqrt{2}i$, $(\alpha^\#)^a = 0$ и формулы комплексно сопряженные. По аналогии с доказательством в контактных метрических структурах, можно разложить векторное поле Ли $\alpha^\#$ по базису:

$$\alpha^\# = (\alpha^\#)^{\hat{0}} \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} + (\alpha^\#)^0 \tilde{\varepsilon}_0,$$

а затем подставить обозначения $\tilde{\varepsilon}_0$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}$ и компонент $\alpha^\#$, и получить, что $\alpha^\# = 2\nu$, а из этого получить, что $\alpha = 2\omega$. $\square$

ТЕОРЕМА 9. *Почти эрмитова структура класса W_4 на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью над сасакиевым многообразием будет являться локально конформно келеровой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству в контактных метрических структурах. $\square$

7. Слабо косимплектическая структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *слабо косимплектической* [3], т.е.:

$$\nabla_X(\Phi)X = 0,$$

где $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Рассмотрим критерий контактной метрической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{ab}{}^c = D_a = C_a{}^b = D_a{}^b = 0, \quad 2C_{ab} = 3D_{ab}, \quad C_{[abc]} = C_{abc}.$$

Используя формулы (1), получим, что компоненты виртуального тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{ab}{}^c = B^{ab}{}_c = B^{a0}{}_0 = B_{a0}{}^0 = B^{a0}{}_b = B^{0a}{}_b = B_{a0}{}^b = B_{0a}{}^b = 0,$$

$$B^{ab}{}_0 = -\frac{\sqrt{2}}{6}C^{ab}, \quad B_{ab}{}^0 = -\frac{\sqrt{2}}{6}C_{ab}. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 10. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью со слабо косимплектической структурой на базе расслоения бесследен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (9), можно показать, что:

$$B^{\lambda\mu}{}_{\mu} = 0,$$

где $\lambda, \mu = 0 \dots n$. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается семикелерова почти эрмитова структура, согласно классификации [5].

ТЕОРЕМА 11. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью со слабо косимплектической структурой на базе расслоения является тождественно нулевой. При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ также является тождественно нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. компоненты формы Ли выражаются через компоненты виртуального тензора следующим образом:

$$\alpha_\beta = -\frac{2}{n} B_{\gamma\beta}{}^\gamma,$$

где $\beta, \gamma = 0 \dots n$, то с помощью (9) можно показать, что они являются нулевыми, следовательно форма Ли является нулевой, а следовательно и векторное поле Ли является нулевым. $\square$

Если рассмотреть подкласс слабо косимплектических структур на базе расслоения, таких что $C_{ab} = C^{ab} = 0$, то почти эрмитова структура на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения будет являться приближенно келеровой.

8. Точнейше косимплектическая структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *точнейше косимплектической*, т.е. она слабо косимплектическая и $d\eta = 0$.

Рассмотрим критерий контактной метрической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{ab} = C_a{}^b = D_{ab} = D_a{}^b = D_a = 0; \quad C_{abc} = C_{[abc]}.$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{a0b} = B_{0ab} = B_{00a} = 0; \quad B_{[abc]} = B_{abc}. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 12. *Структурный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с точнейше косимплектической структурой на базе расслоения кососимметричен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (10), можно показать, что:

$$B_{\lambda\mu\nu} = B_{[\lambda\mu\nu]},$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$, т.е. структурный тензор является кососимметричным. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается G_1 почти эрмитова структура, согласно классификации [5].

9. Почти косимплектическая структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *почти косимплектической*, т.е. $d\eta = 0$ и $d\Omega = 0$, где $\Omega(X, Y) = g(X, \Phi Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Рассмотрим критерий контактной метрической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{[abc]} = C_{[ab]} = C_a{}^b = D_{ab} = D_a{}^b = D_a = 0.$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{[a|0|b]} = B_{0ab} = B_{00a} = B_{[abc]} = 0. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 13. *Структурный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с почти косимплектической структурой на базе расслоения квазисимметричен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (11), можно показать, что:

$$B_{[\lambda\mu\nu]} = 0,$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$, т.е. структурный тензор является квазисимметричным. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается G_2 почти эрмитова структура, согласно классификации [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галаев С. В., Шевцова Ю. В. Почти контактные метрические структуры // Изв. Саратов. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2015. Том 15, №2. С. 136–141.
2. Дондукова Н. Н. Проективный инвариант косимплектических многообразий // Вест. Бур. гос. ун-та. 2011. №9. С. 171–175.
3. Банару М. Б. О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближённо келеровых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Том 8, №2. С. 357–364.
4. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
5. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Одесса, 2013.
6. Савинов А. В. Каноническое тороидальное расслоение над нечетномерной базой // Вестник СамГУ. 2003. Том 2, №28. С. 57–79.
7. Gray A., Hervella L. M. The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants // Annali di Matematica pura ed applicata. 1980. Vol. CXXIII, №IV, С. 35–38.
8. Кириченко В. Ф. Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Том 6, №4. С. 1095–1120
9. Blair D. Contact manifolds in geometry // Lecture Notes in Math. 1976. Vol. 509. P. 1–145.
10. Kobayashi S. Principal fibre bundle with the 1-dimensional toroidal group // Tohoku Math. J. 1956. Vol.8. P. 29–45.
11. Watanabe Y. Riemannian metrics on principal circle bundles over locally symmetric Kahlerian manifolds // Kodai Math. J. 1982. Vol. 5. P. 111–121.
12. Борисовский И. П. О геометрии главных T^1 -расслоений над многообразием Ходжа // Матем. заметки. 1998. Том 64, №6. С. 824–829.
13. Игнаточкина Л. А. Обобщение преобразований, индуцированных на T^1 -расслоениях конформными преобразованиями их базы // Матем. сб. 2011. Том 202, №5. С. 45–62.
14. Игнаточкина Л. А. Анализ на многообразиях. Москва, 2016, МПГУ.
15. Игнаточкина Л. А. Краткое руководство к действию по главным расслоениям и методу присоединенной G -структуры. 2014. liaign.uz.ru/Glavn_rassl_Gstr.pdf.

REFERENCES

1. Galaev, S. V. & Shevchova, Y. V. 2015, "Almost contact metric structures *Izv. Sarat. un-ta*, vol. 15, no. 2, pp. 136–141.
2. Dondukova, N. N. 2011, "Projective invariant of cosymplectic manifolds *Vest. Bur. gos. un-ta*, no. 9, pp. 171–175.
3. Banaru, M. B. 2002, "On the typical number of weakly cosymplectic hypersurfaces of approximately Kahler manifolds *Fundament. i prikl. matem.*, vol. 8, no. 2, pp. 357–364.
4. Vinberg, E. B. & Onishchik, A. L. 1988, "Seminar on Lee's groups and algebraic groups Moscow. Nauka.
5. Kirichenko, V. F. 2013, "Differential geometric structure on manifolds Odessa.
6. Savinov, A. V. 2003, "Canonical toroidal fibre bundle under an odd-dimensional base *Vestnik SamGU*, vol. 2, no. 28, pp. 57–79.
7. Gray, A. & Hervella, L. M. 1980, "The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants *Annali di Matematica pura ed applicata*, vol. CXXIII, no. IV, pp. 35–58.
8. Kirichenko, V. F. 2000, "Differential geometry of principal toroidal fiber bundles, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* vol. 6, no. 4, pp. 1095–1120.
9. Blair, D. 1976, "Contact manifolds in geometry *Lecture Notes in Math.*, vol. 509, pp. 1–145.
10. Kobayashi, S. 1956, "Principal fibre bundle with the 1-dimensional toroidal group *Tohoku Math. J.*, vol. 8, pp. 29–45.
11. Watanabe, Y. 1982, "Riemannian metrics on principal circle bundles over locally symmetric Kahlerian manifolds *Kodai Math. J.*, vol. 5, pp. 111–121.
12. Borisovskii, I. P. 1998, "On the geometry of principal T1-bundles over Hodge manifolds *Math. Notes*, vol. 64, no. 6, pp. 714–718.
13. Ignatochkina, L. A. 2011, "Generalization for transformations of T1-bundle which induced by conformal transformations of their base *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 665–682.
14. Ignatochkina, L. A. 2016, "Analysis on the manifolds Moscow, MPSU.
15. Ignatochkina, L. A. 2014, "A short guide to the action on principal fiber bundles and the method of the associated G -structure Moscow, liaign.ucoz.ru/Glavn_rassl_Gstr.pdf.

Получено 04.02.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.