

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК Том 18 Выпуск 2

УДК 519.21

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-129-143

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В GEOGEBRA

А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский (Тула)

Аннотация

В статье дается обзор средств системы *GeoGebra*, предназначенных для выполнения различных преобразований объектов на плоскости встроенными инструментами и командами [5, 6]. Преобразования, которые могут быть реализованы как инструментами, так и командами – это зеркальное отражение объекта относительно прямой (осевая симметрия), отражение объекта относительно точки (центральная симметрия), инверсия относительно окружности, поворот вокруг точки, параллельный перенос по вектору, гомотетия относительно точки. Кроме того, командами *Shear* и *Stretch*, не имеющими инструментальных аналогов, можно совершать разнообразные сдвиги объектов вдоль и поперек направлений.

Ключевые слова: *GeoGebra*, отражение, инверсия, поворот, параллельный перенос, гомотетия, сдвиги.

Библиография: 12 названий.

THE TRANSFORMATION OF OBJECTS IN GEOGEBRA

Esayan A. R., Dobrovolsky N. N. (Tula)

Abstract

The article provides an overview of the system *GeoGebra* is designed to perform various transformations of objects on the plane using built-in tools and commands. Transformations that can be implemented with tools and commands – a mirror image of the object relative to the direct (axial symmetry), reflection of an object about a point (central symmetry), inversion relative to the circle, rotate around a point, parallel to the migration on a vector, homothety relative to the point. In addition, with commands, *Shear* and *Stretch*, not having tools analogues, you can make variety shifts of objects along and across of directions.

Keywords: *GeoGebra*, reflection, inversion, rotation, translation, homothety, shifts.

Bibliography: 12 titles.

1. Введение

Система *GeoGebra* относится к системам динамической геометрии с новыми возможностями обучения на основе визуализации объектов и создании динамических моделей, позволяющие называть ее виртуальной математической лабораторией. *GeoGebra* позволяет создавать как статические чертежи, так и сложные модели, строить графики функций, решать некоторые математические задачи как численно, так и символично. Так же систему можно использовать для компьютерных экспериментов.

В работе [3] подробно рассматриваются возможности системы *GeoGebra* для построения моделей при решении различных задач – геометрии, дискретной математики с использованием различных средств. В статье [6] более углубленно изучается вопрос использования системы для компьютерных доказательств теорем. В статье [5] рассматриваются вопросы проверки гипотез с использованием *GeoGebra*.

В данной работе рассматриваются вопросы использования инструментов системы для решения задач планиметрии.

2. Отражение относительно прямой

Инструмент “ *Отражение относительно прямой*” используется для построения объекта B , являющегося зеркальным отражением объекта A относительно некоторой прямой m . Запускается процесс создания B щелчком сначала по объекту A , а затем по прямой m . При отражении относительно прямой по каждой точке $P \in A$ формируется точка $Q \in B$ такая, что, во-первых, Q расположена на перпендикулярной прямой, опущенной из P на m , во-вторых, P и Q находятся на одинаковом расстоянии от m и, в-третьих, $Q=P$ тогда и только тогда, когда P лежит на m . Специфично работает рассматриваемый инструмент только с объектами-векторами, а именно, вектор сначала отражается относительно прямой, но затем результат параллельно переносится в начало исходного вектора. В качестве A могут выступать практически любые объекты, m может быть не только прямой, но и лучом или отрезком.

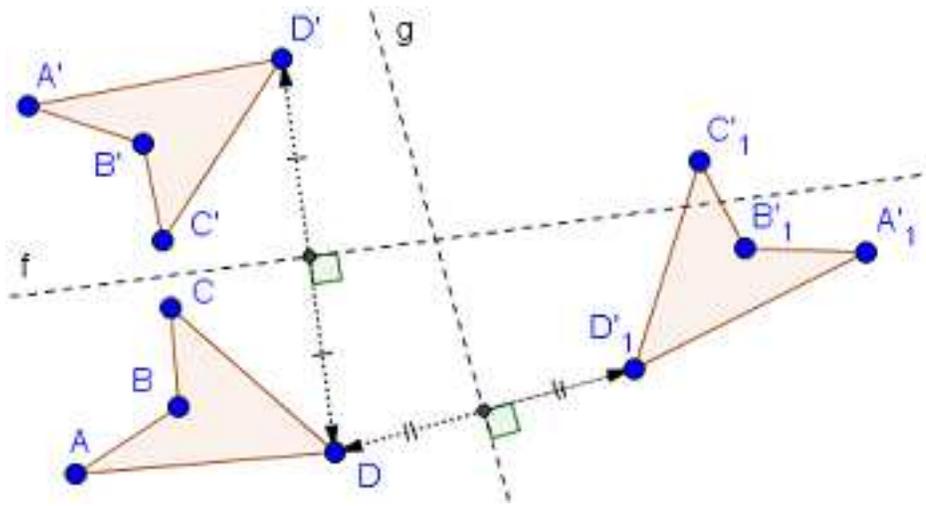


Рис. 14: Отражение четырехугольника $ABCD$ относительно прямых f и g

Рассмотренное преобразование A в B обладает симметрией, в том смысле, что оно переводит B в A . Поэтому его называют также осевой симметрией, а прямую m – осью симметрии.

На рис. 1 показано отражение четырехугольника $ABCD$ относительно прямых f и g . Отдельно выделено отражение вершины D от этих же прямых.

В общем случае отражение точки $P(x,y)$ в точку Q относительно прямой, заданной уравнением $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, аналитически описывается так:

$$P(x, y) \rightarrow Q \left(x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}, y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \right).$$

A. Reflect[*obj*, *line*]

Отражение относительно прямой

A) По команде A реализуется отражение объекта obj относительно прямой $line$.

3. Отражение относительно точки

Инструмент “ *Отражение относительно точки*” используется для построения объекта B , являющегося отражением объекта A относительно некоторой точки O . Запускается процесс создания B щелчком сначала по объекту A , а затем по точке O . В качестве A могут выступать практически любые объекты. При отражении относительно точки O по каждой точке $P \in A$ формируется точка $Q \in B$ такая, что, во-первых Q расположена на прямой PO , во-вторых, P и Q находятся на одинаковом расстоянии от O и, в-третьих, $Q=P$ тогда и только тогда, когда

$P=O$. Специфично работает рассматриваемый инструмент только с объектами-векторами, а именно, вектор сначала отражается относительно точки P , но затем результат параллельно переносится в начало исходного вектора. Таким образом A и B оказываются исходящими из одной точки, но противоположно направленными.

Рассмотренное преобразование A в B обладает симметрией, в том смысле, что оно же преобразует и B в A . Точку O называют центром симметрии. То есть фактически инструмент “ Отражение относительно точки” реализует преобразование, называемое в геометрии центральной симметрией. Заметим, что центральная симметрия является частным случаем преобразования поворота, то есть это поворот относительно центра O на 180° .

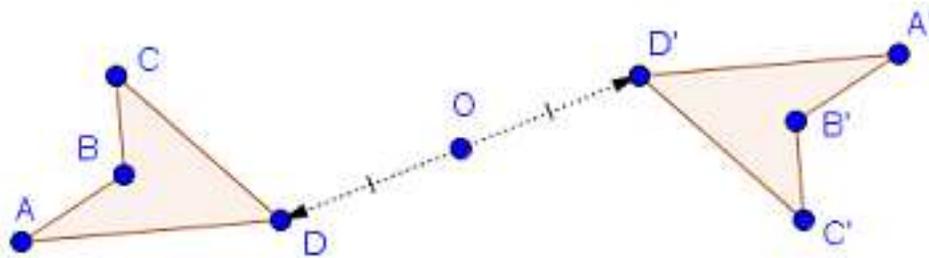


Рис. 15: Отражение четырехугольника $ABCD$ относительно прямых f и g

На рис. 2 показано отражение четырехугольника $ABCD$ относительно точки O . Отдельно выделено отражение вершины D относительно O .

В общем случае отражение точки $P(x, y)$ в точку Q относительно точки $O=(x_0, y_0)$ аналитически описывается так:

$$P(x, y) \rightarrow Q(2x_0 - x, 2y_0 - y).$$

`A. Reflect[obj, point]`

Отражение относительно точки

А) По команде `A` реализуется отражение объекта `obj` относительно точки `point`.

4. Отражение относительно окружности

Инструмент “ Отражение относительно окружности” используется для построения по данному объекту A так называемого инверсного ему объекта B по отношению к некоторой фиксированной окружности. При этом говорят, что объекта B получен из объекта A преобразованием инверсии относительно этой окружности. Реализуется преобразование при щелчке сначала по объекту A , а затем по окружности. Пусть C окружность с центром в точке O радиуса R . При инверсии A в B относительно C каждая точка $P \in A$ ($P \neq O$) преобразуется в точку $Q \in B$ следующим образом. Во-первых, Q лежит на прямой PO и, во-вторых, выполняется соотношение $PO \cdot QO = R^2$. При $P=O$ считается, что Q – бесконечно удаленная точка. Точку O называют полюсом или центром инверсии. Если точка Q инверсная для P , то P инверсная для Q . Точки, инверсные друг другу называют взаимно обратными точками.

Преобразование инверсии обладает такими свойствами:

- внутренние точки для инверсной окружности при инверсии переходят во внешние точки для этой окружности и наоборот;
- прямая, проходящая через полюс, при преобразовании инверсии переходит сама в себя;

- прямая, не проходящая через полюс, при преобразовании инверсии переходит в окружность, проходящую через полюс;
- окружность, проходящая через полюс, при преобразовании инверсии переходит в прямую, не проходящую через полюс;
- окружность, не проходящая через полюс, при преобразовании инверсии переходит в окружность, не проходящую через полюс;
- инверсия является конформным отображением, то есть сохраняет углы между кривыми.

Покажем, как по точке P без использования инструмента “” построить инверсную ей точку Q относительно заданной окружности с центром в точке O и радиуса R . Рассмотрим возможные случаи.

1) $PO > R$, то есть точка P находится вне инверсной окружности. Проведем отрезок PO и из P касательную к окружности (см. рис. 3). Из точки касания D опустим перпендикуляр на OP и пусть Q – точка пересечения этого перпендикуляра и OP . Тогда Q и является инверсной для P точкой, что вытекает из следующей цепочки отношений:

$$\triangle OQD \sim \triangle ODP \Rightarrow \frac{OQ}{R} = \frac{R}{OP} \Rightarrow OP \cdot OQ = R^2.$$

2) $PO < R$, то есть P находится внутри инверсной окружности. Через точки O и P проведем прямую и из точки P восстановим к ней перпендикуляр. В точке D – пересечения этого перпендикуляра с инверсной окружностью проведем к ней касательную. Тогда точка Q – пересечения касательной с продолжением OP и является инверсной для P точкой.

3) $PO = R$, то есть P находится на инверсной окружности. Тогда $Q = P$.

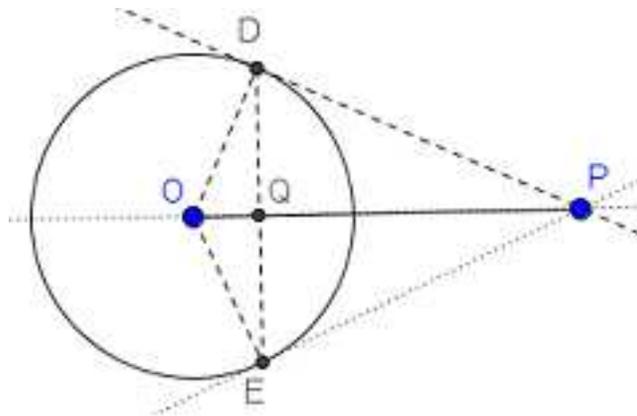


Рис. 16: Построение инверсной для P точки Q

Здесь демонстрируется пример формирования инверсий некоторых объектов относительно окружностей. Все инверсии построены инструментом “ Отражение относительно окружности”. На рис. 4 кардиоиды сформированы как инверсия параболы, созданной по фокусу F и директрисе d . На рис. 5 приведены примеры инверсии квадрата. На рис. 6 представлена инверсия графика функции $\sin(x)$.

В общем случае инверсия относительно окружности с центром в точке $O = (x_0, y_0)$ и радиусом R аналитически описывается так:

$$P(x, y) \rightarrow Q \left(x_0 + \frac{R^2(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, y_0 + \frac{R^2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right).$$

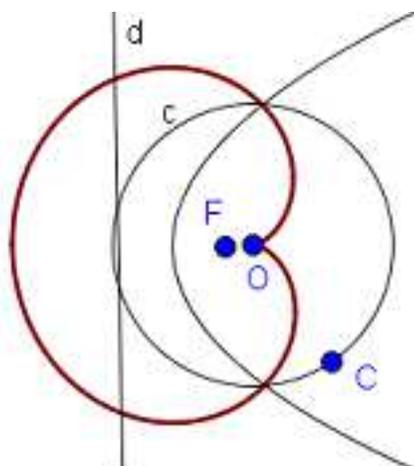


Рис. 17: Кардиоиды – инверсия параболы относительно окружности

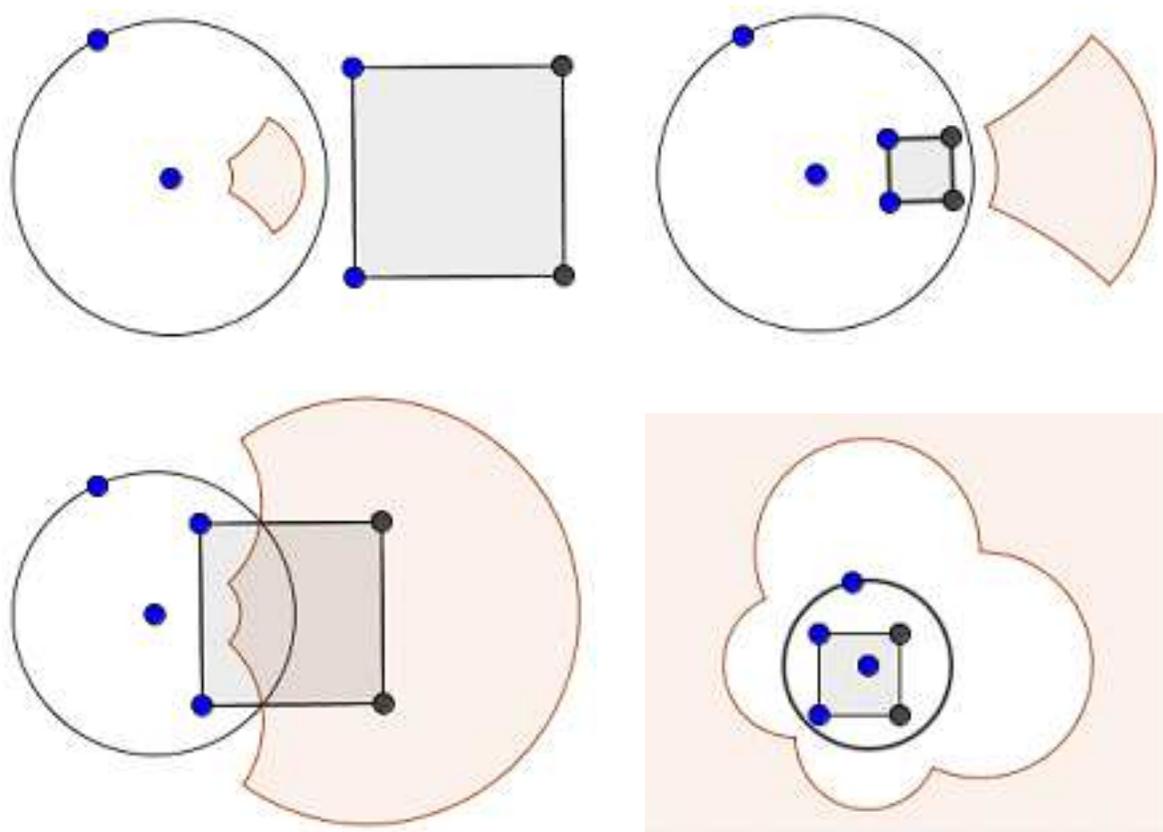


Рис. 18: Примеры инверсии квадрата относительно заданной окружности

Инверсия относительно окружности

А) По команде *A* реализуется инверсия объекта *obj* относительно окружности *circle*.

5. Поворот вокруг точки

Инструмент “ Поворот вокруг точки” используется для построения копии объекта, повернутого вокруг некоторой точки на заданный угол. При этом указанные точку и угол

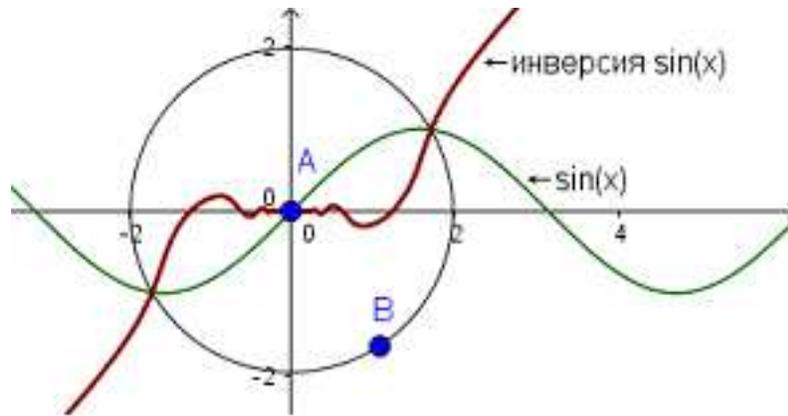


Рис. 19: Инверсия графика функции $\sin(x)$ относительно окружности

называют соответственно центром поворота и углом поворота. При выполнении операции сначала надо щелкнуть левой кнопкой мыши по объекту, затем по центру поворота, и, наконец, ввести в поле ввода появившейся панели требуемый угол поворота. По умолчанию поворот реализуется против часовой стрелки, хотя прямо при задании угла радиокнопкой можно переключиться на поворот по часовой стрелке. При угле поворота, равном 180° , преобразование поворота превращается в центральную симметрию.

На рис. 7 показан поворот четырехугольника $ABCD$ относительно точки O на угол α . Отдельно выделен поворот вершины D .

В общем случае поворот точки $P(x, y)$ вокруг точки $O=(x_0, y_0)$ на угол α аналитически описывается так:

$$P(x, y) \rightarrow Q((x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha + x_0, (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha + y_0).$$

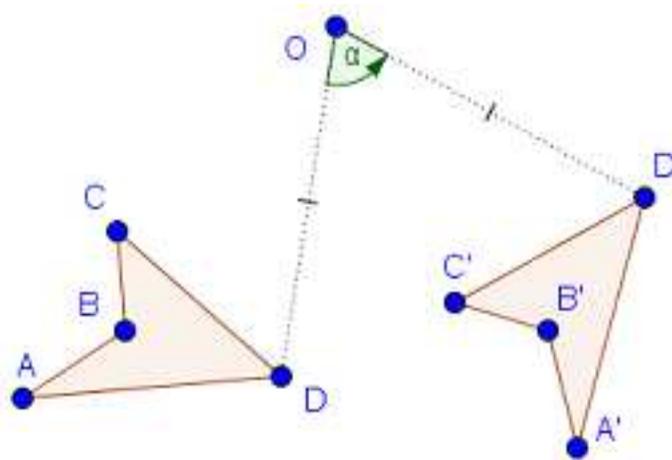


Рис. 20: Поворот четырехугольника $ABCD$ относительно точки O на угол α

A. $Rotate[obj, \alpha]$ B. $Rotate[obj, \alpha, O]$

Поворот (вращение) объекта

A) По команде A реализуется поворот объекта obj относительно начала координат на угол α .

B) По команде B реализуется поворот объекта obj относительно точки O на угол α .

6. Параллельный перенос по вектору

Инструмент “ *Параллельный перенос по вектору*” используется для построения копии объекта путем его параллельного переноса на данный вектор, то есть на заданную величину по заданному направлению. При выполнении операции сначала надо щелкнуть левой кнопкой мыши по объекту, а затем по вектору, на которой будет осуществлен параллельный перенос. Возможен и другой вариант выполнения операции – как и ранее сначала щелкнуть левой кнопкой мыши по объекту, затем по точке или позиции и, наконец, снова по точке или позиции. При щелчках по позициям на их месте появляются точки. Между двумя точками появляется новый вектор с началом в первой точке и концом во второй точке. Этот вектор и используется для параллельного переноса исходного объекта.

На рис. 8 показан перенос четырехугольника $ABCD$ по векторам \vec{IJ} и \vec{KL} . Отдельно выделен перенос по этим векторам вершины D .

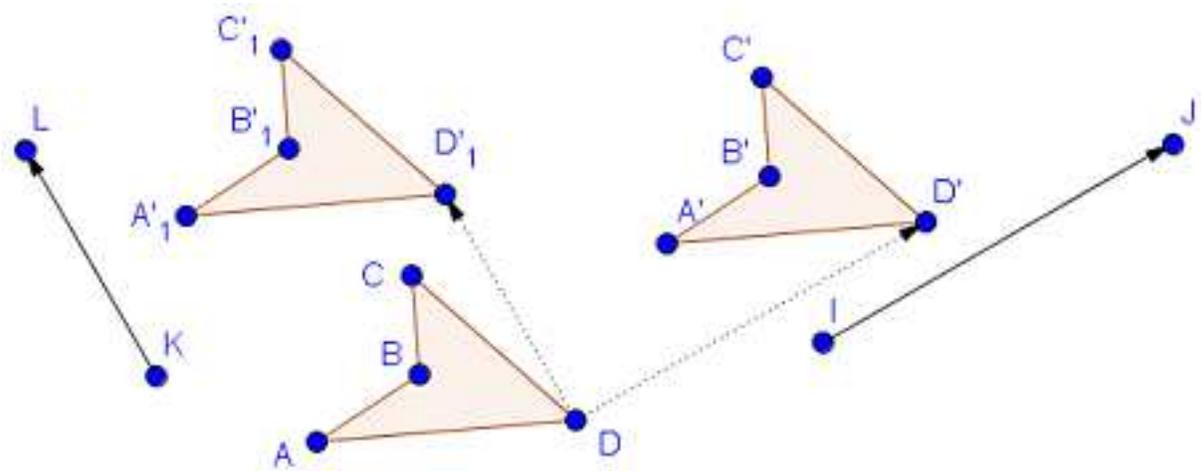


Рис. 21: Параллельный перенос четырехугольника $ABCD$ по векторам \vec{IJ} и \vec{KL}

В общем случае параллельный перенос точки $P(x, y)$ в точку Q по заданному вектору v аналитически описывается так: $\vec{PQ} = v$. Если у вектора v начальная и конечная точки – $I(x_1, y_1)$ и $J(x_2, y_2)$, то это означает, что:

$$P(x, y) \rightarrow Q(x + x_2 - x_1, y + y_2 - y_1).$$

- | |
|--------------------------------|
| A. <i>Translate</i> [obj, vec] |
| B. <i>Translate</i> [vec, P] |

Параллельный перенос по вектору

- A) По команде A реализуется параллельный перенос объекта *obj* по вектору *vec*.
- B) По команде B реализуется параллельный перенос вектора *vec* в точку P , то есть начало *vec* совмещается с P .

7. Гомотетия относительно точки

Инструмент “ *Гомотетия относительно точки*” используется для построения по некоторому объекту A подобного ему объекта B с заданным коэффициентом подобия с размещением его в определенной позиции относительно указанной точки (центра) F . При выполнении операции сначала надо щелкнуть левой кнопкой мыши по объекту, а затем по точке или позиции, и, наконец, ввести в поле ввода появившейся панели коэффициент подобия. Если щелчок

производился по позиции, то на этом месте появляется точка. Если O – начало координат, то гомотетия с центром F и коэффициентом подобия k преобразует точки $P \in A$ в точки $Q \in B$ так, что $\vec{OQ} = k \cdot \vec{OP} - \vec{OF}$ ($k \neq 0$). Заметим, что $|k|$ влияет только на размер полученного объекта; знак k , позиции центра и исходного объекта – на позицию полученного объекта. Гомотетия с $k=-1$ является центральной симметрией. На рис. 9 приведен пример гомотетии с коэффициентом 2 и центром F .

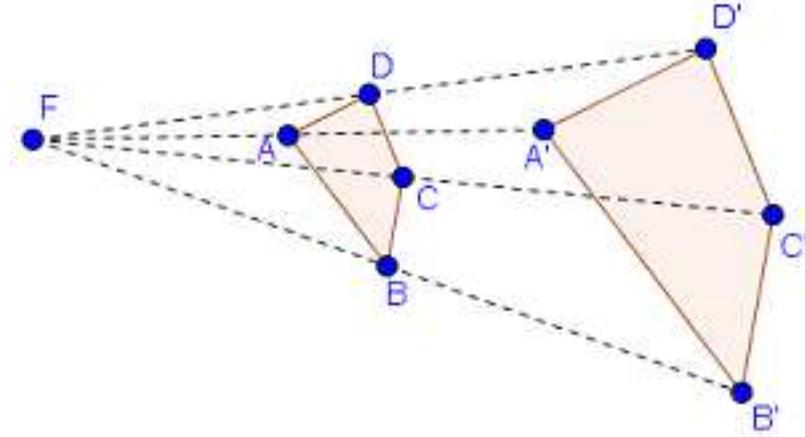


Рис. 22: Гомотетия четырехугольника с коэффициентом 2 и центром F

В общем случае гомотетия с центром в точке $F(x_0, y_0)$ и коэффициентом подобия k переводит точку $P(x, y)$ в точку Q так:

$$P(x, y) \rightarrow Q(k \cdot x - x_0, k \cdot y - y_0).$$

A. <code>Dilate[obj, k]</code> B. <code>Dilate[obj, k, P]</code>

Гомотетия относительно точки

A) По команде A реализуется гомотетия объекта *obj* с коэффициентом подобия k относительно начала координат.

B) По команде B реализуется гомотетия объекта *obj* с коэффициентом подобия k относительно точки P .

8. Сдвиги вдоль и поперек направления

Командами *Shear* и *Stretch* можно совершать разнообразные сдвиги объектов вдоль и поперек направлений. Аналоги соответствующих встроенных инструментов для этих команд отсутствуют.

A. <code>Shear[obj, line, k]</code> B. <code>Stretch[obj, line, k]</code> C. <code>Stretch[obj, vec]</code>

Сдвиги вдоль и поперек направления

Здесь рассматриваются команды сдвигов объектов вдоль линии, поперек линии и по заданному вектору.

A) Команда A реализует преобразование сдвига (*скоса*) объекта *obj* вдоль прямой *line* с коэффициентом k ($k \neq 0$). Знак k задает направление перемещения. Выполняется данная операция следующим образом. Все точки $P \in obj$, расположенные на прямой *line*, остаются без изменений. Каждая точка $P \in obj$, не лежащая на прямой *line*, сдвигается параллельно *line* на

величину пропорциональную расстоянию от P до $line$ с коэффициентом пропорциональности k . Сдвиги в разных полуплоскостях от $line$ происходят в противоположных направлениях. Фактически сдвигается копия объекта obj , а сам объект остается без изменений. Отметим, что при сдвигах типа $shear$ площади объектов не изменяются.

В общем случае понять, как вдоль прямой m с коэффициентом k выполняется сдвиг некоторой точки $P(x_0, y_0)$ в точку $Q(x_1, y_1)$, можно из рис. 11. На нем демонстрируется не только преобразование $shear$ конкретной точки $P \rightarrow Q$, но и для двух возможных вариантов расположения прямой m показаны все случаи направлений перемещения точки при различных знаках k .

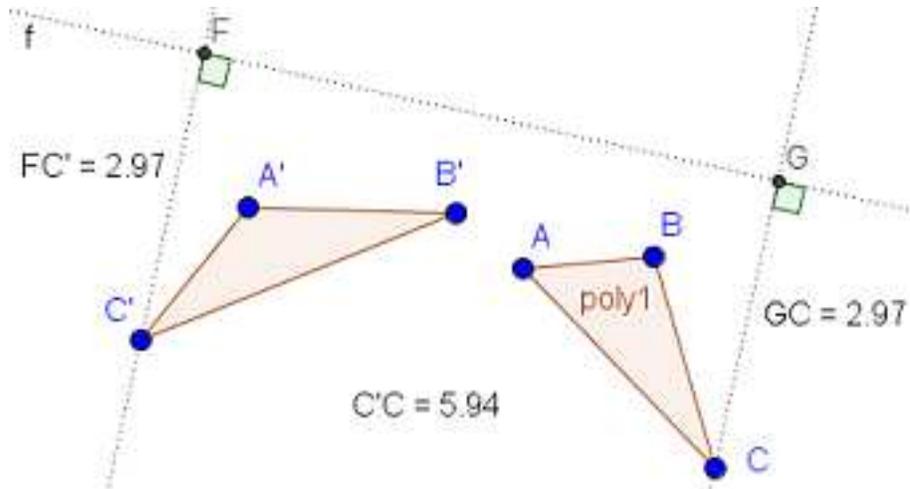


Рис. 23: Сдвиг $\triangle ABC$ вдоль линии f с коэффициентом 2

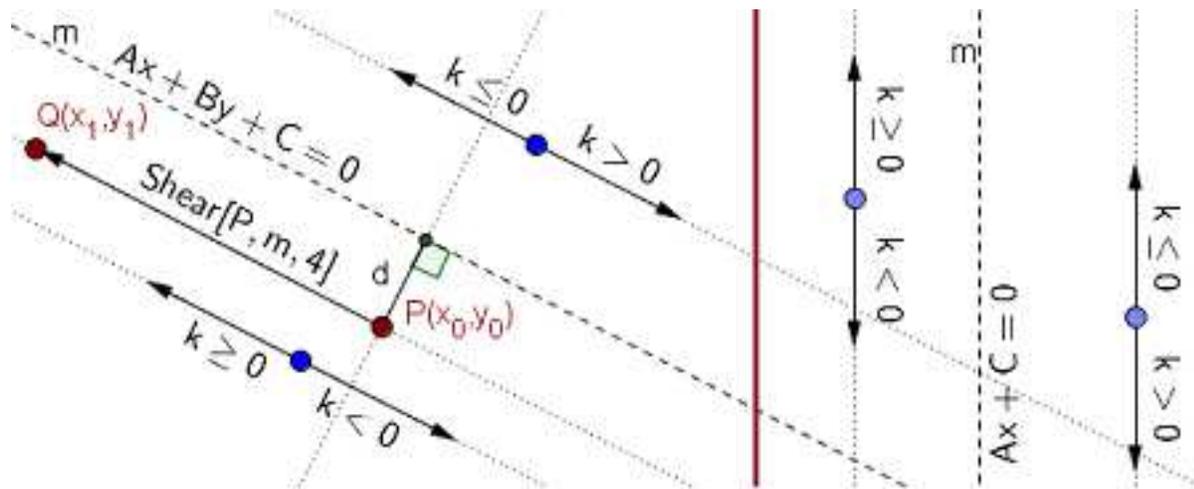


Рис. 24: Сдвиг конкретной точки $P(x_0, y_0) \rightarrow Q(x_1, y_1)$ вдоль прямой m и влияние знака k на направление сдвига

Покажем, что при сдвиге $P(x_0, y_0) \rightarrow Q(x_1, y_1)$ вдоль прямой m ($Ax + By + C = 0$) с коэффициентом k координаты x_1 и y_1 точки Q можно определять по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t \cdot B \\ y_1 = y_0 - t \cdot A \end{cases}, \quad 345 \quad t = \frac{k \cdot (Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}. \quad (1)$$

Рассмотрим общий случай, когда $B \neq 0$, то есть m не перпендикулярна оси абсцисс. Из того,

что длина отрезка PQ равна $|k| \cdot d$ и точка Q лежит на прямой, параллельной m , получаем:

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = k^2 d^2, \\ y_1 - y_0 = -\frac{A}{B}(x_1 - x_0). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно x_1 и y_1 получим

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \pm t \cdot B \\ y_1 = y_0 \mp t \cdot A \end{cases}, \quad 345 \quad t = \frac{k \cdot (Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}, \quad (2)$$

что соответствует заданию двух возможных направлений на прямой m и, следовательно, двум возможным вариантам реализации *Shear*. В *GeoGebra* осуществлена реализация (1).

Остается рассмотреть случай $B=0$. Поскольку при $B=0$ прямая m перпендикулярна оси абсцисс, то:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \pm kd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \pm k(x_0 - (-\frac{C}{A})) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \pm k(x_0 + \frac{C}{A}) \end{cases}.$$

Таким образом снова получены соотношения (2), но при $B=0$. Как и при $B \neq 0$ в данном случае из двух возможностей вычисления y_1 в *Geogebra* реализован вариант со знаком “-” после y_0 и, тем самым, формулы (1) установлены.

B) Команда *B* реализует преобразование сдвига (*stretch*) объекта *obj* поперек прямой *line* с коэффициентом k ($k \neq 0$). Знак k задает направление перемещения, при этом объекты с k и $-k$ являются зеркальным отражением друг относительно *line*. Выполняется данная операция следующим образом. Все точки $P \in obj$, расположенные на прямой *line*, остаются без изменений. Каждая точка $P \in obj$, не лежащая на прямой *line*, сдвигается перпендикулярно *line* на величину пропорциональную расстоянию от P до *line* с коэффициентом пропорциональности k . Сдвиги в разных полуплоскостях от *line* происходят в противоположных направлениях. Фактически сдвигается копия объекта *obj*, а сам объект остается без изменений.

На рис. 12 показаны сдвиги ΔABC (*poly1*) и ΔFGH (*poly2*) поперек линии f с коэффициентом 2, осуществленные соответственно командами *Stretch[poly1, f, 2]* и *Stretch[poly2, f, 2]*. На изображении можно видеть пояснения к тому, как осуществлен сдвиг конкретной точки C ($C \rightarrow Ct$).

Покажем, что при сдвиге $P(x_0, y_0) \rightarrow Q(x_1, y_1)$ поперек прямой m ($Ax + By + C = 0$) с коэффициентом k координаты x_1 и y_1 точки Q можно определять по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t \cdot A \\ y_1 = y_0 + t \cdot B \end{cases}, \quad 345 \quad t = \frac{(k-1) \cdot (Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}. \quad (3)$$

Рассмотрим общий случай, когда $A \neq 0$, то есть m не параллельна оси абсцисс. Из того, что длина отрезка PQ равна $|k-1| \cdot d$ и точка Q лежит на прямой, перпендикулярной m , получаем:

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = (k-1)^2 d^2, \\ y_1 - y_0 = \frac{B}{A}(x_1 - x_0). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно x_1 и y_1 получим

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \pm t \cdot A \\ y_1 = y_0 \pm t \cdot B \end{cases}, \quad 345 \quad t = \frac{(k-1) \cdot (Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}, \quad (4)$$

что соответствует заданию двух возможных направлений на прямой m и, следовательно, двум возможным вариантам реализации *Stretch*. В *GeoGebra* осуществлена реализация (3).

Остается рассмотреть случай $A=0$. Поскольку при $A=0$ прямая m параллельна оси абсцисс, то:

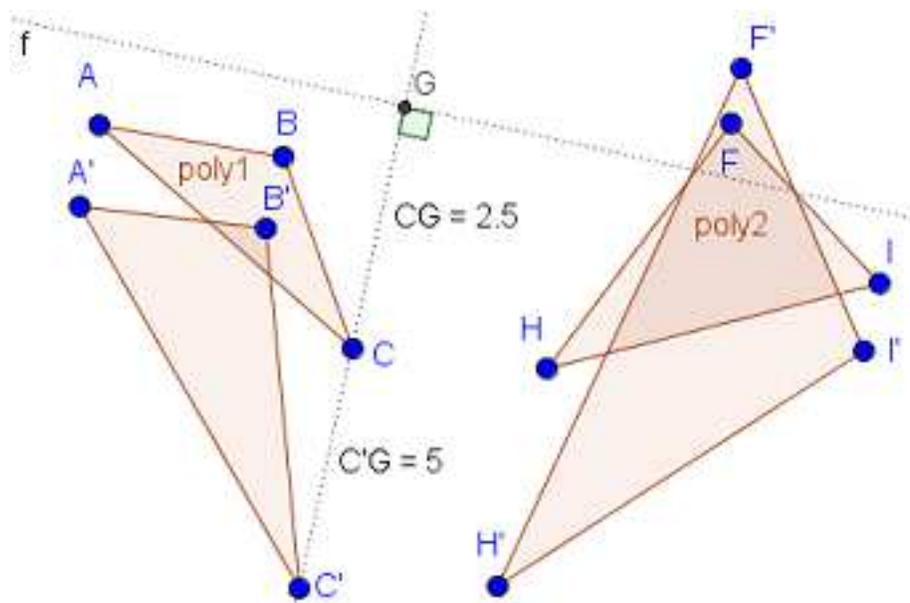


Рис. 25: Сдвиг $\triangle ABC$ и $\triangle F'IH'$ перпендикулярно линии f с коэффициентом 2

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + (k - 1)d \\ y_1 = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 \pm (k - 1) \left(x_0 + \frac{C}{B}\right) \\ y_1 = y_0 \end{cases} .$$

Таким образом снова получены соотношения (3), но при $A=0$. Как и при $A \neq 0$ в данном случае из двух возможностей вычисления x_1 в *GeoGebra* реализован вариант со знаком “+” после x_0 и, тем самым, формулы (3) установлены.

Для большей убедительности проделанных выкладок, создадим динамическую модель для экспериментальной проверки справедливости формул (3). Сделать это можно следующей последовательностью действий:

1. инструментом “ *Прямая*” проведем прямую через две точки и через контекстное меню изменим ее имя на m , а имена точек – на R и S соответственно. Пока будем считать, что прямая m не перпендикулярна оси абсцисс;
2. через строку ввода определим коэффициенты прямой m , введя три соотношения $A=x[m]$, $B=y[m]$, $C=z[m]$. Определим также переменную $k=0.4$ и, включив на панели “*Объекты*” соответствующую радиокнопку, превратим ее в бегунок;
3. инструментом “ *Точка*” сформируем точку D вне m . Переименуем D на P и через панель “*Настройки*” зададим для нее заголовок $P(x_0, y_0)$ ($P(x_0, y_0)$), а также установим вывод заголовка вместо P ;
4. инструментом “ *Перпендикулярная прямая*” проведем прямую, перпендикулярную m и проходящую через точку P ;
5. инструментом “ *Пересечение*” сформируем точку D пересечения m и проведенного перпендикуляра;
6. через строку ввода вычислим вспомогательную переменную t и по ней точку Q :

$$t = (k-1) * (A * x[P] + B * y[P] + C) / (A^2 + B^2);$$

$$Q = (x[P] + t * A, y[P] + t * B).$$

Через панель “*Настройки*” для точки Q сформируем заголовок $Q(x_1, y_1)$ ($Q(x_1, y_1)$) и установим его вывод вместо имени Q ;

1. инструментом “ Текст” в *LaTeX*-режиме создадим проверочную надпись, введя выражение:

$$t = \frac{(k-1)(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2} = \frac{(k-1)(A \cdot x(P) + B \cdot y(P) + C)}{A^2 + B^2},$$

$$x_1 = x_0 + t \cdot A \rightarrow x[Q] = x[P] + t \cdot A,$$

$$y_1 = y_0 + t \cdot B \rightarrow y[Q] = y[P] + t \cdot B.$$

Первая строка проверочной надписи является информационной и демонстрирует, не только значение t , но и по какой формуле проводятся вычисления. Правые части двух следующих строк вычисляются заново при изменении значений бегунка, перемещении свободных точек R и S по полотну, а также точки P по прямой, перпендикулярной m . Однако во всех ситуациях мы получаем одно и то же значения *true*, что и является экспериментальным подтверждением справедливости формул (3).

Построенная модель для поведения экспериментов, представлена на рис. 61. Несмотря на то, что создавалась модель для случая, когда m не перпендикулярна оси абсцисс, ее можно использовать и для этого случая. На рис. 14 показан сдвиг по вектору u $\triangle CDE$ (*poly1*).

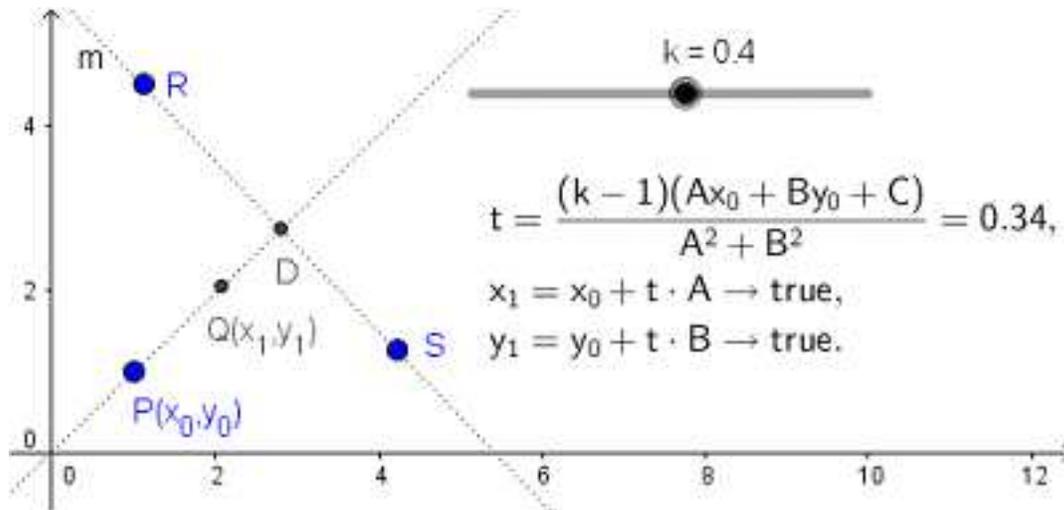


Рис. 26: Динамическая модель для экспериментальной проверки формул (3)

C) Команда C реализует преобразование сдвига (*stretch*) объекта obj параллельно ненулевому вектору vec . Это означает следующее. Сдвиг происходит с коэффициентом k , равным длине вектора vec , поперек прямой f , перпендикулярной вектору vec и проходящей через его начало. То есть, команда C выполняется точно так же, как и команда $Stretch[obj, f, Length[vec]]$.

На рис. 15 показаны сдвиги изображения смайлика с именем $pic1$, осуществленные командами: $Shear[pic1, f, 1.5]$ – поперек линии f с коэффициентом 3.5, $Stretch[pic1, f, 3.5]$ – вдоль линии f с коэффициентом 3.5 и $Stretch[pic1, u]$ – параллельно вектору u . В последнем случае команды $Stretch[pic1, u]$ и $Stretch[pic1, f, Length[u]]$ равносильны, где f – прямая, перпендикулярная вектору u и проходящая через его начало. Предварительно изображение смайлика было загружено на полотно из заранее подготовленного файла $smi.png$ с помощью инструмента “ Изображение”.

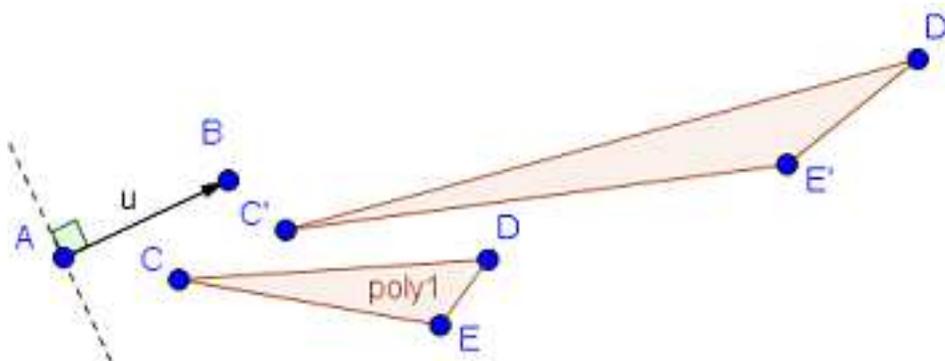


Рис. 27: Сдвиг $\triangle CDE$ параллельно вектору u

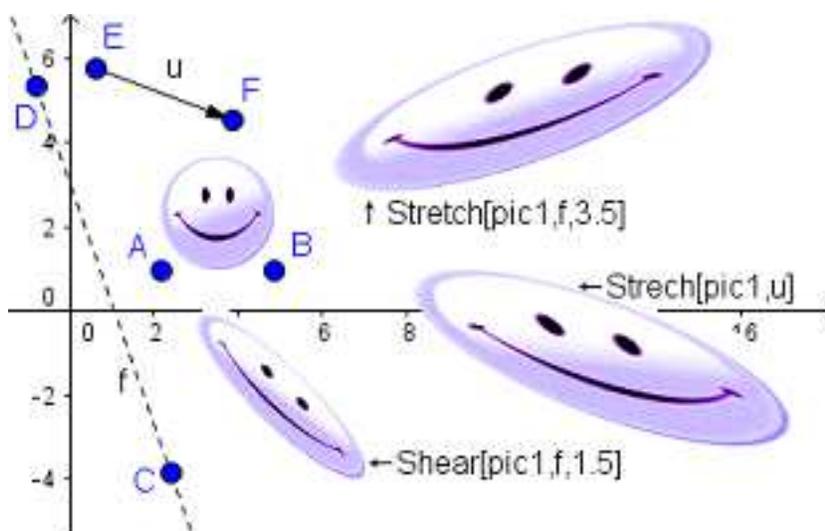


Рис. 28: Сдвиг изображения поперек линии f с коэффициентом 3.5 (*Stretch*), вдоль линии f с коэффициентом 1.5 (*Shear*) и по вектору u (*Stretch*)

9. Заключение

Обсуждаемые в статье встроенные средства системы *GeoGebra*, связанные с выполнением различных преобразований объектов на плоскости, легко осваиваются, просты в использовании и могут служить хорошим инструментарием при обучении решению разнообразных геометрических задач и в школе, и в вузе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безумова О. Л. Обучение геометрии с использованием возможностей *GeoGebra* / О. Л. Безумова, Р. П. Овчинникова и др. Архангельск, Изд. ООО “Кира”, 2011, -140 с.
2. Есаян А. Р. Создание новых инструментов в *GeoGebra* // Проблемы модернизации современного образования, Реценз. кол. монография, Калуга, 2016. С. 29–59.
3. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский, Е. А. Седова, А. В. Якушин. Динамическая математическая образовательная среда *GeoGebra*. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. — Ч. 1. — 417 с.

4. А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва Построение динамических моделей для решения некоторых задач дискретной математики в GeoGebra //
5. А. Р. Есаян, А. В. Якушин Экспериментальное обоснование гипотез в GeoGebra // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 1. С. 92–108.
6. А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский Компьютерное доказательство гипотезы о центроидах // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 1. С. 73–91.
7. Заславский А. А. Геометрические преобразования. М.: МЦМНО, 2004. -86 с.
8. Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, главная ред. физ.- мат. лит., 1966. - 648 с.
9. Коксетер Г. С. М., Новые встречи с геометрией / Коксетер Г.С.М, Крейцер С.: Библиотека математического кружка, 1978. -224 с.
10. Ларин С. В. Компьютерная анимация в среде *GeoGebra* на уроках математики, Легион, –Ростов-на-Дону, 2015. -192 с.
11. GeoGebra Manual. The official manual of GeoGebra. PDF generated at: Tue, 28 Apr 2015 19:24:47 CEST. -325 p.
12. Hohenwarter M., GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht (English: GeoGebra – educational material and applications for mathematics teaching). PhD thesis, University of Salzburg. 2006. — 334 p. http://www.geogebra.org/publications/mhohen_diss.pdf

REFERENCES

1. Bezumova O. L. Obuchenie geometrii s ispol'zovaniem vozmozhnostej GeoGebra / O. L. Bezumova, R. P. Ovchinnikova i dr. Arhangel'sk, Izd. ООО "Kira", 2011, 140 с.
2. Esayan, A. R., 2016. "Creating new tools in GeoGebra" // Problems of modernization of modern education, The reviewed collective monograph, Kaluga, P. 29–59.
3. Zaslavskij A. A. Geometricheskie preobrazovaniya. M.: MCMNO, 2004. -86 s.
4. Kokseter G. S. M. Vvedenie v geometriyu. M.: Nauka, glavnyaya red. fiz.- mat. lit., 1966. -648 s.
5. Kokseter G. S. M., Novye vstrechi s geometriey / Kokseter G.S.M, Krejcer S.: Biblioteka matematicheskogo krushka, 1978. -224 s.
6. Larin S. V. Komp'yuternaya animaciya v srede GeoGebra na urokah matematiki, Legion, –Rostov-na-Donu, 2015. -192 s.
7. GeoGebra Manual. The official manual of GeoGebra. PDF generated at: Tue, 28 Apr 2015 19:24:47 CEST. -325 p.
8. Hohenwarter M., GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht (English: GeoGebra – educational material and applications for mathematics teaching). PhD thesis, University of Salzburg. 2006. — 334 p. http://www.geogebra.org/publications/mhohen_diss.pdf

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

Поступило 25.05.2017

Получено 11.01.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.