ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 2

УДК 514.76 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-173-182

ИНВАРИАНТЫ ОБОБЩЕННЫХ f-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

А. В. Никифорова (г. Москва)

Аннотация

Рассмотрены такие обобщения конформных преобразований почти контактных метрических многообразий, как обобщенные конформные преобразования, f-преобразования, обобщенные f-преобразований почти контактных метрических структур.Приведены компоненты тензорных полей почти контактной метрической структуры в A-реперах. Дано выражение компонент тензора аффинной деформации римановой связности для обобщенного конформного преобразования почти контактного метрического многообразия. Установлено, что ни один из шести структурных тензоров почти контактного метрического многообразия относительно этого преобразования не инвариантен. Далее выявлены структурные тензоры, инвариантные относительно f-преобразований — частного случая обобщенных конформных преобразований почти контактных метрических структур.Это второй, третий и пятый структурные тензоры. Для тех структурных тензоров, которые не инвариантны в общем случае, получены условия их инвариантности. После этого рассмотрен вопрос об инвариантности тех же структурных тензоров при обобщенных f-преобразованиях. Установлено, что второй структурный тензор инвариантен относительно рассматриваемых преобразований, третий и пятый тензоры являются относительными инвариантами,то есть инвариантно их обращение в ноль, а для первого структурного тензора получено условие инвариантности относительно обобщенного f-преобразования почти контактных метрических структур.

Ключевые слова: f-преобразование, почти контактные метрические структуры, структурные тензоры.

Библиография: 15 названий.

THE INVARIANTS OF GENERALIZED f-TRANSFORMATIONS FOR ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURES

A. V. Nikiforova (Moscow)

Abstract

In this paper we consider such generalizations of conformal transformations for contact metric manifolds as generalized conformal transformations, f-transformations, generalized f-transformations. Components of tensor fields for almost contact metric structure are given. These components are found in A-frame. Components for the tensor of affine deformation by Riemannian connection are calculated in this paper.We study six structure tensors of almost contact metric manifold.They are not invariant under generalized conformal transformations.We consider a particular case of the generalized conformal transformation, i.e. f-transformation, third, fifth structure tensors are invariant under this transformation. Conditions of invariance for other structure tensors are received. The invariance of six structure tensors under generalized f-transformations is studied. The second structure tensor is invariant under the generalized f-transformation. Vanishing of third and fifth structure tensors is invariant under this transformation.We got the conditions of invariance under these transformations for first structured tensor under generalized f-transformation.

Keywords: f-transformation, almost contact metric structure, structured tensors.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Конформные преобразования псевдо-римановых многообразий являются классическим объектом изучения многомерной дифференциальной геометрии. Такие преобразование рассматривались в работах Б. Римана, Г. Вейля и др. Под ними понимается переход от псевдоримановой метрики g к метрике $\tilde{g}$ по формуле $\tilde{g} = e^{2f}g$, где f — гладкая на многообразии функция. Позже, в связи с активными исследованиями пост римановых многообразий и псевдо-римановых многообразий, наделенных дополнительными структурами, стали актуальны исследования обобщений конформных преобразований. Например, в работе Л. Смолли [1] рассмотрены расширенные конформные преобразования пространства Картана–Вейля. В работе Б. Н. Фролова [2] классические конформные преобразования были перенесены на пространство Римана–Картана, и названы конформными σ-преобразованиями. Другие виды обобщений конформных преобразований используются в работах [3],[4], [5].

Классическими примерами римановых многообразий, наделенных дополнительными структурами, являются почти эрмитовы и почти контактные метрические многообразия.

В начале 50-х годов двадцатого века в работе [6] Дж. Грея было введено понятие почти контактного метрического многообразия. Почти контактные метрические структуры индуцируются на пространствах главных тороидальных расслоений над почти эрмитовыми многообразиями, а также на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. Исследованием конформных преобразований почти контактных метрических структур занимались Чиней и Марреро [7], Ольчак [8], Кириченко и Левковец [9], и другие.

Кроме римановой метрики, на почти контактном метрическом многообразии определены еще три структурных тензорных поля. Чтобы при конформном преобразовании римановой метрики новое многообразие получилось почти контактным метрическим, надо сохранить согласованность структурных тензорных полей в преобразованном многообразии, для чего конформное преобразование необходимо определить по-другому. А именно (см. например [10], [11]): $\tilde{g} = e^{2f}g$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{\xi} = e^{-f}\xi$, $\tilde{\eta} = e^{f}\eta$.

Если же положить тензорные поля Φ, ξ и η инвариантными относительно некоторого преобразования, то условия согласованности удается сохранить, например, при преобразовании метрики g по формуле $\tilde{g}(X,Y) = e^{2f}g(\Phi X, \Phi Y) + \eta X \eta Y$. Такие преобразования называются f-преобразованиями. Они были рассмотрены Е. В. Родиной в [12] и являются частным случаем более общего преобразования, введенными Л. А. Игнаточкиной в [13] — обобщенных конформных преобразований при $\tilde{\eta} = \eta$.

2. Тензорные поля почти контактной метрической структуры

Пусть M — гладкое многообразие.

Четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g), где Φ тензорное поле типа (1,1), ξ — векторное поле, η — дифференциальная 1-форма, g — риманова метрика, удовлетворяющая соотношениям

$$1)\, \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \quad 2)\, \Phi(\xi) = 0; \quad 3)\, \eta \circ \Phi = 0; \quad 4)\, \eta(\xi) = 1;$$

$$5)\, g(\Phi X, \Phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{1}$$

где X и Y — векторные поля, называется *почти контактной метрической структурой* на многообразии M.

Гладкое многообразие M, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием.*

Пусть $m \in M$ — произвольная фиксированная точка гладкого многообразия M, $T_m(M)$ — касательное пространство в этой точке.

Рассмотрим два отображения

$$\ll: T_m(M) \to T_m(M); \quad \mathfrak{m} : T_m(M) \to T_m(M),$$

которые задаются формулами

$$\ll = -\Phi_m^2; \quad \mathfrak{m} = \xi_m \otimes \eta_m,$$

где $\Phi_m = \Phi(m)$, $m \in M$ — значение тензорного поля Φ, рассматриваемого как гладкое сечение векторного расслоения тензоров типа (1,1), в точке m. Это тензор типа (1,1) на касательном пространстве $T_m(M)$. Аналогичным образом определяются тензоры ξ_m (вектор) и η_m (ковектор).

Отображения $\ll$ и $\mathfrak{m}$ являются $\mathbb{R}$-линейными и представляют собой взаимно дополнительные проекторы, такие, что векторное пространство $T_m(M)$ распадается в прямую сумму их образов, то есть в нашем случае

$$T_m(M) = \mathfrak{L}_m \oplus \mathfrak{M}_m,$$

где введены обозначения $\Im \ll = \mathfrak{L}_m$; $\Im \mathfrak{m} = \mathfrak{M}_m$.

При этом подпространство $\mathfrak{M}_m$ одномерно, а подпространство $\mathfrak{L}_m$ является четномерным. Напомним, что модуль векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ распадается в прямую сумму распределений площадки которых для каждой точки $m \in M$ совпадают с $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{L}_m$ соответственно. Распределения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ называются первым и вторым фундаментальным распределениями соответственно [14].

Система $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, состоящая из собственных векторов комплексификации тензора Φ_m — оператора $\Phi_m^{\mathbb{C}}$, отвечающих собственным значениям i и $-i$ соответственно,образует базис комплексификации $\mathfrak{L}_m^{\mathbb{C}}$. Добавим к этой системе вектор ξ_m, который также будем обозначать ε_0. Тогда система векторов

$$(\xi_m \equiv \varepsilon_0, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}) \tag{2}$$

будет образовывать базис комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ касательного пространства $T_m(M)$. Он называется *адаптированным базисом*, или короче *A-базисом.* Будем считать, что индексы $a, b, c, d, \ldots$ пробегают значения $1, \ldots, n$, индексы $i, j, k, \ell, \ldots$ пробегают значения $0, 1, \ldots, 2n$ и $\hat{a} = a + n$. Тогда А-базис коротко можно обозначить следующим образом: (ε_i).

Назовем *A-репером* набор $p = (m, \varepsilon_i)$, где $m \in M$, (ε_i) — А-базис в комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ касательного пространства $T_m(M)$. Компоненты $\{\Phi_j^i\}$; $\{\xi^i\}$; $\{\eta_i\}$; $\{g_{ij}\}$ тензорных полей (Φ, ξ, η, g) почти контактной метрической структуры в А-реперах имеют следующий вид:

$$\Phi_0^0 = 0;\ \Phi_a^0 = \Phi_0^a = 0;\ \Phi_{\hat{a}}^0 = \Phi_0^{\hat{a}} = 0;\ \Phi_{\hat{b}}^a = \Phi_b^{\hat{a}} = 0;\ \Phi_b^a = i\delta_b^a;\ \Phi_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -i\delta_a^b; \tag{3}$$

$$\xi^0 = 1;\ \xi^a = \xi^{\hat{a}} = 0;\ \eta_0 = 1;\ \eta_a = \eta_{\hat{a}} = 0;$$

$$g_{00} = 1;\ g_{a0} = g_{0a} = 0;\ g_{0\hat{a}} = g_{\hat{a}0} = 0;\ g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0;\ g_{\hat{a}b} = g_{b\hat{a}} = \delta_b^a.$$

3. Обобщенные конформные преобразования почти контактных метрических многообразий и их инварианты

Пусть M,(Φ,ξ,η,g) — почти контактное метрическое многообразие. Рассмотрим на этом многообразии новую четверку $(\tilde{\Phi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$, где

$$\tilde{\eta} \text{ — произвольная 1-форма, такая что } \tilde{\eta}(\xi)\neq 0;$$

$$\tilde{\xi}=(\tilde{\eta}(\xi))^{-1}\xi;$$

$$\tilde{\Phi}=\Phi-(\tilde{\eta}\circ\Phi)\otimes\tilde{\xi};$$

$$\tilde{g}=e^{2f}(g-\eta\otimes\eta)+\tilde{\eta}\otimes\tilde{\eta}. \tag{4}$$

Здесь f — произвольная, гладкая на M, функция. Переход от четверки (Φ,ξ,η,g) к $(\tilde{\Phi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ называется *обобщенным конформным преобразованием почти контактного метрического многообразия* M.

Применив основную теорему римановой геометрии для метрики $\tilde{g}$ при вычислении тензора аффинной деформации обобщенных конформных преобразований $T(X,Y)=\tilde{\nabla}_XY-\nabla_XY$, где ∇ и $\tilde{\nabla}$ — римановы связности метрик g и $\tilde{g}$,получили следующий результат:

$$\begin{aligned}2\tilde{g}(T(X,Y),Z)&=2e^{2f}\beta Xg(Y,Z)+2e^{2f}\beta Yg(Z,X)-2e^{2f}\beta Zg(X,Y)-\\&-2e^{2f}X(f)\eta Y\eta Z-e^{2f}\nabla_X\eta Y\eta Z-e^{2f}\eta Y\nabla_X\eta Z+\nabla_X\tilde{\eta}Y\tilde{\eta}Z+\tilde{\eta}Y\nabla_X\tilde{\eta}Z-\\&-2e^{2f}Y(f)\eta Z\eta X-e^{2f}\nabla_Y\eta Z\eta X-e^{2f}\eta Z\nabla_Y\eta X+\nabla_Y\tilde{\eta}Z\tilde{\eta}X+\tilde{\eta}Z\nabla_Y\tilde{\eta}X+\\&+2e^{2f}Z(f)\eta X\eta Y+e^{2f}\nabla_Z\eta X\eta Y+e^{2f}\eta X\nabla_Z\eta Y-\nabla_Z\tilde{\eta}X\tilde{\eta}Y+\tilde{\eta}X\nabla_Z\tilde{\eta}Y\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь β — внешний дифференциал функции f. По определению $\beta(X)=df(X)=X(f)$. Запишем полученное равенство в компонентах:

$$\begin{aligned}2T^q_{ij}&=(2e^{2f}\beta_ig_{jk}-2e^{2f}\beta_i\eta_j\eta_k-e^{2f}\eta_{j,i}\eta_k-e^{2f}\eta_j\eta_{k,i}+\tilde{\eta}_{j,i}\tilde{\eta}_k+\tilde{\eta}_j\tilde{\eta}_{k,i}+\\&+2e^{2f}\beta_jg_{ki}-2e^{2f}\beta_j\eta_k\eta_i-e^{2f}\eta_{k,j}\eta_i-e^{2f}\eta_k\eta_{i,j}+\tilde{\eta}_{k,j}\tilde{\eta}_i+\tilde{\eta}_k\tilde{\eta}_{i,j}-\\&-2e^{2f}\beta_kg_{ij}+2e^{2f}\beta_k\eta_i\eta_j+e^{2f}\eta_{i,k}\eta_j+e^{2f}\eta_i\eta_{j,k}-\tilde{\eta}_{i,k}\tilde{\eta}_j-\tilde{\eta}_i\tilde{\eta}_{j,k})\tilde{g}^{kq}.\end{aligned} \tag{6}$$

Матрица $\tilde{g}$ при этом в A-репере имеет вид:

$$\tilde{g}_{ij}=\begin{pmatrix}\tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_0 & \tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_a & \tilde{\eta}_0\tilde{\eta}_{\hat{a}}\\ \tilde{\eta}_a\tilde{\eta}_0 & \tilde{\eta}_a\tilde{\eta}_b & e^{2f}\delta^b_a+\tilde{\eta}_a\tilde{\eta}_{\hat{b}}\\ \tilde{\eta}_{\hat{a}}\tilde{\eta}_0 & e^{2f}\delta^a_b+\tilde{\eta}_{\hat{a}}\tilde{\eta}_b & \tilde{\eta}_{\hat{a}}\tilde{\eta}_{\hat{b}}\end{pmatrix}$$

Воспользовавшись определением обратной матрицы: $\tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{jk}=\delta^k_i$, получим:

$$\tilde{g}^{ij}=\begin{pmatrix}(2e^{-2f}\tilde{\eta}_{\hat{a}}\tilde{\eta}_a+1)\tilde{\eta}_0^{-2} & -e^{-2f}\tilde{\eta}_{\hat{a}}\tilde{\eta}_0^{-1} & -e^{-2f}\tilde{\eta}_a\tilde{\eta}_0^{-1}\\ -e^{-2f}\tilde{\eta}_{\hat{a}}\tilde{\eta}_0^{-1} & 0 & e^{-2f}\delta^a_b\\ -e^{-2f}\tilde{\eta}_a\tilde{\eta}_0^{-1} & e^{-2f}\delta^a_b & 0\end{pmatrix}$$

Теперь компоненты тензора аффинной деформации окончательно могут быть выражены через тензоры и функции, задающие обобщенное конформное преобразование. Напомним, что на почти контактном метрическом многообразии определено 6 структурных тензоров: B, C, D, E, F, G. Они выражаются через ковариантный дифференциал тензора Φ следующим образом [14]:

$$B(X,Y)=-\frac{1}{4}(\Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2X)-\Phi^2\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)(\Phi X));$$

$$C(X,Y) = -\frac{1}{4}(\Phi^2\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X));$$

$$D(X) = -\frac{1}{2}(\Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi X));$$

$$E(X) = \frac{1}{2}(\Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi);$$

$$F(X) = -\frac{1}{2}(\Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi);$$

$$G = -\Phi\nabla_{\xi}(\Phi)\xi.$$

Тензор $\tilde{\Phi}$ тоже имеет свой ковариантный дифференциал, который также определяет шестерку структурных тензоров. Для того чтобы выяснить, какие из новых структурных тензоров совпадут со старыми, выразим $\tilde{\nabla}\tilde{\Phi}$ через тензор аффинной деформации и ковариантную производную тензора Φ в римановой связности исходного почти контактного метрического многообразия.

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X(\tilde{\Phi})Y = \nabla_X(\Phi)Y - \nabla_X(\tilde{\eta}(\Phi Y))\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(\nabla_X(\Phi)Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(\Phi Y)\nabla_X\tilde{\xi} + \\ + T(X,\Phi Y) - T(X,\tilde{\eta}(\Phi Y)\tilde{\xi}) - \Phi(T(X,Y)) + \tilde{\eta}\Phi(T(X,Y))\tilde{\xi} \quad (7)\end{aligned}$$

В [13] рассматривалось преобразование, являющееся частным случаем обобщенных конформных преобразований. Единственным инвариантом относительно этих преобразований оказался второй структурный тензор C. Таким образом, можно предположить, что если существует структурный тензор, инвариантный относительно обобщенных конформных преобразований, то это второй структурный тензор. Однако, при проведении вычислений, оказалось, что ни второй структурный тензор, ни остальные пять структурных тензоров почти контактного метрического многообразия не инвариантны относительно обобщенных конформных преобразований.

4. Инварианты f-преобразования почти контактных метрических многообразий

Частным случаем обобщенных конформных преобразований при $\tilde{\eta} = \eta$ являются *f-преобразования* [12]. По определению этом случае

$$\tilde{\eta} = \eta,\ \tilde{\xi} = \xi,\ \tilde{\Phi} = \Phi,\ \tilde{g} = e^{2f}(g - \eta\otimes\eta) + \eta\otimes\eta.$$

Кроме того, существенно упрощается матрица $\tilde{g}^{ij}$:

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2f}\delta^a_b \\ 0 & e^{-2f}\delta^a_b & 0 \end{pmatrix}$$

и тензор аффинной деформации,компоненты которого в A-репере вычисляются следующим образом:

$$\begin{gathered}
T^0_{00}=0;\quad T^a_{00}=(e^{-2f}-1)\eta_{\hat{a},0};\quad T^{\hat{a}}_{00}=(e^{-2f}-1)\eta_{a,0};\\
T^0_{a0}=T^0_{0a}=T^0_{\hat{a}0}=T^0_{0\hat{a}}=0;\quad T^0_{ab}=(1-e^{2f})\eta_{(a,b)};\quad T^0_{\hat{a}\hat{b}}=(1-e^{2f})\eta_{(\hat{a},\hat{b})};\\
2T^0_{\hat{a}b}=2T^0_{b\hat{a}}=(1-e^{2f}\eta_{b,\hat{a}})+(1-e^{2f}\eta_{\hat{a},b})-2e^{2f}\beta_0\delta^a_b;\\
2T^b_{a0}=2T^b_{0a}=(e^{-2f}-1)(\eta_{\hat{b},a}-\eta_{a,\hat{b}})+2\beta_0\delta^b_a;\\
2T^{\hat{b}}_{\hat{a}0}=2T^{\hat{b}}_{0\hat{a}}=(e^{-2f}-1)(\eta_{b,\hat{a}}-\eta_{\hat{a},b})+2\beta_0\delta^a_b;\\
2T^b_{\hat{a}0}=2T^b_{0\hat{a}}=(e^{-2f}-1)(\eta_{\hat{b},\hat{a}}-\eta_{\hat{a},\hat{b}});\quad 2T^{\hat{b}}_{a0}=2T^{\hat{b}}_{0a}=(e^{-2f}-1)(\eta_{b,a}-\eta_{a,b});\\
T^c_{ab}=T^c_{ba}=2\beta_{(a}\delta^c_{b)};\quad T^{\hat{c}}_{\hat{a}\hat{b}}=T^{\hat{c}}_{\hat{b}\hat{a}}=2\beta^{(a}\delta^{b)}_c;\quad T^{\hat{c}}_{ab}=T^c_{\hat{a}\hat{b}}=0\\
T^c_{\hat{a}b}=T^c_{a\hat{b}}=2\beta^{[a}\delta^{c]}_b;\quad T^{\hat{c}}_{\hat{a}b}=T^{\hat{c}}_{a\hat{b}}=2\beta_{[a}\delta^b_{c]}.
\end{gathered}\tag{8}$$

Здесь система функций $\{\eta_{i,j}\}$ определяет компоненты ковариантного дифференциала 1-формы η, а круглые скобки означают операцию симметризации, а квадратные — альтернирования. Итак, в этом случае упростится выражение для вычисления тензора аффинной деформации (6), а также выражение (7), благодаря соотношению $\eta\circ\Phi=0$ примет вид:

$$\tilde{\nabla}_X(\tilde{\Phi})Y=\nabla_X(\Phi)Y-\nabla_X(\eta)(\Phi Y)\xi-\eta(\nabla_X(\Phi)Y)\xi+T(X,\Phi Y)-\Phi(T(X,Y))\tag{9}$$

Используя полученные соотношения, исследуем на инвариантность второй структурный тензор.

$$-4\tilde{C}(X,Y)=\tilde{\Phi}^2\tilde{\nabla}_{\tilde{\Phi}^2Y}(\tilde{\Phi})\tilde{\Phi}X+\tilde{\Phi}^2\tilde{\nabla}_{\tilde{\Phi}Y}(\tilde{\Phi})\tilde{\Phi}^2X$$

Воспользуемся тем, что в рамках f-преобразований $\Phi=\tilde{\Phi}$, и тем,что Φ — структура Яно.

$$\begin{aligned}
-4\tilde{C}(X,Y)&=\Phi^2\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)\Phi X+\Phi^2T(\Phi^2Y,\Phi^2X)+\Phi T(\Phi^2Y,\Phi X)+\\
&\qquad+\Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2X-\Phi^2T(\Phi Y,\Phi X)+\Phi T(\Phi Y,\Phi^2X))
\end{aligned}$$

Применим формулу связи между вторыми структурными тензорами исходного и преобразованного многообразий:

$$\begin{aligned}
-4\tilde{C}(X,Y)&=-4C(X,Y)+\Phi^2T(\Phi^2Y,\Phi^2X)+\Phi T(\Phi^2Y,\Phi X)-\\
&\qquad-\Phi^2T(\Phi Y,\Phi X)+\Phi T(\Phi Y,\Phi^2X))
\end{aligned}$$

Таким образом, преобразованный тензор $\tilde{C}$ отличается от исходного на некоторое выражение. Он будет инвариантен относительно f-преобразования тогда и только тогда, когда это выражение равно нулю. Распишем его в компонентах в А-репере и будем придавать свободным индексам различные значения. Получим:

$$\Phi^t_i\Phi^p_t\Phi^q_j\Phi^s_qT^x_{ps}\Phi^y_x\Phi^k_y+\Phi^q_j\Phi^s_q\Phi^t_iT^p_{st}\Phi^k_p-\Phi^q_j\Phi^t_iT^s_{qt}\Phi^p_s\Phi^k_p+\Phi^q_j\Phi^t_i\Phi^s_tT^p_{qs}\Phi^k_p=0.$$

Заметим, что при $i=0$, $j=0$, или $k=0$, все слагаемые обнуляются, что следует из (3). Таким образом, необходимо рассмотреть всего три случая:

1) $i=a,j=b,k=c:-T^c_{ab}+T^c_{ba}-T^c_{ba}+T^c_{ba}=0;$
2) $i=\hat{a},j=b,k=c:-T^c_{\hat{a}b}-T^c_{b\hat{a}}+T^c_{b\hat{a}}+T^c_{b\hat{a}}=0;$
3) $i=a,j=b,k=\hat{c}:-T^{\hat{c}}_{ab}-T^{\hat{c}}_{ba}-T^{\hat{c}}_{ba}-T^{\hat{c}}_{ba}=0.$

В первых двух случаях слагаемые в сумме дают ноль в силу симметричности T. Из (8) следует, что в третьем случае каждое слагаемое суммы равно нулю. Итак, доказана

Теорема 1. *Второй структурный тензор инвариантен относительно f-преобразований.*

Аналогично предыдущим рассуждениям приходим к выводу, что имеет место следующая

Теорема 2. *Первый структурный тензор инвариантен относительно f-преобразования тогда, и только тогда, когда $\beta^\sharp \in \mathfrak{M}$*

Дальнейшие вычисления позволили как выявить структурные тензоры, инвариантные относительно f-преобразований, так и получить условия их инвариантности для тех тензоров, которые в общем случае не инвариантны относительно f-преобразований. Таким образом, имеют место

Теорема 3. *Третий и пятый структурные тензоры инвариантны относительно f-преобразования.*

Теорема 4. *Четвертый структурный тензор инвариантен относительно f-преобразования тогда и только тогда, когда для произвольных векторных полей X и Y на M выполнены следующие соотношения:*

$$(e^{-2f}-1)(\eta(\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y)-\eta(\nabla_{\Phi Y}(\Phi)X)) = 2\beta(\xi)g(\Phi X,\Phi Y);$$

$$\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi Y-\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi X+\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y-\nabla_{\Phi Y}(\Phi)X \in \mathfrak{L}.$$

Теорема 5. *Шестой структурный тензор инвариантен относительно f-преобразования тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $\nabla_\xi(\eta)X = 0$ для произвольного векторного поля X на M.*

5. Инвариантность структурных тензоров почти контактных метрических многообразий относительно обобщенных f-преобразований

Рассмотрим частный случай обобщенного конформного преобразования, для которого выполнено $\tilde{\Phi} = \Phi$. Тогда

$$\Phi^2(X) = -X + \tilde{\eta}(X)\tilde{\xi}$$

$$\Phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$$

Отсюда следует, что $\tilde{\eta} = \sigma\eta$, где σ — некоторая положительно определенная функция. Без потери общности обозначим ее e^σ. Тогда получим:

$$\tilde{\eta} = e^\sigma\eta,\ \tilde{\xi} = e^{-\sigma}\xi,\ \tilde{\Phi} = \Phi,\ \tilde{g} = e^{2f}(g-\eta\otimes\eta)+e^{2\sigma}\eta\otimes\eta \tag{10}$$

Так как при $\sigma = 0$ эти формулы задают f-преобразование, назовем (10) *обобщенным f-преобразованием.* Матрица $\tilde{g}^{ij}$ в этом случае не сильно отличается от аналогичной матрицы для f-преобразований и имеет вид:

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2f}\delta^a_b \\ 0 & e^{-2f}\delta^a_b & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\tilde{\eta} = e^\sigma\eta$, компоненты формы $\tilde{\eta}$ в А-репере равны нулю тогда и только тогда, когда равны нулю соответствующие компоненты формы η. А именно $\tilde{\eta}_a = \tilde{\eta}_{\hat{a}} = 0$. Это позволяет утверждать, что компоненты тензора аффинной деформации, где все индексы принимают значения отличные от нуля, в точности совпадут с такими же компонентами тензора аффинной деформации для f-преобразований. Таким образом, для обобщенных f-преобразований имеем: $T^{\hat{c}}_{ab} = T^{c}_{\hat{a}\hat{b}} = 0$, $T^{c}_{\hat{a}b} = T^{c}_{a\hat{b}} = 2\beta^{[a}\delta^{c]}_{b}$, $T^{\hat{c}}_{\hat{a}b} = T^{\hat{c}}_{a\hat{b}} = 2\beta_{[a}\delta^{b}_{c]}$.

Следовательно, теоремы 1 и 2 имеют место и для обобщенных f-преобразований. Инвариантность же пятого структурного тензора сохранится только с поправкой на множитель, так как, если в выражении, задающем пятый структурный тензор, умножить обе части на e^{σ}, получим: $\tilde{F} = e^{-\sigma}F$. Тензоры,обращение в ноль которых инвариантно относительно рассматриваемых преобразований, называются *относительными инвариантами* [15]. Таким образом, пятый структурный тензор является относительным инвариантом относительно обобщенных f-преобразований.

Аналогично,тензор D также является относительным инвариантом обобщенных f-преобразований.

Таким образом, второй структурный тензор инвариантен относительно обобщенных f-преобразований почти контактных метрических структур. Первый структурный тензор инвариантен относительно f-преобразования тогда, и только тогда, когда $\beta^{\sharp} \in \mathfrak{M}$, третий и пятый структурные тензоры являются относительными инвариантами обобщенных f-преобразований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smalley L. L. Brans-Dicke — type models with nonmetricity // Phys. Rev. D. 1986. Vol. 33. P. 3590-3593.

2. Фролов Б. Н. Пуанкаре калибровочная теория гравитации. М.: МПГУ, 2003. 160 с.

3. Gambini R., Herrera L. Einstein Cartan theory in spin coefficient formalism // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 1449-1454.

4. Nich H.T. Spontaneously broken conformal gauge theory of gravitation // Phys. Lett. 1982. Vol. A88. P. 388-390.

5. Obukhov Ju. N. Conformal invariance and space-time torsion // Phys. Lett. 1982. Vol. A90. P. 13-16.

6. Gray J. Some global properties of contact structures // Ann. Math. 1959. Vol. 69, №2. P. 412-450.

7. Chinea D., Marrero J. C. Conformal changes of almost contact metric structures// Riv. Mat. Univ. Parma.1992. Vol. 1. P. 19-31.

8. Olszak Z. Locally conformal almost cosymplectic manifolds // Colloq. Math. 1989. Vol. 57, №1. P. 73-87.

9. Кириченко В. Ф., Левковец В. А. О геометрии L-многообразий // Мат. заметки. 2006. Том 79, №6. С. 854-869.

10. Кириченко В. Ф., Баклашова Н. С. Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты // Мат. заметки. 2007. Том 82, №3. С. 347–360.

11. Кириченко В. Ф., Дондукова Н. Н. Контактно геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Мат. заметки. 2006. Том 80, №2. С. 209–219.

12. Родина Е. В. Линейные расширения почти контактных метрических многообразий: дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МПГУ, 1997. 104 с.

13. Игнаточкина Л. А. Обобщение преобразований, индуцированных на T1-расслоениях конформными преобразованиями их базы // Матем. сб. 2011. Том 202, №5. С. 45–62.

14. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: "Печатный Дом 2013. 458 с.

15. Кириченко В. Ф., Ускорев И. В. Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур // Мат. заметки. 2008. Том 84, №6. С. 838–850.

REFERENCES

1. Smalley, L. L. 1986, "Brans-Dicke — type models with nonmetricity *Phys. Rev. D.*, vol. 33, pp. 3590-3593.

2. Frolov, B. N. 2003, "Poincaré-gauged calibration theory of gravity MPGU, Moscow, 160 p.

3. Gambini, R. & Herrera, L. 1980, "Einstein Cartan theory in spin coefficient formalism *J. Math. Phys.*, vol. 21, pp. 1449-1454.

4. Nich, H. T. 1982, "Spontaneously broken conformal gauge theory of gravitation *Phys. Lett.*, vol. A88, pp. 388-390.

5. Obukhov, Ju. N. 1982, "Conformal invariance and space-time torsion *Phys. Lett.*, vol. A90, pp. 13-16.

6. Gray, J. 1959, "Some global properties of contact structures *Ann. Math.*, vol. 69, no.2, pp. 412-450.

7. Chinea, D. & Marrero J. C. 1992, "Conformal changes of almost contact metric structures *Riv. Mat. Univ. Parma.*, vol. 1, pp. 19-31.

8. Olszak, Z. 1989, "Locally conformal almost cosymplectic manifolds *Colloq. Math.*, vol. 57, no. 1, pp. 73-87.

9. Kirichenko, V. F. & Levkovec, V. A. 2006, "On geometry of L-manifolds *Mathematical Notes*, vol. 79, no. 6, pp. 854-869.

10. Kirichenko, V. F. & Baklashova, N. S. 2007, "The geometry of contact Lee forms and a contact analog of Ikuta's theorem *Mathematical Notes*, vol. 82, no. 3, pp. 347–360.

11. Kirichenko, V. F. & Dondukova, N. N. 2006, "Contactly geodesic transformations of almost-contact metric structures *Mathematical Notes*, vol. 80, no. 2, pp. 209–219.

12. Rodina, E. V. 1997, "Linear extensions of almost contact metric manifolds Diss. ... kand. fis.-mat. nauk., MPGU, Moscow,98 p.

13. Ignatochkina, L. A. 2011, "Generalization for transformations of T^1-bundle which induced by conformal transformations of their base *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 665–682.

14. Kirichenko, V. F. 2013, "Differential geometric structure on manifolds:, 2, Pechatny Dom, Odessa, 458 p.

15. Kirichenko, V. F. & Uskorev, I. V. 2008, "Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures *Mathematical Notes*, vol. 84, no. 6, pp. 783–794.

Московский педагогический государственный университет
Получено ‘
Получено 24.03.2017 г.
Принято в печать 14.06.2017 г.