ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 517.9

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА[1]

С. М. Чуйко
*Донбасский государственный педагогический университет,
84 112, Украина, г. Славянск; e-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация

Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра широко используются в теории устойчивости движения, теории управления, при решении обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли, при решении уравнений в частных производных, а также в задачах восстановления изображений. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучена, то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко.

Наиболее распространенным требованием при решении матричных уравнений Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова, является условие единственности решения. Ранее, в статье А. А. Бойчука и С. А. Кривошеи с использованием теории обобщенных обратных операторов, установлен критерий разрешимости матричных уравнений AX - XB = D и X - AXB = D типа Ляпунова и исследована структура семейства их решений. В статье А. А. Бойчука и С. А. Кривошеи использовано псевдообращение линейного матричного оператора L, соответствующего однородной части уравнений AX - XB = D и X - AXB = D типа Ляпунова.

Используя технику псевдообратных (по Муру-Пенроузу) матриц и проекторов, в статье предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова, в общем случае, когда линейный матричный оператор L, соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения Сильвестра не имеет обратного.

Найдено выражение для семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова с использованием проекторов и псевдообратных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

(по Муру-Пенроузу) матриц. Этот результат является обобщением соответствующих результатов, полученных в статье А. А. Бойчука и С. А. Кривошеи, на случай линейного обобщенного матричного уравнения Сильвестра.

Предложенные условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного обобщенного матричного уравнения Сильвестра подробно проиллюстрированы на примерах.

Ключевые слова: матричное уравнение Сильвестра, матричное уравнение Ляпунова, псевдообратные матрицы.

Библиография: 19 названий.

MSC: 15A24, 34B15, 34C25

ON THE SOLUTION OF THE GENERALIZED MATRIX SYLVESTER EQUATIONS

S. M. Chuiko

Donbass state pedagogical University,
84 112, Ukraine, , Slavyansk; e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Abstract

Lyapunov matrix equations and their generalizations — linear matrix Sylvester equation widely used in the theory of stability of motion, control theory, as well as the solution of differential Riccati and Bernoulli equations, partial differential equations and signal processing. If the structure of the general solution of the homogeneous part of the Lyapunov equation is well studied, the solution of the inhomogeneous equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation is quite cumbersome.

By using the theory of generalized inverse operators, A. A. Boichuk and S. A. Krivosheya establish a criterion of the solvability of the Lyapunov-type matrix equations AX - XB = D and X - AXB = D and investigate the structure of the set of their solutions. The article A. A. Boichuk and S. A. Krivosheya based on pseudo-inverse linear matrix operator L, corresponding to the homogeneous part of the Lyapunov type equation.

The article suggests the solvability conditions, as well as a scheme for constructing a particular solution of the inhomogeneous generalized equation Sylvester based on pseudo-inverse linear matrix operator corresponding to the homogeneous part of the linear matrix generalized Sylvester equation.

Using the technique of Moore-Penrose pseudo inverse matrices, we suggest an algorithm for finding a family of linearly independent solutions of the inhomogeneous generalized equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation in general case when the linear matrix operator L, corresponding to the homogeneous part of the linear generalized matrix Sylvester equation, has no inverse.

We find an expression for family of linearly independent solutions of the inhomogeneous generalized equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation in terms of projectors and Moore-Penrose pseudo inverse matrices. This result is a generalization of the result article A. A. Boichuk and S. A. Krivosheya to the case of linear generalized matrix Sylvester equation.

The suggested the solvability conditions and formula for constructing a particular solution of the inhomogeneous generalized equation Sylvester is illustrated by an examples.

Keywords: matrix Sylvester equation, matrix Lyapunov equation, pseudo inverse matrices.

Bibliography: 19 titles.

MSC: 15A24, 34B15, 34C25

1. Введение

Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра [1, 2, 3, 4, 5] широко используются в теории устойчивости движения [3, с. 245], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати [6, 7] и Бернулли [9]. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучены [1, 5], то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко. В статье [6] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, Ляпунова на основе псевдообращения оператора L, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. В данной статье предложена формула построения частного решения уравнения, обобщающее известное уравнение Сильвестра [3, с. 239].

2. Условия разрешимости

Исследуем задачу о построении решения обобщенного матричного уравнения Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i \ X \ R_i + \sum_{i=1}^{\ell} S_i \ Y \ T_i = B \ . \qquad (1)$$

Здесь

$$Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad R_i \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}, \quad S_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\mu}, \quad T_i \in \mathbb{R}^{\nu\times\delta}$$

и $B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$ — данные матрицы, $X \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, $Y \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$ — неизвестные матрицы. Обозначим

$$\Big\{\Theta_j\Big\}_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}, \quad \Big\{\Xi_j\Big\}_{j=1}^{\mu\cdot\nu} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$$

естественные [11] базисы пространств $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ и $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. Общее решение уравнения (1) ищем в виде сумм

$$X = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j, \quad Y = \sum_{j=1}^{\mu\cdot\nu} \Xi_j y_j, \quad x_j,\ y_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \left[\sum_{i=1}^{k} Q_i\Theta_j R_i\right] x_j + \sum_{j=1}^{\mu\cdot\nu} \left[\sum_{i=1}^{\ell} S_i\Theta_j T_i\right] x_j = B.$$

Обозначим матрицы

$$V_j := \sum_{i=1}^{k} Q_i\Theta_j R_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}, \quad j = 1, 2,\ ...\ \beta\cdot\gamma$$

и

$$W_j := \sum_{i=1}^{\ell} S_i\Theta_j T_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}, \quad j = 1, 2,\ ...\ \mu\cdot\nu.$$

Таким образом, уравнение (1) равносильно следующему

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} V_j x_j + \sum_{j=1}^{\mu\cdot\nu} W_j y_j = B.$$

Определим оператор

$$\mathcal{M}[A]:\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [16, 17]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]:\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Заметим, что оператор $\mathcal{M}[A]$, как и обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, могут быть представлены в явном виде. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (\ 1\ ) \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \quad \Upsilon_2 := (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{4\times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{9\times 1},$$

$$\Upsilon_4 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{16\times 1},\ \dots\ .$$

Вектор Υ_m состоит из $m-1$ цепочки вида

$$(\ 1\ 0\ 0\ ...\ 0\ )^* \in \mathbb{R}^{(m-1)\times 1}$$

и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ ...\ 0 & 1\ 0\ 0\ ...\ 0 & ... & 1\ 0\ 0\ ...\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}.$$

В новых обозначениях оператор $\mathcal{M}[A]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}[A] = \Big(I_n \otimes A\Big) \cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m\cdot n}.$$

Определим также матрицы

$$\Big[E_n^m\Big]_j := \Big[E_1^m\Big]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n}, \ \Big[E_1^m\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронеккера:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \qquad i = 1,\ 2,\ ...\ m.$$

Таким образом, обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] = \sum_{k=1}^n \Big[E_n^m\Big]_k \cdot \mathcal{B} \cdot \Big[E_1^m\Big]_k.$$

В новых обозначениях уравнение (1) равносильно уравнению

$$\mathcal{Q}\ c = \mathcal{M}[B] \tag{2}$$

относительно вектора

$$c := \mathrm{col}\ (x, y) \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma+\mu\cdot\nu}, \quad x \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}, \quad y \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu}.$$

Здесь $\mathcal{Q}^+$ — псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица [1],

$$P_{\mathcal{Q}} : \ \mathbb{R}^{(\beta\cdot\gamma+\mu\cdot\nu)\times(\beta\cdot\gamma+\mu\cdot\nu)} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}), \quad P_{\mathcal{Q}^*} : \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$$

— ортопроекторы матриц, соответственно, $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^*$;

$$\mathcal{Q} := \Big\{ \mathcal{M}[V_1] \ \ \mathcal{M}[V_2]\ ...\ \mathcal{M}[V_{\beta\cdot\gamma}] \ \ \mathcal{M}[W_1] \ \ \mathcal{M}[W_2]\ ...\ \mathcal{M}[W_{\mu\cdot\nu}] \Big\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times(\beta\cdot\gamma+\mu\cdot\nu)}.$$

Матрица $P_{\mathcal{Q}_r}$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Условия существования и вид решения обобщенного матричного уравнения Сильвестра (1) определяет следующая теорема.

Теорема 1. *Обобщенное матричное уравнение Сильвестра (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] = 0. \tag{3}$$

При условии (3) и только при нем, уравнение (1) имеет r-параметрическое семейство решений

$$X = \Phi(c_r) + \Lambda(B), \quad \Phi(c_r) := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j^{(0)}(c_r), \quad x^{(0)}(c_r) := \begin{bmatrix} I_{\beta\cdot\gamma} & O \end{bmatrix} P_{\mathcal{Q}_r} c_r,$$

$$Y = \Psi(c_r) + \Pi(B), \quad \Psi(c_r) := \sum_{j=1}^{\mu\cdot\nu} \Xi_j y_j^{(0)}(c_r), \quad y^{(0)}(c_r) := \begin{bmatrix} O & I_{\mu\cdot\nu} \end{bmatrix} P_{\mathcal{Q}_r} c_r,$$

где

$$\Lambda(B) := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j^{(1)}, \quad x^{(1)} := \begin{bmatrix} I_{\beta\cdot\gamma} & O \end{bmatrix} \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B],$$

$$\Pi(B) := \sum_{j=1}^{\mu\cdot\nu} \Xi_j y_j^{(1)}, \quad y^{(1)} := \begin{bmatrix} O & I_{\mu\cdot\nu} \end{bmatrix} \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B].$$

Доказательство. Действительно, выше показана равносильность матричного уравнения Сильвестра (1) и традиционного линейного алгебраического уравнения (2), как известно [8, 16, 17], разрешимого тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). При условии (3) и только при нем уравнение (2) разрешимо

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

при этом уравнение (1) имеет r-параметрическое семейство решений

$$X = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j, \quad Y = \sum_{j=1}^{\mu\cdot\nu} \Xi_j y_j,$$

где

$$x = \begin{bmatrix} I_{\beta\cdot\gamma} & O \end{bmatrix} \Big\{ \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r \Big\}, \quad y = \begin{bmatrix} O & I_{\mu\cdot\nu} \end{bmatrix} \Big\{ \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r \Big\}.$$

□

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для обобщенного матричного уравнения Сильвестра (1) имеет место критический случай, при этом обобщенное уравнение Сильвестра (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей B, для которых выполнено условие (3). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для обобщенного матричного уравнения Сильвестра (1) имеет место некритический случай, при этом уравнение (1) разрешимо для любой неоднородности B.

Следствие 1. *Обобщенное матричное уравнение (1) в некритическом случае* ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) *разрешимо для любой неоднородности* $B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$. *В этом случае уравнение (1) имеет* r*-параметрическое семейство решений*

$$X = \Phi(c_r) + \Lambda(B), \quad Y = \Psi(c_r) + \Pi(B).$$

Доказательство. Действительно, выше показана равносильность матричного уравнения Сильвестра (1) и традиционного линейного алгебраического уравнения (2), как известно [8, 16, 17], разрешимого тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ требование (3) выполнено, следовательно уравнение (2) разрешимо

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

при этом уравнение (1) имеет r-параметрическое семейство решений

$$X = \Phi(c_r) + \Lambda(B), \quad Y = \Psi(c_r) + \Pi(B),$$

где

$$\Phi(c_r) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\Big[\begin{array}{cc} I_{\beta\cdot\gamma} & O \end{array}\Big]P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big\}, \quad \Psi(c_r) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\Big[\begin{array}{cc} O & I_{\mu\cdot\nu} \end{array}\Big]P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big\};$$

$$\Lambda(B) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\Big[\begin{array}{cc} I_{\beta\cdot\gamma} & O \end{array}\Big]\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\}, \quad \Pi(B) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\Big[\begin{array}{cc} O & I_{\mu\cdot\nu} \end{array}\Big]\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\}.$$

□

3. Псевдорешения матричного уравнения Сильвестра

Предположим далее, что условие (3) не выполнено: $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] \neq 0$, при этом система (2) неразрешима, однако она всегда имеет псевдорешение [10, 8, 12, 13] $X^+ := \Lambda(B)$, $Y^+ = \Pi(B)$, минимизирующее невязку [8] в решении системы (2), при этом среди всех векторов $c \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma+\mu\cdot\nu}$, для которых невязка достигает своего наименьшего значения, вектор $c^+ \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma+\mu\cdot\nu}$ имеет наименьшую длину $|c| := c^*c$.

Лемма 1. *Матричное уравнение Сильвестра (1) при условии* $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] \neq 0$ *не разрешимо, однако имеет псевдорешение, наилучшее (в смысле наименьших квадратов)*

$$X^+ := \Lambda(B), \quad \Lambda(B) := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma}\Theta_j x_j^{(1)}, \quad Y^+ = \Pi(B), \quad \Pi(B) := \sum_{j=1}^{\mu\cdot\nu}\Xi_j y_j^{(1)},$$

минимизирующее невязку

$$\Big|\Big|\mathcal{Q}\ c - \mathcal{M}[B]\Big|\Big|_{\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta}} \to \min$$

в решении системы (2). При этом норма невязки Δ равна норме выражения, входящего в левую часть выражения (2)

$$\Delta := \Big|\Big|\mathcal{Q}\ c^+ - \mathcal{M}[B]\Big|\Big|_{\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta}} = \Big|\Big|P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B]\Big|\Big|_{\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta}}.$$

Доказательство. Действительно, выше показана равносильность матричного уравнения Сильвестра (1) и традиционного линейного алгебраического уравнения (2). Как известно при условии $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] \neq 0$ линейное алгебраическое уравнение (2) не разрешимо, однако имеет псевдорешение [8]

$$c^+ := \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B],$$

наилучшее (в смысле наименьших квадратов), минимизирующее невязку в решении системы (2). Матричное уравнение Сильвестра (1) при этом имеет псевдорешение, наилучшее (в смысле наименьших квадратов)

$$X^+ := \Lambda(B), \quad Y^+ = \Pi(B).$$

□

Пример 1. *Обобщенное матричное уравнение Сильвестра*

$$\sum_{i=1}^{2} Q_i\ X\ R_i + S_1\ Y\ T_1 = B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

разрешимо при

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq 0,$$

постольку для матричного уравнения Сильвестра (4) имеет место критический случай, при этом выполнено условие (3), следовательно, поставленная задача разрешима. Искомое $r := 9$ – параметрическое семейство решений матричного уравнения Сильвестра (4) определяет матрица

$$\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] = \begin{pmatrix} \frac{19}{61} & 0 & \frac{37}{61} & 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{61} & 0 & -\frac{5}{61} & \frac{10}{61} & 0 & -\frac{3}{61} & 0 \end{pmatrix}^*$$

и r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$:

$$P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{61} & 0 & \frac{6}{61} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{61} & 0 & -\frac{14}{61} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{61} & 0 & -\frac{14}{61} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{61} & 0 & -\frac{8}{61} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{14}{61} & 0 & \frac{16}{61} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{61} & 0 & \frac{44}{61} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение обобщенного матричного уравнения Сильвестра (4) представимо в виде

$$X = \Phi(c_r) + \Lambda(B), \quad \Phi(c_r) = \begin{pmatrix} 10c_6 + 6c_8 & 61c_2 & -3c_6 - 14c_8 \\ 61c_1 & 61c_3 & 61c_5 \\ -3c_6 - 14c_8 & 61c_4 & 7c_6 - 8c_8 \end{pmatrix},$$

$$Y = \Psi(c_r) + \Pi(B), \quad \Psi(c_r) = \begin{pmatrix} -14c_6 + 16c_8 & -8c_6 + 44c_8 \\ 61c_8 & 61c_9 \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda(B) = \begin{pmatrix} \frac{19}{61} & 0 & -\frac{24}{61} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{37}{61} & 0 & -\frac{5}{61} \end{pmatrix}, \quad \Pi(B) = \begin{pmatrix} \frac{10}{61} & -\frac{3}{61} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \dots\ c_9 \in \mathbb{R}^1$ — произвольные константы.

Пример 2. *Обобщенное матричное уравнение Сильвестра*

$$\sum_{i=1}^{2} Q_i\ X\ R_i + S_1\ Y\ T_1 = B \tag{5}$$

не разрешимо при

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

матрицы $Q_1,\ Q_2,\ R_1,\ R_2,\ S_1$ *и* T_1 *определены в примере 1.*

Поскольку

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$
P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix} \neq 0,
$$

постольку для обобщенного матричного уравнения Сильвестра (5) имеет место критический случай, при этом условие (3) не выполнено

$$
P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^* \neq 0,
$$

следовательно, матричное уравнение (5) не разрешимо. Искомое псевдорешение уравнения (5)

$$
X^+ = \begin{pmatrix} -\frac{6}{61} & 0 & \frac{14}{61} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{14}{61} & 0 & \frac{8}{61} \end{pmatrix}, \quad Y^+ = \begin{pmatrix} -\frac{16}{61} & \frac{17}{61} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

наилучшее (в смысле наименьших квадратов), определяет матрица

$$
\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] = \begin{pmatrix} -\frac{6}{61} & 0 & \frac{14}{61} & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{61} & 0 & \frac{8}{61} & -\frac{16}{61} & 0 & \frac{17}{61} & 0 \end{pmatrix}^*.
$$

В случае некорректно поставленной задачи [10, 8, 12, 13] обобщенное матричное уравнение Сильвестра (1) может быть регуляризовано аналогично [14, 15].

4. Заключение

Найденные условия разрешимости и предложенная формула решения обобщенного уравнения Сильвестра могут быть использованы при решении традиционных матричных уравнений Сильвестра [16], матричных уравнений Ляпунова [17], в теории устойчивости движения [18], а также при решении нетеровых краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [19].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука. — 1988. — 552 с.

2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука: 1969. — 367 с.

3. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука. — 1978. — 280 с.

4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука. — 1970. — 534 с.

5. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — Vol. 50, № 8. — P. 1162 — 1169.

6. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. — 2001. — Vol. 37, № 4. — P. 464 — 471.

7. Захар-Иткин М. Х. Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. XXVIII. № 3. — С. 83 — 120.

8. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV — 317 pp.

9. Деревенский В. П. Матричные уравнения Бернулли. I // Известия вузов. Математика. — 2008. — № 2. — P. 14 — 23.

10. Chuiko S. M. Emergence of solution of linear Noetherian boundary-value problem // Ukrainian Math. Zhurn. 2007. — Vol. 59, № 8. P. 1274 — 1279.

11. Воеводин, В. В., Кузнецов, Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука. 1984.

12. Чуйко С. М. Метод наименьших квадратов в теории некорректно поставленных краевых задач // Вестник Киевского национального университета им. Тараса Шевченко. — 2007. № 7, С. 51 — 53.

13. Chuiko S. M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 2008.— Vol. 11, № 4, P. 585 — 604.

14. Чуйко С. М., Чуйко Е. В. Регуляризация периодической краевой задачи при помощи импульсного воздействия // Буковинский математический журнал. — 2013. — Т. 1, № 3 — 4, С. 158 — 161.

15. Chuiko S. M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences — 2014. — Vol. 197, № 1. — P. 138 — 150.

16. Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. — 2014, Т. 19, вып. 1 (21), С. 49 — 57.

17. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика. — № 1120. — 2014. — С. 85 – 94.

18. Коробов В. И., Бебия М. О. Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Докл. НАН Украины. — 2014. — № 2. — С. 20 — 25.

19. Чуйко С. М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32), № 1-2. — С. 101 — 107.

REFERENCES

1. Gantmacher, F. R. 1959, "Theory of matrices" , *AMS, Chelsea publishing.*

2. Bellman, R. E. 1960, "Introduction to matrix analysis" , *McGraw-Hill, New York.*

3. Lancaster, P. 1972, "Theory of matrices" , *Academic Press, New York-London.*

4. Daletskii, Yu. L. & Krein, M. G. 1970, "Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space" , *Nauka, Moscow.* (Russian)

5. Boichuk, A. A. & Krivosheya, S. A. 1998, "Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type" , *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 50, no. 8, pp. 1162–1169.

6. Boichuk, A. A. & Krivosheya, S. A. 2001, "A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations" , *Differential Equations*, vol. 37, no. 4, pp. 464–471.

7. Zakhar-Itkin, M. X. 1973, “Matrix differential Riccati equation and a semigroup of linear-fractional transformation" , *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 28, no. 3, pp. 83–120. (Russian)

8. Boichuk, A. A. & Samoilenko, A. M. 2004, "Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems" , *VSP, Utrecht, Boston.*

9. Derevenskiy, V. P. 2008, "Matrix Bernoulli equation. I" , *Izvestia Vuzov. Mathematica*, no. 2, pp. 14–23. (Russian)

10. Chuiko, S. M. 2007, "Emergence of solution of linear Noetherian boundary-value problem" , *Ukrainian Math. Zhurn.*, vol. 59, no. 8, pp. 1274–1279.

11. Voevodin, V. V. & Kuznetsov, Yu. A. 1984, "Matritsy i vychisleniya" (Matrices and Calculations), *Nauka, Moscow.* (Russian)

12. Chuiko, S. M. 2007, "Least-squares method in the theory of ill-posed linear boundary-value problems" , *Visn. Kiev Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki.*, no. 7, pp. 51–53.

13. Chuiko, S. M. 2008, "On approximate solution of boundary value problems by the least square method" , *Nonlinear Oscillations (N. Y.)*, vol. 11, no. 4, pp. 585–604.

14. Chuiko, S. M. & Chuiko, E. V. 2013, "Regularization periodic boundary value problem by means of pulsed exposure" , *Bukovinskiy mathematicheskiy zhurnal*, vol. 1, № 3 — 4, pp. 158 — 161.

15. Chuiko, S. M. 2014, "On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action" , *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 197, no. 1, pp. 138–150.

16. Chuiko, S. M., 2014, "On the solution of the matrix Sylvester equation" , *Visn. Odesskogo Univ. Ser. Mat. Mech.*, vol. 19, no. 1(21), pp. 49–57. (Russian)

17. Chuiko, S. M. 2014, "On the solution of the matrix Lyapunov equation" , *Visn. Kharkovskogo Univ. Ser. Mat. Mech.*, no. 1120, pp. 85–94. (Russian)

18. Korobov, V. I. & Bebiya M. O. 2014, "Stabilization of a class of nonlinear systems, unguided by the first approximation" , *Dokl. Nats. Akad. Nauk Ukr.*, no. 2, pp. 20–25. (Russian)

19. Chuiko, S. M. 2014, "Green operator Noetherian linear boundary value problem for the matrix differential equation" , *Dinam. Sist.*, vol. 4 (32), no. 1–2, pp. 101–107. (Russian)

Донбасский государственный педагогический университет, Украина, г. Славянск
Поступило 9.12.2014