ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 2

УДК 514.76 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-144-153

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЧТИ ЭРМИТОВОЙ СТРУКТУРЫ ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ

Л. А. Игнаточкина (г. Москва)

Аннотация

Введено понятие индуцированного преобразования почти эрмитовой структуры линейного расширения почти контактного метрического многообразия. Получены явные формулы этого преобразования почти эрмитовой структуры. Исследована инвариантность четырех основных соотношений на структурный и виртуальный тензоры почти эрмитова многообразия, которые используются при классификации Грея–Хервеллы почти эрмитовых многообразий. Было выяснено, что одно из этих соотношений является инвариантным относительно индуцированного преобразования почти эрмитовой структуры линейного расширения. Для остальных трех условий были найдены требования на функцию, задающую индуцированное преобразование, при выполнении которых названные условия оказались инвариантными относительно индуцированного преобразования почти эрмитовой структуры линейного расширения гладкого многообразия с почти контактной метрической структурой. С использованием этих результатов было выяснено, какие из шестнадцати классов почти эрмитовых многообразий являются инвариантными относительно индуцированных преобразований линейных расширений. Для остальных классов классификации Грея–Хервеллы были получены условия на функцию, задающую индуцированное преобразование, при выполнении которых исходная почти эрмитова структура линейного расширения и преобразованная почти эрмитова структура принадлежат одному и тому же классу из классификации почти эрмитовых многообразий.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, почти контактная метрическая структура, линейное расширение, конформное преобразование.

Библиография: 15 названий.

INDUCED TRANSFORMATIONS FOR ALMOST HERMITIAN STRUCTURE OF LINEAR EXTENSIONS

L. A. Ignatochkina (Moscow)

Abstract

Induced transformation of almost Hermitian structure for linear extension of the manifold with almost contact metric structure was considered in this paper. We got formulas for induced transformation of almost Hermitian structure for linear extension of the smooth manifold with almost contact metric structure. There exist four equations for the Gray–Hervella's classification of the smooth manifolds with almost Hermitian structures. In this paper we studied invariance of these equations. One equation is invariant. The conditions of invariance for three other equations were got in this paper. These equations defined sixteen classes of the smooth manifolds with almost Hermitian structure. In this paper we studied invariance for these classes. One class is invariant. Six classes are invariant if and only if exterior differential of function of induced transformation is contained in the second fundamental distribution. Other classes are invariant if and only if the function of induced transformation is constant.

Keywords: almost Hermitian structure, almost contact metric structure, conformal change.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Линейные расширения гладких многообразий (то есть многообразие вида $M \times \mathbb{R}$, где M — гладкое многообразие, а $\mathbb{R}$ — вещественная прямая) рассматривались в работах [1], [2], [3]. В работах [1], [2] была построена почти эрмитова структура на многообразии $M \times \mathbb{R}$, причем многообразие M отождествляется с многообразием $M \times 0$, являющемся омбилической гиперповерхностью в $M \times \mathbb{R}$. Соотношение между классами почти контактных метрических структур на M и соответствующими классами почти эрмитовых структур на $M \times \mathbb{R}$ были подробно изучены в работах [4], [5].

Конформное преобразование метрики гладкого многообразия, то есть переход от метрики g к метрике $e^{2f}g$, где f — гладкая функция на многообразии, при наличии на этом многообразии других фиксированных тензорных полей определяет конформное преобразование для всей их совокупности. Например, под конформным преобразованием почти эрмитовой структуры понимается переход от пары (J, g) к паре $(J, e^{2f}g)$, а под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры понимается переход от структуры (Φ, ξ, η, g) к структуре $(\Phi, e^{-f}\xi, e^{f}\eta, e^{2f}g)$. Такие преобразования структуры широко изучались. В качестве примера приведем работы [6], [7], [8], [9].

Если даны два, связанные между собой, многообразия с дополнительными тензорными структурам, то преобразование структуры на первом многообразии позволяет индуцировать преобразование структуры второго многообразия. Например, в работе [10] рассматривались почти эрмитова структура на базе главного T^1-расслоения, ее конформное преобразование и индуцированное преобразование почти контактной метрической структуры на тотальном пространстве расслоения.

Зададим на почти контактном метрическом многообразии M конформное преобразование его структуры. Тогда на линейном расширении $M \times \mathbb{R}$ получим некоторое преобразование его почти эрмитовой структуры. Оно задается при помощи отображения присоединенных G-структур, построенного в работах [11], [12]. Тогда первой задачей становится получение инвариантного вида введенного преобразование и второй задачей — исследование инвариантности 16 классов почти эрмитовых многообразий относительно введенного преобразования.

2. Почти эрмитовы и почти контактные метрические структуры на многообразиях

Пусть M — связное гладкое $2n$-мерное многообразие. *Почти эрмитовой структурой* на нем называется пара тензорных полей (J, g), где J — антиинволютивный эндоморфизм, g — риманова метрика, согласованная с J, то есть $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для любых векторных полей X, Y на M. Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется *почти эрмитовым многообразием.*

Напомним [13], что в комплексификации касательного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, $m \in M$, строится базис $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, $a = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$, в котором матрицы тензоров

J_m и g_m имеют вид

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

где I_n — единичная матрица порядка n, $i, j = 1, \ldots, 2n$. Такой базис и соответствующий ему репер $(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$ называются *адаптированными* почти эрмитовой структуре (J, g) многообразия. Коротко они называются A-базисом и A-репером. На пространстве расслоения A-реперов тензорные поля J и g задаются системами функций вида (1). Эти системы функций называются *компонентами* тензорных полей J и g на пространстве расслоения A-реперов. Ковариантный дифференциал тензорного поля J в римановой связности ∇ метрики g определяет два тензорных поля

$$B(X,Y) = \frac{1}{4}(\nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JY}(J)X);$$
$$C(X,Y) = -\frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)).$$

Эти тензорные поля называются *виртуальным* и *структурным тензором*, соответственно. Ненулевые компоненты этих тензорных полей на пространстве расслоения A-реперов обозначаются

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}J^a_{\hat{b},c};\ B_{ab}{}^c = \frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}};$$
$$B^{abc} = \frac{i}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]};\ B_{abc} = -\frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]},$$

где i — мнимая единица, квадратные скобки обозначают альтернирование по заключенным в них индексам. Компоненты виртуального и структурного тензора попарно комплексно сопряжены

$$\bar{B}^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c; \quad \bar{B}^{abc} = B_{abc}.$$

Согласно [14] пространство W тензорных полей α типа (3,0), обладающих свойствами

$$\alpha(X,Y,Z) = -\alpha(X,Z,Y) = -\alpha(X,JY,JZ),$$

распадается в прямую сумму четырех неприводимых подпространств относительно группы $U(n)$:

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4. \tag{2}$$

Ковариантный дифференциал келеровой формы $F(X,Y) = g(JX,Y)$ почти эрмитова многообразия является тензорным полем указанного вида. В зависимости от того, какому из получающихся 16 подпространств он принадлежит, выделяют 16 классов почти эрмитовых многообразий. Критерии этих классов имеют вид [15]

$$\{0\} : B^{abc} = 0, B^{ab}{}_c = 0; W_1 : B^{[abc]} = B^{abc}, B^{ab}{}_c = 0; W_2 : B^{[abc]} = 0, B^{ab}{}_c = 0;$$
$$W_3 :\ B^{abc} = 0, B^{ab}{}_b = 0; W_4 :\ B^{abc} = 0; B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c; \quad W_1 \oplus W_2 : B^{ab}{}_c = 0;$$
$$W_1 \oplus W_3 :\ B^{[abc]} = B^{abc}, B^{ab}{}_b = 0; W_1 \oplus W_4 :\ B^{[abc]} = B^{abc}, B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta^{b]}_c;$$
$$W_2 \oplus W_3 :\ B^{[abc]} = 0, B^{ab}{}_b = 0;\ W_2 \oplus W_4 :\ B^{[abc]} = 0, B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta^{b]}_c;$$
$$W_3 \oplus W_4 :\ B^{abc} = 0;\ W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 : B^{ab}{}_b = 0; W_1 \oplus W_2 \oplus W_4 : B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta^{b]}_c;$$
$$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 :\ B^{[abc]} = B^{abc};\ W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 :\ B^{[abc]} = 0, \tag{3}$$

где $\{\alpha_a, \alpha^a \equiv \alpha_{\hat{a}}\}$ — компоненты формы Ли

$$\omega = \frac{-1}{n-1}\delta F \circ J \tag{4}$$

на пространстве расслоения A-реперов.

Пусть M — связное гладкое $2n{+}1$-мерное многообразие. Пусть на нем фиксирована четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g), где Φ — тензорное поле типа (1,1), η — 1-форма, ξ — векторное поле, g — риманова метрика. При этом выполняются соотношения

$$1)\, \Phi(\xi) = 0;\ 2)\, \eta \circ \Phi = 0; 3)\, \eta(\xi) = 1;\ 4)\, \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$
$$5)\, g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \tag{5}$$

Такая четверка тензорных полей называется *почти контактной метрической структурой*. Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура называется *почти контактным метрическим многообразием*.

Напомним [13], что в комплексификации касательного пространства $T^{\mathbb{C}}_m(M)$, $m \in M$ строится базис $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m)$, $a = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$, в котором компоненты тензоров Φ_m и g_m имеют вид

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$i, j = 1, \ldots, 2n$. Такой базис и соответствующий ему репер $(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m)$ называются *адаптированными* почти контактной метрической структуре многообразия. Короче они называются *A-базисом* и *A-репером*, соответственно. На пространстве расслоения A-реперов тензорные поля Φ и g задаются системами функций вида (1). Эти системы функций называются *компонентами* тензорных полей Φ и g на пространстве расслоения A-реперов.

Ковариантный дифференциал $\nabla\Phi$ эндоморфизма Φ в римановой связности метрики g определяет шесть тензорных полей, ненулевые компоненты

$$\{C^{ab}{}_c, C_{ab}{}^c\},\ \{C^{abc}, C_{abc}\},\ \{C^{ab}, C_{ab}\},\ \{C^a{}_b, C_a{}^b\},\ \{D^{ab}, D_{ab}\},\ \{D^a, D_a\}$$

которых задаются следующим образом

$$\begin{array}{ll} C^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}; & C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]} \\ C^{ab} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},0} - \sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat{b}}; & C^a{}_b = -\sqrt{-1}\Phi^a_{0,b} \\ C_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; & C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]} \\ C_{ab} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} + \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b}; & C_a{}^b = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} \\ D_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{[a,b]}; & D^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]} \\ D_a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,0} & D^a = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},0}, \end{array} \tag{6}$$

где нулевой индекс соответствует вектору ξ_m. Эти тензорные поля называются *структурными тензорами* почти контактного метрического многообразия.

Отметим, что $\bar{C}^{ab}{}_c = C_{ab}{}^c$, $\bar{C}_{abc} = C^{abc}$, $\bar{C}_{ab} = C^{ab}$, $\bar{C}_a{}^b = C^a{}_b$, $\bar{D}_{ab} = D^{ab}$, $\bar{D}_a = D^a$.

3. Линейные расширения почти контактных метрических многообразий

Пусть M — $(2n+1)$-мерное почти контактное метрическое многообразие со структурой (Φ, ξ, η, g). Тогда [1] на декартовом произведении $M \times \mathbb{R}$ многообразия M и вещественной прямой $\mathbb{R}$ внутренним образом порождается почти эрмитова структура (J,h). Пусть ν — единичный вектор вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда компоненты тензорных полей J и h на пространстве расслоения реперов вида (m, e_i, ν), где $\{(m, e_i)\}$ — множество всех вещественных реперов многообразия M, будут задаваться следующими матрицами:

$$(J_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \Phi^i_j & \eta_j \\ -\xi^i & 0 \end{pmatrix}; \quad (h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $i,j = 1,\dots,2n+1$, $\alpha,\beta = 1,\dots,2n+2$. Если для многообразия M рассматривать подрасслоение A-реперов, то матрицы J и h на пространстве расслоения реперов вида $b_1 = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m, \nu)$ будут иметь вид [5]:

$$(J_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} iI_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iI_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Так как реперы b_1 не являются A-реперами для почти эрмитовой структуры (J,h), рассмотрим реперы $b_2 = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_{\hat{0}})$, где

$$\varepsilon_0 = \frac{\xi_m - i\nu}{\sqrt{2}}; \; \varepsilon_{\hat{0}} = \frac{\xi_m + i\nu}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

На пространстве расслоения реперов b_2 тензорные поля J и h принимают вид матриц (1), где вместо I_n стоит I_{n+1}.

Из вида матриц (7) следует, что

$$J(\xi) = \nu, \; J(\nu) = -\xi. \tag{9}$$

Согласно работе [5] компоненты структурного и виртуального тензоров почти эрмитовой структуры линейного расширения $M \times \mathbb{R}$ и компоненты структурных тензоров почти контактной метрической структуры многообразия M связаны следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
B^{ab}{}_c = C^{ab}{}_c; & B_{ab}{}^c = C_{ab}{}^c; \\
B^{ab}{}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(D^{ab} - C^{[ab]}); & B_{ab}{}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{ab} - C_{[ab]}); \\
B^{a0}{}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}C^a{}_b; & B_{a0}{}^b = \frac{1}{\sqrt{2}}C_a{}^b; \\
B^{a0}{}_0 = \frac{1}{2}D^a; & B_{a0}{}^0 = \frac{1}{2}D_a; \\
B^{abc} = C^{abc}; & B_{abc} = C_{abc}; \\
B^{ab0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}C^{ab}; & B_{ab0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}C_{ab}; \\
B^{0ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}D^{ab}; & B_{0ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}D_{ab}; \\
B^{00a} = -\frac{1}{4}D^a; & B_{00a} = -\frac{1}{4}D_a.
\end{array} \tag{10}$$

4. Преобразование почти эрмитовой структуры линейного расширения почти контактного метрического многообразия, индуцированное конформным преобразованием

Под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры $I = (\Phi, \xi, \eta, g)$ многообразия M мы будем понимать переход к почти контактной метрической структуре $II = (\Phi, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$, где

$$\tilde{\xi} = e^{-f}\xi; \; \tilde{\eta} = e^f \eta; \; \tilde{g} = e^{2f} g,$$

f — произвольная гладкая функция на многообразии M.

Для совместного изучения свойств исходного и полученного при преобразовании многообразий удобно задать его с помощью отображения пространств расслоения A-реперов [11]. Обозначим его ψ. Это отображение задается следующим образом:

$$(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m) \to (m, \tilde{\varepsilon}_a = e^{-f(m)}\varepsilon_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f(m)}\varepsilon_{\hat{a}}, \tilde{\xi}_m = e^{-f(m)}\xi_m),$$

где $m \in M$. Задание отображения ψ равносильно заданию перехода от структуры I к структуре II многообразия M.

Согласно результатам, полученным в работе [11] при конформном преобразовании почти контактной метрической структуры ее структурные тензоры связаны следующими соотношениями:

$$\begin{array}{ll}
(e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{ab}{}_c \circ \psi) = C^{ab}{}_c + \beta^a \delta^b_c - \beta^b \delta^a_c & \\
(e^f \circ \pi)(\tilde{C}_{ab}{}^c \circ \psi) = C_{ab}{}^c + \beta_a \delta^c_b - \beta_b \delta^c_a & \\
(e^f \circ \pi)(\tilde{D}^a \circ \psi) = D^a + \beta^a & (e^f \circ \pi)(\tilde{D}_a \circ \psi) = D_a + \beta_a \\
(e^f \circ \pi)(\tilde{D}^{ab} \circ \psi) = D^{ab} & (e^f \circ \pi)(\tilde{D}_{ab} \circ \psi) = D_{ab} \\
(e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{ab} \circ \psi) = C^{ab} & (e^f \circ \pi)(\tilde{C}_{ab} \circ \psi) = C_{ab} \\
(e^f \circ \pi)(\tilde{C}^a{}_b \circ \psi) = C^a{}_b - \check{\beta}_0 \delta^a_b & (e^f \circ \pi)(\tilde{C}_a{}^b \circ \psi) = C_a{}^b - \check{\beta}_0 \delta^b_a \\
(e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{abc} \circ \psi) = C^{abc} & (e^f \circ \pi)(\tilde{C}_{abc} \circ \psi) = C_{abc},
\end{array} \tag{11}$$

где система функций $\{\beta_a, \beta^a \equiv \beta_{\hat{a}}, \check{\beta}_0\}$ является компонентами 1-формы df на пространстве расслоения A-реперов, а π — проекция тотального пространства расслоения A-реперов на базу M, ставящая в соответствие каждому реперу его вершину.

Заметим, что $\check{\beta}_0 = df_m(\xi_m)$, а $df_m(\nu) = 0$, так как изначально функция f определена на многообразии M, а на многообразии $M \times \mathbb{R}$ определяется равенством $f(m, t) = f(m)$, $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$. Тогда на пространстве расслоения A-реперов b_2 над многообразием $M \times \mathbb{R}$ первые две группы компонент формы df будут такими же как и на многообразии M, то есть $\{\beta_a, \beta^a\}$, а две последние компоненты будут иметь вид

$$\beta_0 = df_m(\varepsilon_0) = \frac{\check{\beta}_0}{\sqrt{2}};\ \beta_{\hat{0}} \equiv \beta^0 = df_m(\varepsilon_{\hat{0}}) = \frac{\check{\beta}_0}{\sqrt{2}}. \tag{12}$$

В частности, из этого следует, что функции β_0 и β^0 являются вещественными.

Рассмотрим линейные расширения многообразия M с почти контактной метрической структурой I и многообразия M с почти контактной метрической структурой II. Тогда на каждом из них будет индуцирована почти эрмитова структура. Обозначим первую из них (J, h), а вторую $(\tilde{J}, \tilde{h})$. Переход от структуры (J, h) к структуре $(\tilde{J}, \tilde{h})$ на многообразии $M \times \mathbb{R}$ назовем *преобразованием, индуцированным конформным преобразованием многообразия* M (короче, *индуцированным преобразованием*). Это преобразование определяется отображением реперов вида b_1 почти эрмитовых многообразий $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ и $(M \times \mathbb{R}, \tilde{J}, \tilde{h})$ следующим образом

$$(p, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m, \nu) \to (p, \tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(m)\varepsilon_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{a}}, \tilde{\xi}_m = e^{-f}(m)\xi_m, \nu), \tag{13}$$

где $p \in M \times \mathbb{R}$. Обозначим это отображение также как отображение расслоений A-реперов для многообразия M, а именно, ψ.

Учитывая, что векторы ε_a и $\tilde{\varepsilon}_a$ являются собственными векторами операторов J_m и $\tilde{J}_m$ (а точнее, их комплексификаций) соответственно, отвечающих собственному значению i, а векторы $\varepsilon_{\hat{a}}$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}$ являются собственными векторами операторов J_m и $\tilde{J}_m$ (а точнее, их комплексификаций) соответственно, отвечающих собственному значению $-i$ из (13) получим

$$\tilde{J}_m(\tilde{\varepsilon}_a) = J(\varepsilon_a);\ \tilde{J}_m(\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}) = J(\varepsilon_{\hat{a}}). \tag{14}$$

Кроме того, из (9) следует, что

$$\tilde{J}(\tilde{\xi}) = J(\xi);\ \tilde{J}(\nu) = e^{-f} J(\nu). \tag{15}$$

Пусть X — произвольное векторное поле на $M \times \mathbb{R}$. Разложим вектор X_m по базису b_1. Тогда, используя (14) и (15), а также (9), получаем, что

$$\tilde{J}(X) = J(X) + (e^f - 1)h(X,\xi)\nu - (e^{-f} - 1)h(X,\nu)\xi. \tag{16}$$

Аналогичным образом, раскладывая векторы X_m и Y_m произвольных векторных полей по базису b_1 и используя (7) для h и $\tilde{h}$, получим

$$\tilde{h}(X,Y) = e^{2f} h(X,Y) + (1 - e^{2f})h(X,\nu)h(Y,\nu). \tag{17}$$

Итак, индуцированное преобразование на линейном расширении $M \times \mathbb{R}$ в инвариантном виде задается формулами (16) и (17).

Из (16) получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Индуцированное преобразование на $M \times \mathbb{R}$ будет конформным, то есть почти эрмитова структура (J,h) переходит в почти эрмитову структуру $(J, \tilde{h} = e^{2f}h)$ тогда и только тогда, когда f является тождественным нулем.*

Найдем связь между компонентами структурного и виртуального тензоров почти эрмитовых структур (J,h) и $(\tilde{J},\tilde{h})$ на линейном расширении $M \times \mathbb{R}$. Из (13) и (8) следует, что для A-реперов b_2 на $M \times \mathbb{R}$ определяется отображение

$$\Psi : (p, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{0}}) \to (p, \tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}, \tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}),$$

где $p = (m,t) \in M \times \mathbb{R}$, $\tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(m)\varepsilon_a$, $\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{a}}$,

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{(e^{-f}(m)+1)\varepsilon_0 + (e^{-f}(m)-1)\varepsilon_{\hat{0}}}{2};\ \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} = \frac{(e^{-f}(m)-1)\varepsilon_0 + (e^{-f}(m)+1)\varepsilon_{\hat{0}}}{2}.$$

Тогда, используя формулы (10), (11) и (12), получим

$$\begin{array}{ll}
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ab}{}_c\circ\Psi) = B^{ab}{}_c + \beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c; & \\
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c\circ\Psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a\delta^c_b - \beta_b\delta^c_a; & \\
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ab}{}_0\circ\Psi) = B^{ab}{}_0; & (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{ab}{}^0\circ\Psi) = B_{ab}{}^0; \\
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{a0}{}_b\circ\Psi) = B^{a0}{}_b - \beta_0\delta^a_b; & (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{a0}{}^b\circ\Psi) = B_{a0}{}^b - \beta^0\delta^b_a; \\
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{a0}{}_0\circ\Psi) = B^{a0}{}_0 + \frac{1}{2}\beta^a; & (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{a0}{}^0\circ\Psi) = B_{a0}{}^0 + \frac{1}{2}\beta_a; \\
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{abc}\circ\Psi) = B^{abc}; & (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{abc}\circ\Psi) = B_{abc}; \\
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ab0}\circ\Psi) = B^{ab0}; & (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{ab0}\circ\Psi) = B_{ab0}; \\
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{0bc}\circ\Psi) = B^{0bc}; & (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{0bc}\circ\Psi) = B_{0bc}; \\
(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{00c}\circ\Psi) = B^{00c} - \frac{1}{4}\beta^c; & (e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{00c}\circ\Psi) = B_{00c} - \frac{1}{4}\beta_c;
\end{array} \tag{18}$$

Используя определение формы Ли (4) и формулы (18), получим, что компоненты формы Ли ω преобразуются по формулам

$$(e^f\circ\pi)(\tilde{\alpha}^a\circ\Psi) = \alpha^a + \frac{2n-1}{n}\beta^a;\ (e^f\circ\pi)(\tilde{\alpha}_a\circ\Psi) = \alpha_a + \frac{2n-1}{n}\beta_a;$$
$$(e^f\circ\pi)(\tilde{\alpha}^0\circ\Psi) = \alpha^0 + 2\beta^0;\ (e^f\circ\pi)(\tilde{\alpha}_0\circ\Psi) = \alpha_0 + 2\beta_0.$$

5. Инвариантные классы относительно индуцированных преобразований

Найдем инвариантные классы относительно индуцированных преобразований в классификации (3).

Пусть индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ принимают значения от 0 до n. Выясним, будет ли инвариантным условие $\tilde{B}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0$ для линейного расширения $M \times \mathbb{R}$. Это условие представляет из себя три группы равенств $\tilde{B}_{[abc]} = 0$, $\tilde{B}_{[ab0]} = 0$ и $\tilde{B}_{[00a]} = 0$. Используя формулы (18), мы видим, что все три группы равенств остаются инвариантными. Следовательно, условие $\tilde{B}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0$ остается инвариантным при индуцированных преобразованиях.

Рассмотрим условие $\tilde{B}_{[\alpha\beta\gamma]} = \tilde{B}_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Из формул (18) следует, что группы равенств $\tilde{B}_{[abc]} = \tilde{B}_{abc}$ и $\tilde{B}_{[ab0]} = \tilde{B}_{ab0}$ остаются инвариантными, а группа равенств $\tilde{B}_{[00a]} = 0$ будет инвариантной только если $\beta_a = \beta^a = 0$. Это означает, что векторное поле $\beta^\sharp$ (а точнее, его комплексификация), двойственное 1-форме df, в каждой точке $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$ раскладывается только по векторам ε_0 и $\varepsilon_{\hat{0}}$. Тогда, используя (12) и (8), получим, что $\beta^\sharp_m = \check{\beta}_0 \xi_m$, то есть векторное поле $\beta^\sharp$ принадлежит распределению $\mathfrak{M}$ почти контактного метрического многообразия M, определяемого векторным полем ξ.

Рассмотрим условие $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\beta = 0$. Из формул (18) следует, что группа равенств $\tilde{B}^{a\beta}{}_\beta = 0$ инвариантна тогда и только тогда, когда $\beta_a = \beta^a = 0$. А группа равенств $B^{0\beta}{}_\beta = 0$ инвариантна тогда и только тогда, когда $\beta_0 = \beta^0 = 0$. Итак, условие $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\beta = 0$ является инвариантным тогда и только тогда, когда функция f является константой.

Рассмотрим условие $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\gamma = \xi^{[\alpha}\delta^{\beta]}_\gamma$. Из формул (18) следует, что группы равенств $\tilde{B}^{ab}{}_0 = \tilde{\alpha}^{[a}\delta^{b]}_0$ и $\tilde{B}^{0a}{}_b = \alpha^{[0}\delta^{a]}_b$ инвариантны. А группы равенств $\tilde{B}^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta^{b]}_c$ и $\tilde{B}^{a0}{}_0 = \alpha^{[a}\delta^{0]}_0$ инвариантны тогда и только тогда, когда $\beta_a = \beta^a = 0$. Итак, условие $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\gamma = \xi^{[\alpha}\delta^{\beta]}_\gamma$ является инвариантным тогда и только тогда векторное поле $\beta^\sharp$ принадлежит распределению $\mathfrak{M}$.

Из полученных результатов и классификации (3) получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Класс $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ инвариантен относительно индуцированных преобразований линейных расширений. Классы W_1, $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ инвариантны относительно индуцированных преобразований тогда и только тогда, когда векторное поле $\beta^\sharp$, двойственное 1-форме $\beta = df$, принадлежит распределению $\mathfrak{M}$ почти контактного метрического многообразия M, определяемого векторным полем ξ. Остальные классы классификации* (3) *инвариантны тогда и только тогда, когда функция f является константой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tashiro Y. On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds I // Tohôku Math. J. 1963. Vol. 15. P. 62-78.

2. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1979. Том 9. С. 1-246.

3. Chinea D., Gonzalez C. A Classification of Almost Contact Metric Manifolds // Annali di Matematica pure ed applicata. 1990. Vol. CLVI. P. 15-36.

4. Rodina E. V. On linear extensions of some almost contact manifolds // Webs and quasigroups. Tver State Univ. 1995, P. 106.

5. Родина Е. В. Линейные расширения почти контактных метрических многообразий: Дисс. …канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 1997. 98 с.

6. Игнаточкина Л. А. Многообразия Вайсмана–Грея с J-инвариантным тензором конформной кривизны // Матем. сб. 2003. Том 194, №2. С. 61-72.

7. Кириченко В. Ф., Ускорев И. В. Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур // Матем. заметки. 2008. Том 84, №6. С. 838-850.

8. Кириченко В. Ф., Ежова Н. А. Конформные инварианты многообразий Вайсмана–Грея // УМН. 1996. Том 51, №2. С. 163-164.

9. Ignatochkina L. A., Abood H. M. On Vaisman-Gray manifold with vanishing conharmonic curvature tensor// Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2017. Vol. 101, №10. p. 2271–2284.

10. Ignatochkina L. A., Morozov P. B. The transformations induced by conformal transformations on T^1- bundle // Journal of Basrah Researchers ((Sciences)). 2011. Vol. 37, №4C. p.8–15.

11. Игнаточкина Л. А. Обобщение преобразований, индуцированных на T1-расслоениях конформными преобразованиями их базы // Матем. сб. 2011. Том 202, №5. С. 45–62.

12. Игнаточкина Л. А. Локальное строение многообразий Вайсмана-Грея // Современная математика и ее приложения, Геометрия и анализ. 2015. Том 96, С. 70–80.

13. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса.: Печатный Дом, 2013. 458 с.

14. Gray A., Hervella L. M. The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants // Annali di Matematica pura ed applicata. 1980. Vol. CXXIII, №IV. P. 35-58.

15. Banaru M. A new characterization of the Gray-Hervella classes of almost Hermitian manifold // 8^{th} International conference on differential geometry and its applications. Opava-Czech Republic, 27-31 August 2001. p. 4.

REFERENCES

1. Tashiro, Y. 1963, "On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds I *Tohôku Math. J.*, vol. 15, pp. 62-78.

2. Evtushik, L. E., Lumiste, Ju. G., Ostianu, N. M. & Shirokov A. P. 1979, "Differential geometric structure on manifolds *Itogi nauki i techniki. Problemi geometrii.*, vol. 9, pp. 1-246.

3. Chinea, D.& Gonzalez, C. 1990, "A Classification of Almost Contact Metric Manifolds *Annali di Matematica pure ed applicata.*, vol. CLVI, pp. 15-36.

4. Rodina, E. V. 1995, "On linear extensions of some almost contact manifolds *Webs and quasigroups. Tver State Univ.*, pp. 106.

5. Rodina, E. V. 1997, "Linear extensions of almost contact metric manifolds Diss. …kand. fis.-mat. nauk., M.: MPGU, 98 p.

6. Ignatochkina, L. A. 2003, "Vaisman–Gray manifolds with J-invariant conformal curvature tensor *Sb. Math.*, vol. 194, no. 2, pp. 225–235.

7. Kirichenko, V. F. & Uskorev, I. V. 2008, "Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures *Mathematical Notes*, vol. 84, no. 6, pp. 783–794.

8. Kirichenko, V. F. & Ezhova N. A. 1996, "Conformal invariants of Vaisman-Gray manifolds *Russian Mathematical Surveys*, vol. 51, no. 2, p. 331.

9. Ignatochkina, L. A. & Abood, H. M., 2017 "On Vaisman-Gray manifold with vanishing conharmonic curvature tensor *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, vol. 101, no. 10, pp. 2271–2284.

10. Ignatochkina, L. A. & Morozov, P. B., 2011 "The transformations induced by conformal transformations on T^1- bundle *Journal of Basrah Researchers ((Sciences))*, vol. 37, no. 4C, pp. 8–15.

11. Ignatochkina, L. A. 2011, "Generalization for transformations of T^1-bundle which induced by conformal transformations of their base *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 665–682.

12. Ignatochkina, L. A. 2016 "Local Structure of Vaisman–Gray Manifolds *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 217, no. 5, pp. 595–606.

13. Kirichenko, V. F. 2013, "Differential geometric structure on manifolds 2, Pechatny Dom, Odessa, 458 p.

14. Gray, A.& Hervella, L. M. 1980, "The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants *Annali di Matematica pura ed applicata*, vol. CXXIII, no. IV. pp. 35-58.

15. Banaru, M. 2001, "A new characterization of the Gray-Hervella classes of almost Hermitian manifold 8^{th}International conference on differential geometry and its applications, Opava-Czech Republic, p. 4.

Московский педагогический государственный университет
Получено 22.03.2017 г.
Принято в печать 14.06.2017 г.