

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-98-128

КЛАССИФИКАЦИЯ ЧИСТО-ВЕЩЕСТВЕННЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ¹Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский (г. Тула),
Д. К. Соболев, В. Н. Соболева (г. Москва)

Аннотация

В работе предложена новая классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей на основе их разложения в цепные дроби.

Показано, что для чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α степени $n \geq 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью приведённых алгебраических иррациональностей.

Найдены рекуррентные формулы для нахождения минимальных многочленов остаточных дробей с помощью дробно-линейных преобразований. Композиция этих дробно-линейных преобразований является дробно-линейным преобразованием, переводящим систему сопряжённых к алгебраической иррациональности α в систему сопряжённых к остаточной дроби, обладающую ярко выраженным эффектом концентрации около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Установлено, что последовательность минимальных многочленов для остаточных дробей образует последовательность многочленов с равными дискриминантами.

В работе доказываются предельные соотношения с коэффициентами минимального многочлена, связанные с эффектом концентрации сопряжённых чисел остаточной дроби.

В заключении поставлена проблема о структуре рационального сопряжённого спектра вещественного алгебраического иррационального числа α и о его предельных точках.

Ключевые слова: минимальный многочлен, приведённая алгебраическая иррациональность, обобщенное число Пизо, остаточные дроби, цепные дроби.

Библиография: 28 названий.

CLASSIFICATION PURELY REAL ALGEBRAIC
IRRATIONALITIESN. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii (Tula)
D. K. Sobolev, V. N. Soboleva (Moscow)

Abstract

We study the appearance and properties of minimal residual fractions of polynomials in the decomposition of algebraic numbers into continued fractions.

It is shown that for purely real algebraic irrationalities α of degree $n \geq 2$, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, the sequence of residual fractions α_m is a sequence of given algebraic irrationalities.

The definition of the generalized number of Piso, which differs from the definition of numbers he's also the lack of any requirement of integrality.

It is shown that for arbitrary real algebraic irrationals α of degree $n \geq 2$, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, the sequence of residual fractions α_m is a sequence of generalized numbers Piso.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Found an asymptotic formula for the conjugate number to the residual fractions of generalized numbers Piso. From this formula it follows that associated to the residual fraction α_m are concentrated about fractions $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ is either in the interval of radius $O\left(\frac{1}{Q_{m-1}^2}\right)$ in the case of purely real algebraic irrationals, or in circles with the same radius in the General case of real algebraic irrationals, which have complex conjugate of a number.

It is established that, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, fair recurrent formula for incomplete private q_m expansions of real algebraic irrationals α , Express q_m using the values of the minimal polynomial $f_{m-1}(x)$ for residual fractions α_{m-1} and its derivative at the point q_{m-1} .

Found recursive formula for finding the minimal polynomials of the residual fractions using fractional-linear transformations. Composition this fractional-linear transformation is a fractional-linear transformation that takes the system conjugate to an algebraic irrationality of α in the system of associated to the residual fraction, with a pronounced effect of concentration about rational fraction $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

It is established that the sequence of minimal polynomials for the residual fractions is a sequence of polynomials with equal discriminantly.

In conclusion, the problem of the rational structure of a conjugate of the spectrum of a real algebraic irrational number α and its limit points.

Keywords: minimal polynomial, given an algebraic irrationality, generalized number Piso, residual fractions, continued fractions.

Bibliography: 28 titles.

1. Введение	99
2. Необходимые определения и факты	101
3. Дробно-линейные преобразования для многочленов и линейные преобразования форм	103
4. Дробно-линейные преобразования целочисленных многочленов	107
5. Поведение остаточных дробей и их сопряжённых чисел	108
6. Свойства минимальных многочленов остаточных дробей	109
7. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей	111
8. Цепные последовательности с дробно-линейными преобразованиями	115
9. Предельные соотношения с коэффициентами минимального многочлена	120
10. Заключение	125
Список цитированной литературы	125

1. Введение

История теории цепных дробей насчитывает уже более трехсот лет. В значительной степени основы этой теории были заложены в трудах Л. Эйлера и Ж. Л. Лагранжа. Согласно этой теории для любого вещественного иррационального² α имеет место единственное разложение в бесконечную непрерывную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}}}}, \quad (1)$$

где неполные частные q_k и остаточные дроби α_k однозначно определяются из условий

$$q_k = [\alpha_k], k \geq 0; \quad \alpha_k = \frac{1}{\alpha_{k-1} - q_{k-1}}, \quad k \geq 1.$$

²На протяжении всей главы через α обозначается только вещественное иррациональное число.

Как обычно, через P_k и Q_k будем обозначать числитель и знаменатель k -ой подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ к числу α . Эти числа связаны хорошо известными рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{cases},$$

которые остаются верными при $k \geq 0$, если принять обычное соглашение, что $P_{-1} = 1$, $P_{-2} = 0$ и $Q_{-1} = 0$, $Q_{-2} = 1$.

Аналогичные формулы справедливы для числа α и его остаточных дробей:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\alpha_{k+1} P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}, \\ \alpha_{k+1} = \frac{\alpha Q_{k-1} - P_{k-1}}{P_k - \alpha Q_k}, \end{cases} \quad k \geq -1. \quad (2)$$

Благодаря известному равенству

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} \quad (k \geq -1),$$

которое легко доказывается по индукции, соотношения между числом α и его остаточными дробями можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha = \frac{P_k}{Q_k} + \frac{(-1)^k}{Q_k(\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1})}, \\ \alpha_{k+1} = -\frac{Q_{k-1}}{Q_k} + \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k(P_k - \alpha Q_k)} = -\frac{Q_{k-1}}{Q_k} + \frac{1}{Q_k |P_k - \alpha Q_k|}, \end{cases} \quad (k \geq 0). \quad (3)$$

Заметим, что соотношения между подходящими дробями позволяют записать вещественную иррациональность α в виде знако-чередующегося ряда

$$\alpha = q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{Q_{\nu-1} Q_{\nu}}.$$

О разложение алгебраических иррациональностей степени $n > 2$ в цепные дроби известно очень мало. Это один из труднейших вопросов современной теории чисел. В работах [1], [2], [3] — [4], [6], [14], [12], [13], [15] — [17] представлены различные аспекты этой теории.

Наиболее развита теория цепных дробей квадратических иррациональностей. В последнее время обнаруживаются новые интересные факты касающиеся этих дробей (см. [20]).

Отметим, что в работе [24] даётся описание множества приведённых алгебраических иррациональностей n -ой степени и установлено, что это множество обладает свойством рациональной выпуклости. В работе [25] показано, что аналогичным свойством обладают и обобщенные числа Пизо.

В работе [10] исследовались минимальные многочлены остаточных дробей разложения вещественных алгебраических иррациональностей в цепные дроби. В этих вопросах существенную роль сыграли дробно-линейные преобразования минимальных многочленов вещественных алгебраических иррациональностей. Это естественно, так как каждое число эквивалентно своей остаточной дроби, а эквивалентность задается с помощью унимодулярного дробно-линейного преобразования.

Целью данной работы — дать новую классификацию чисто-вещественных алгебраических иррациональностей на основе их разложения в цепные дроби и установить предельные соотношения для коэффициентов минимальных многочленов остаточных дробей.

Отметим, что случай приведённых алгебраических иррациональностей n -ой степени имеет тесную связь с квадратурными формулами с весами в методе К. К. Фролова (см. [7]–[9], [22], [23]). Дело в том, что приведённые иррациональности порождают чисто-вещественные алгебраические поля n -ой степени. Если рассмотреть решётку подобную решётке целых сопряжённых алгебраических чисел из чисто-вещественного алгебраического поля, то точки взаимной решётки, попавших в единичный n -мерный куб, будут образовывать алгебраическую сетку. Именно эти сетки и используются в методе Фролова, решая проблему построения квадратурных формул, дающих правильный порядок убывания нормы линейного функционала погрешности приближённого интегрирования на классе E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами Фурье.

Кратко остановимся на содержании данной статьи.

Во втором разделе (стр. 101–103) даются необходимые определения и обозначения, которые используются на протяжении всей статьи.

Третий раздел (стр. 103–107) посвящён рассмотрению дробно-линейных преобразований многочленов и линейных преобразований однородных бинарных форм и детальному изучению их свойств.

Четвертый раздел (стр. 107–108) посвящён рассмотрению дробно-линейных преобразований целочисленных многочленов и изучению их свойств.

В пятом разделе (стр. 108–109) дается описание поведения остаточных дробей и их сопряжённых чисел для разложения алгебраических чисел в цепные дроби.

Шестой раздел (стр. 109–111) посвящён изучению минимальных многочленов остаточных дробей.

В седьмом разделе (стр. 111–115) строится новая классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей с точки зрения разложения их в цепные дроби.

В восьмом разделе (стр. 115–120) дается определение цепной последовательности дробно-линейных преобразований плоскости и интерпретация полученных результатов в терминах этих последовательностей.

Девятый раздел (стр. 120–124) посвящён доказательству предельных соотношений с коэффициентами минимального многочлена, связанных с эффектом концентрации сопряжённых чисел остаточной дроби.

В заключении (стр. 125–125) формулируются дальнейшие перспективные направления исследований.

Отметим, что все пропущенные доказательства теорем и лемм содержатся в работах [10], [11].

2. Необходимые определения и факты

Прежде всего напомним определения приведённой алгебраической иррациональности n -ой степени. Здесь мы следуем работам [12], [13], [24].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен³, у которого все корни $\alpha^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — различные вещественные числа, удовлетворяющие условию

$$-1 < \alpha^{(n)} < \dots < \alpha^{(2)} < 0, \quad \alpha^{(1)} > 1,$$

тогда алгебраическое число $\alpha = \alpha^{(1)}$ называется приведённой алгебраической иррациональностью степени n .

Нетрудно видеть, что если $\alpha = \alpha^{(1)}$ — приведённая алгебраическая иррациональность, то все n алгебраически сопряжённых полей $\mathbb{Q}(\alpha^{(1)}), \dots, \mathbb{Q}(\alpha^{(n)})$ являются вещественными.

Заметим, что для минимального многочлена $f(x)$, задающего приведённую алгебраическую иррациональность α степени n , всегда выполнено неравенство

$$a_0 < 0, \tag{4}$$

так как на промежутке $[0; \infty)$ имеется только один корень α , при $x > \alpha$ имеем $f(x) > 0$, поэтому $f(0) < 0$. Кроме того выполняются неравенства

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = f(1) < 0, \tag{5}$$

$$a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}a_1 + (-1)^na_0 = (-1)^nf(-1) > 0. \tag{6}$$

ЛЕММА 1. Для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени n её остаточная дробь α_1 также является вещественной алгебраической иррациональностью степени n , удовлетворяющей неприводимому многочлену

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^n a_{k,1}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

где

$$a_{k,1} = - \sum_{m=n-k}^n a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \quad (0 \leq k \leq n).$$

Справедливо равенство

$$f_1(x) = -f_0(q_0) \prod_{j=1}^n \left(x - \frac{1}{\alpha^{(j)} - q_0} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что из неравенств

$$-1 < \alpha^{(n)} < \dots < \alpha^{(2)} < 0$$

вытекают неравенства

$$-1 < \beta^{(2)} = \frac{1}{\alpha^{(2)} - q_0} < \dots < \beta^{(n)} = \frac{1}{\alpha^{(n)} - q_0} < 0.$$

Таким образом, упорядоченность сопряженных чисел меняется на противоположную.

Из этой леммы по индукции доказывается следующая теорема.

³В частности, неприводимость многочлена означает, что $(a_0, \dots, a_n) = 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени n все её остаточные дроби α_m также являются вещественными алгебраическими иррациональностями степени n , удовлетворяющими неприводимым многочленам*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^n a_{k,m} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$

где

$$a_{k,m} = - \sum_{l=n-k}^n a_{l,m-1} C_l^{l+k-n} q_{m-1}^{l+k-n}, \quad (0 \leq k \leq n).$$

Многочлены $f_m(x)$ имеют корни

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)} Q_{m-1}} \quad (1 \leq j \leq n). \quad (7)$$

Справедливы равенства

$$f_m(x) = -f_{m-1}(q_{m-1}) \prod_{j=1}^n (x - \alpha_m^{(j)}).$$

3. Дробно-линейные преобразования для многочленов и линейные преобразования форм

Как обычно, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Через $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ мы будем обозначать соответствующие кольца многочленов, а через $\mathbb{PZ}[X, Y]$, $\mathbb{PQ}[X, Y]$, $\mathbb{PR}[X, Y]$, $\mathbb{PC}[X, Y]$ — соответствующие мультипликативные группы однородных форм.

Справедливы очевидные вложения

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x] &\subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x], \\ \mathbb{PZ}[X, Y] &\subset \mathbb{PQ}[X, Y] \subset \mathbb{PR}[X, Y] \subset \mathbb{PC}[X, Y]. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbb{K}$ — одно из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, тогда, если

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1},$$

то

$$f_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu} \in \mathbb{K}[x], \quad F_{\vec{a}}(X, Y) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} X^{\nu} Y^{n-\nu} \in \mathbb{PK}[X, Y].$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$F_{\vec{a}}(X, Y) = Y^n f_{\vec{a}}\left(\frac{X}{Y}\right). \quad (8)$$

Формула (8) задает биекцию φ между $\mathbb{K}_n[x]$ — $\mathbb{K}$ -модулем всех многочленов степени не выше n и $\mathbb{K}$ -модулем $\mathbb{PK}_n[X, Y]$ — всех однородных форм порядка n .⁴

⁴Здесь мы принимаем соглашение, что нулевая форма и только она принадлежит всем $\mathbb{PK}_n[X, Y]$.

Обозначим через $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ кольцо квадратных матриц второго порядка с элементами из $\mathbb{K}$. Через $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ будем обозначать мультипликативную группу кольца $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, то есть множество всех невырожденных матриц, а через $\mathcal{U}_2(\mathbb{K})$ — множество унимодулярных матриц. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad \text{если } A, B, C, D \in \mathbb{K}; \\ M &\in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K}), \quad \text{если } \det M = AD - BC \neq 0; \\ M &\in \mathcal{U}_2(\mathbb{K}), \quad \text{если } \det M = \pm 1. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для произвольной невырожденной матрицы M из $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ дробно-линейным преобразованием M многочленов $f_{\vec{a}}(x) \in \mathbb{K}[x]$ назовем преобразование, заданное формулой

$$M(f_{\vec{a}}(x)) = (Cx + D)^n f_{\vec{a}}\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для произвольной невырожденной матрицы M из $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ линейным преобразованием M формы $F_{\vec{a}}(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$ назовем преобразование, заданное формулой

$$M(F_{\vec{a}}(X, Y)) = F_{\vec{a}}(AX + BY, CX + DY).$$

Очевидно, что единичная матрица E задает тождественные преобразования:

$$E(f_{\vec{a}}(x)) = f_{\vec{a}}(x), \quad E(F_{\vec{a}}(X, Y)) = F_{\vec{a}}(X, Y). \quad (9)$$

С произвольной матрицей $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ свяжем матрицу $M^{(n+1)} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, заданную равенством

$$\begin{aligned} M^{(n+1)} &= \begin{pmatrix} D^n & C_n^1 C D^{n-1} & \dots & C_n^{n-1} C^{n-1} D & C^n \\ BD^{n-1} & m(1, 1) & \dots & m(1, n-1) & AC^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B^{n-1} D & m(n-1, 1) & \dots & m(n-1, n-1) & A^{n-1} C \\ B^n & C_n^1 A B^{n-1} & \dots & C_n^{n-1} A^{n-1} B & A^n \end{pmatrix} = \\ &= (m(\nu, j))_{\nu=0, \dots, n}^{j=0, \dots, n}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$m(\nu, j) = \sum_{\lambda=\max(0, j-\nu)}^{\min(n-\nu, j)} C_{\nu}^{j-\lambda} A^{j-\lambda} B^{\nu-j+\lambda} C_{n-\nu}^{\lambda} C^{\lambda} D^{n-\nu-\lambda}.$$

ЛЕММА 2. Для произвольной невырожденной матрицы $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ справедливо равенство

$$M(f_{\vec{a}}(x)) = f_{\vec{b}}(x), \quad (11)$$

где

$$\vec{b} = \vec{a} \cdot M^{(n+1)}. \quad (12)$$

Из леммы 2 следует, что любое дробно-линейное преобразование с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ переводит $\mathbb{K}_n[x]$ в себя.

ЛЕММА 3. Для произвольной невырожденной матрицы $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ справедливо равенство

$$M(F_{\vec{a}}(X, Y)) = F_{\vec{b}}(X, Y), \quad (13)$$

где

$$\vec{b} = \vec{a} \cdot M^{(n+1)}. \quad (14)$$

Из леммы 3 следует, что любое линейное преобразование с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ переводит $\mathbb{PK}_n[X, Y]$ в себя.

Из этих лемм вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольной невырожденной матрицы $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ биекция φ , заданная равенством (8), сохраняется, то есть, если*

$$M(f_{\bar{a}}(x)) = f_{\bar{b}}(x), \quad (15)$$

то

$$M(F_{\bar{a}}(X, Y)) = F_{\bar{b}}(X, Y). \quad (16)$$

Будем через $\mathbb{K}_n^*[x]$ обозначать множество всех многочленов степени n с $a_0 \neq 0$ и через $\mathbb{PK}_n^*[X, Y]$ — всех невырожденных однородных форм порядка n , то есть форм $F_{\bar{a}}(X, Y)$ с $a_n \neq 0$ и $a_0 \neq 0$.

По основной теореме алгебры для любого многочлена $f_{\bar{a}}(x) \in \mathbb{K}_n^*[x]$ имеется n корней $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)} \in \mathbb{C}$ и справедливо разложение в $\mathbb{C}_n^*[x]$:

$$f_{\bar{a}}(x) = a_n (x - \alpha^{(1)}) \dots (x - \alpha^{(n)}).$$

Переходя к формам, получим два разложения

$$\begin{aligned} F_{\bar{a}}(X, Y) &= a_n (X - \alpha^{(1)}Y) \dots (X - \alpha^{(n)}Y) = \\ &= a_0 (\beta^{(1)}X + Y) \dots (\beta^{(n)}X + Y); \\ \beta^{(\nu)} &= \frac{-1}{\alpha^{(\nu)}} \quad \nu = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом, бинарная форма $F_{\bar{a}}(X, Y)$ имеет n корневых прямых

$$X - \alpha^{(\nu)}Y = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

на которых она обращается в ноль.

ЛЕММА 4. *Для любых многочленов $f_{\bar{a}}(x)$, $g_{\bar{b}}(x)$ и произвольного дробно-линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ справедливо равенство*

$$M(f_{\bar{a}}(x)g_{\bar{b}}(x)) = M(f_{\bar{a}}(x))M(g_{\bar{b}}(x)).$$

ЛЕММА 5. *Для любых форм $F_{\bar{a}}(X, Y)$, $G_{\bar{b}}(X, Y)$ и произвольного линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ справедливо равенство*

$$M(F_{\bar{a}}(X, Y)G_{\bar{b}}(X, Y)) = M(F_{\bar{a}}(X, Y))M(G_{\bar{b}}(X, Y)).$$

ЛЕММА 6. *Для любого дробно-линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ ($A \neq C\alpha^{(\nu)}$ $\nu = 1, \dots, n$) многочлен*

$$M(f(x)) = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu}x^{\nu}$$

имеет корни

$$\begin{aligned} \beta^{(\nu)} &= \frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{A - C\alpha^{(\nu)}} \quad (1 \leq \nu \leq n), \quad b_n = \begin{cases} C^n f\left(\frac{A}{C}\right), & \text{при } C \neq 0, \\ a_n A^n, & \text{при } C = 0, \end{cases} \\ b_0 &= \begin{cases} D^n f\left(\frac{B}{D}\right), & \text{при } D \neq 0, \\ a_n B^n, & \text{при } D = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Из леммы 6 вытекает, что корни многочлена $f(x)$ преобразуются в корни многочлена $M(f(x))$ под действием дробно-линейного преобразования комплексной плоскости

$$M^*(z) = \frac{Dz - B}{-Cz + A}$$

с матрицей

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 7. Для любого линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ и формы $F(X, Y)$ с корневыми прямыми $X - \alpha^{(\nu)}Y = 0$ ($\nu = 1, \dots, n$) форма

$$M(F(X, Y)) = \sum_{\nu=0}^n b_\nu X^\nu Y^{n-\nu}$$

имеет корневые прямые

$$(A - C\alpha^{(\nu)})X - (D\alpha^{(\nu)} - B)Y = 0 \quad (1 \leq \nu \leq n), \quad b_n = F(A, C), \\ b_0 = F(B, D).$$

Из леммы 7 вытекает, что корневые прямые формы $F(X, Y)$ преобразуются в корневые прямые формы $M(F(X, Y))$ под действием линейного преобразования двумерного комплексного пространства

$$M^*(X, Y) = (DX - BY, -CX + AY)$$

с матрицей

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 8. Для композиции $\circ$ дробно-линейных преобразований справедливо равенство

$$M_1 \circ M = M \cdot M_1,$$

где $\cdot$ — матричное умножение, при этом корни многочленов преобразуются по закону

$$(M_1 \circ M)^* = M_1^* \cdot M^*.$$

ЛЕММА 9. Для композиции $\circ$ линейных преобразований форм справедливо равенство

$$M_1 \circ M = M \cdot M_1,$$

где $\cdot$ — матричное умножение, при этом корневые прямые форм преобразуются по закону

$$(M_1 \circ M)^* = M_1^* \cdot M^*.$$

Напомним определение дискриминанта $D(f)$ многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

имеющего корни $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$. Согласно определению

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2.$$

Аналогично, дискриминантом $D(F)$ формы

$$F(X, Y) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} Y + \dots + a_1 X Y^{n-1} + a_0 Y^n, \quad a_n \neq 0, a_0 \neq 0,$$

имеющей корневые прямые $X - \alpha^{(\nu)} Y = 0$ ($\nu = 1, \dots, n$), называется величина

$$D(F) = a_n^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2 = a_0^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\beta^{(\nu)} - \beta^{(\mu)} \right)^2.$$

Данное определение корректно, так как по теореме Виета $\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(n)} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ и для $\beta^{(\nu)} = \frac{-1}{\alpha^{(\nu)}}$ ($\nu = 1, \dots, n$) имеем:

$$\begin{aligned} a_0^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\beta^{(\nu)} - \beta^{(\mu)} \right)^2 &= a_0^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \frac{\left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2}{\left(\alpha^{(\nu)} \alpha^{(\mu)} \right)^2} = \\ &= a_0^{2n-2} \frac{\prod_{\nu < \mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2}{\left(\prod_{\nu=1}^n \alpha^{(\nu)} \right)^{2(n-1)}} = a_n^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Для любого дробно-линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ ($A \neq C \alpha^{(\nu)}$, ($\nu = 1, \dots, n$)) и многочлена $M(f(x))$ справедливо равенство для дискриминантов

$$(\det M)^{n(n-1)} D(f) = D(M(f)).$$

4. Дробно-линейные преобразования целочисленных многочленов

Обозначим через $\mathbb{P}_n[x]$ множество всех неприводимых целочисленных многочленов $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени n . Таким образом, если $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$, то

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \neq a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad (0 \leq j \leq n)$$

и из равенства $f(x) = g(x)h(x)$, $\text{degree}(g(x)) \leq \text{degree}(h(x))$ следует $g(x) \equiv 1$, $h(x) \equiv f(x)$. В частности, любой неприводимый многочлен является примитивным, то есть $(a_0, \dots, a_n) = 1$.

Через $\mathbb{PP}_n[X, Y]$ обозначим множество всех неприводимых бинарных целочисленных форм $F(X, Y) \in \mathbb{P}\mathbb{Z}_n[x]$ степени n . Таким образом, если $F(X, Y) \in \mathbb{P}\mathbb{Z}_n[x]$, то

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} Y + \dots + a_1 X Y^{n-1} + a_0 Y^n, \\ a_n &\neq 0 \neq a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad (0 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

и из равенства $F(X, Y) = G(X, Y)H(X, Y)$, $\text{degree}(G(X, Y)) \leq \text{degree}(H(X, Y))$ следует $G(X, Y) \equiv 1$, $H(X, Y) \equiv F(X, Y)$. В частности, любая неприводимая форма является примитивной, то есть $(a_0, \dots, a_n) = 1$.

Обозначим согласно Г. Вейлю [5] через $Ct(f)$ содержание многочлена $f(x)$, а через $Ct(F)$ — содержание формы F . Таким образом, $Ct(f) = Ct(F) = (a_0, \dots, a_n)$.

ЛЕММА 10. Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ справедливо равенство

$$Ct(f) = Ct(M(f)).$$

В силу биекции φ , заданной равенством (8) (стр. 103), для любого линейного унимодулярного преобразования целочисленных форм справедливо равенство содержаний

$$Ct(F) = Ct(M(F)).$$

ЛЕММА 11. Образ любого неприводимого многочлена $f(x)$ при дробно-линейном преобразовании с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{U}_2^*$ является неприводимым многочленом.

В силу биекции φ аналогичное утверждение справедливо для неприводимых форм.

ТЕОРЕМА 4. Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{U}_2^*(\mathbb{Z})$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ ($A \neq C\alpha^{(\nu)}$, $(\nu = 1, \dots, n)$) и многочлена $M(f(x))$ справедливо равенство дискриминантов

$$D(f) = D(M(f)).$$

В силу биекции φ аналогичное утверждение $D(M(F)) = D(F)$ справедливо для любого линейного преобразования форм F из $\mathbb{P}\mathbb{Z}_n[X, Y]$ с унимодулярной матрицей M из $\mathcal{U}_2^*(\mathbb{Z})$.

5. Поведение остаточных дробей и их сопряжённых чисел

Введем следующие обозначения

$$\delta(\alpha) = \min_{2 \leq j \leq n} |\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}| > 0,$$

так как все корни различные.

Для $m \geq 1$ величины θ_{m-1} ($0 < \theta_{m-1} < 1$) определяются из равенства

$$\alpha = \alpha^{(1)} = \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^{m-1}\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\theta_{m-1} = \frac{Q_m}{\alpha_m Q_{m-1} + Q_{m-2}}.$$

Остаточная дробь $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ имеет разложение

$$\alpha_m = \alpha_m^{(1)} = q_m + \frac{1}{q_{m+1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}} > 1 \quad (m \geq 1).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — его вещественные корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Пусть последовательность многочленов $f_m(x)$ ($m \geq 1$) определена рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \sum_{k=0}^n a_{k,m} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0, \\ \varepsilon_m &= \text{sign}(f_{m-1}(q_{m-1})), \\ a_{k,m} &= \varepsilon_m \sum_{\nu=n-k}^n a_{\nu,m-1} C_{\nu}^{\nu+k-n} q_{m-1}^{\nu+k-n} = \varepsilon_m \frac{f_{m-1}^{(n-k)}(q_{m-1})}{(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n). \end{aligned} \quad (17)$$

Многочлены $f_m(x)$ имеют корни

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)} Q_{m-1}} \quad (1 \leq j \leq n). \quad (18)$$

Справедливы равенства

$$f_m(x) = \varepsilon_m f_{m-1}(q_{m-1}) \prod_{j=1}^n (x - \alpha_m^{(j)}). \quad (19)$$

Существует номер $m_0 = m_0(\alpha)$ такой, что для любого $m \geq m_0$ остаточная дробь $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ является приведённой алгебраической иррациональностью и выполнены соотношения

$$\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} = \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_1}}}}, \quad (20)$$

$$\alpha_m^{(j)} = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2 \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)} \right)} \quad (2 \leq j \leq n). \quad (21)$$

6. Свойства минимальных многочленов остаточных дробей

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — его вещественные корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Для последовательности минимальных многочленов $f_m(x)$ остаточных дробей $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ последовательность дискриминантов $D(f_m)$ целочисленная, стационарная.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — его вещественные корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Если α — приведённая алгебраическая иррациональность, то минимальный многочлен $f_m(x)$ для остаточной дроби α_m имеет вид

$$f_m(x) = (-1)^m (Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}}\right) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu,m} x^\nu. \quad (22)$$

Справедливы равенства

$$a_{n,m} = Q_{m-1}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right|, \quad a_{0,m} = -Q_{m-2}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right) \right|, \quad (23)$$

$$a_{\nu,m} = Q_{m-1}^\nu Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^\nu \quad (0 \leq \nu \leq n), \quad (24)$$

$$a_{n-1,m} = Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right). \quad (25)$$

ЛЕММА 12. Пусть α корень минимального многочлена

$$f_0(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x],$$

тогда

$$f_0^{(\nu)}(\alpha) \neq 0 \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Обозначим через $c(\alpha, \varepsilon) > 0$ константу в теореме Рота [28]. Таким образом для любого целого p и натурального q справедливо неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\alpha, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}. \quad (26)$$

Пусть

$$\Delta(\alpha) = \max_{2 \leq j \leq n} |\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}|.$$

ЛЕММА 13. Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и

$$f_0(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен, тогда при $t > t_0$ для любой подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу α справедливы неравенства

$$a_n \frac{c(\alpha, \varepsilon) \left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left| f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right) \right| < a_n \frac{(1 + \Delta(\alpha))^{n-1}}{Q_m^2}. \quad (27)$$

Из леммы 13 и теоремы 7 следует, что при $n > 2$ старший коэффициент $a_{n,m}$ минимального многочлена $f_m(x)$ для приведённой алгебраической иррациональности α_m растёт как величина порядка $O(Q_{m-1}^{n-2-\varepsilon})$.

Действительно, при $t > t_0$ имеем

$$\begin{aligned} a_n \frac{c(\alpha, \varepsilon) \left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left| f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right) \right| < a_n \frac{(1 + \Delta(\alpha))^{n-1}}{Q_m^2}, \\ a_n c(\alpha, \varepsilon) \left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1} Q_{m-1}^{n-2-\varepsilon} < a_{n,m} = Q_{m-1}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right| < a_n (1 + \Delta(\alpha))^{n-1} Q_{m-1}^{n-2}. \end{aligned}$$

Обозначим через $A_\nu(\alpha)$ величину

$$A_\nu(\alpha) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)})^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и

$$f_0(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен, тогда при $t > t_0$ для любой подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к приведённой алгебраической иррациональности α и остаточной дроби α_m справедливы соотношения

$$\alpha_m = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{f'_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2 \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right|} + (-1)^{m-1} \frac{\lambda_m}{Q_{m-1}^2}, \quad (28)$$

где

$$\lambda_m = A_1(\alpha) + \frac{(-1)^{m-1} \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} A_2(\alpha) \varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| < 2. \quad (29)$$

7. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей

Рассмотрим неприводимый целочисленный многочлен

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

у которого все корни $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — вещественные числа. Этому многочлену соответствуют n изоморфных алгебраических расширений поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$: $\mathbb{F}_n^{(1)} = \mathbb{Q}(\alpha^{(1)}), \dots, \mathbb{F}_n^{(n)} = \mathbb{Q}(\alpha^{(n)})$. Будем через $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$ обозначать произвольный набор алгебраически сопряженных чисел, где $\theta^{(\nu)} \in \mathbb{F}_n^{(\nu)}$.

Через $\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)})$ обозначим рациональное арифметическое пространство:

$$\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) = \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} m_{\mu} (\alpha^{(1)})^{\mu}, \dots, \sum_{\mu=0}^{n-1} m_{\mu} (\alpha^{(n)})^{\mu} \right) \middle| m_0, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

ЛЕММА 14. *Рациональное n -мерное арифметическое пространство $\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)})$ всюду плотно в n -мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка в n -мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_0 + y_1 \alpha^{(1)} + \dots + y_{n-1} (\alpha^{(1)})^{n-1} = x_1 \\ y_0 + y_1 \alpha^{(2)} + \dots + y_{n-1} (\alpha^{(2)})^{n-1} = x_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_0 + y_1 \alpha^{(n)} + \dots + y_{n-1} (\alpha^{(n)})^{n-1} = x_n \end{cases} \quad (30)$$

Так как определитель Вандермонда

$$W(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^{(1)} & \dots & (\alpha^{(1)})^{n-1} \\ 1 & \alpha^{(2)} & \dots & (\alpha^{(2)})^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^{(n)} & \dots & (\alpha^{(n)})^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (30) имеет единственное решение $(y_0, \dots, y_{n-1})$.

Пусть $a = \max_{\substack{\nu=1, \dots, n, \\ \mu=0, \dots, n-1}} (|\alpha^{(\nu)}|^{\mu})$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Определим целые $m_0, \dots, m_{n-1}$ и натуральное N из условий

$$\frac{n \cdot a}{N} < \varepsilon, \quad m_{\mu} = [N \cdot y_{\mu}] \quad (\mu = 0, \dots, n-1).$$

Тогда для $\theta^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{m_{\mu}}{N} (\alpha^{(\nu)})^{\mu}$ имеем:

$$|\theta^{(\nu)} - x_{\nu}| < \varepsilon \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Точка $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ называется точкой общего положения, если $x_{\nu} \neq 0$ ($\nu = 1, \dots, n$) и $|x_1 - x_2| + \dots + |x_1 - x_n| > 0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Точка $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ называется точкой абсолютно общего положения, если $x_{\nu} \neq 0$ ($\nu = 1, \dots, n$) и $|x_{\nu} - x_{\mu}| > 0$ для любых $\nu \neq \mu$.*

Ясно, что в рациональном арифметическом пространстве $\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)})$ не являются точками общего положения только рациональные точки вида $(m, \dots, m)$ $m \in \mathbb{Q}$. Все остальные точки являются точками общего положения. Точками абсолютно общего положения являются только точки $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$, где $\theta^{(1)}$ — алгебраическая иррациональность степени n , а $\theta^{(2)}, \dots, \theta^{(n)}$ — её алгебраически сопряженные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Для точки абсолютно общего положения $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с выделенной координатой x_ν её типом назовем матрицу

$$\begin{pmatrix} t & t & t & t_1 & \dots & t_m \\ 1 & k_- & k_+ & k_1 & \dots & k_m \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где целые $t, t_1, \dots, t_m, k_-, k_+, k_1, \dots, k_m$ определены условиями

$$t \leq x_\nu < t+1, \quad t_1 < \dots < t_m, \quad t_\nu \neq t \quad (1 \leq \nu \leq m),$$

на полуинтервале $[t, x_\nu)$ ровно k_- чисел x_μ ,

на интервале $(x_\mu, t+1)$ ровно k_+ чисел x_μ ,

на каждом полуинтервале $[t_j, t_j+1)$ ровно k_j чисел x_μ ($j = 1, \dots, m$).

Таким образом, выполнено равенство

$$1 + k_- + k_+ + k_1 + \dots + k_m = n.$$

Из леммы 14 сразу следует, что в любом рациональном арифметическом пространстве $\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)})$ для заданного ν и типа (31) найдется алгебраическая иррациональность n -ой степени $\theta^{(\nu)} \in \mathbb{F}_n^{(\nu)}$ такая, что набор сопряженных алгебраических иррациональностей $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$ имеет тип (31).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Типом алгебраической иррациональности n -ой степени $\theta^{(\nu)} \in \mathbb{F}_n^{(\nu)}$ называется тип точки $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$ с выделенной координатой $\theta^{(\nu)}$.

Из этого определения следует, что всякая приведенная иррациональность $\alpha = \alpha^{(1)}$ с алгебраически сопряженными числами $\alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ имеет тип

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_0 & q_0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & n-1 \end{pmatrix},$$

где q_0 — натуральное число, равное нулевому неполному частному разложения α в цепную дробь:

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}} > 1.$$

ЛЕММА 15. Если α — приведённая алгебраическая иррациональность, то необходимым и достаточным условием существования приведённой алгебраической иррациональности β , для которой α — первая остаточная дробь, является существование натурального q , для которого выполнены условия

$$-\frac{1}{q} < \alpha^{(\nu)} < -\frac{1}{q+1} \quad (2 \leq \nu \leq n), \quad (32)$$

тогда

$$\beta = q + \frac{1}{\alpha}. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если β имеет вид (33), то алгебраически сопряжённые к β иррациональности имеют вид

$$\beta^{(\nu)} = q + \frac{1}{\alpha^{(\nu)}} \quad (2 \leq \nu \leq n). \quad (34)$$

Так как β — приведённая алгебраическая иррациональность, то выполняются неравенства

$$-1 < q + \frac{1}{\alpha^{(\nu)}} < 0 \quad (2 \leq \nu \leq n),$$

которые эквивалентны неравенствам (32). Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Приведённая алгебраическая иррациональность n -ой степени $\alpha = \alpha^{(1)} \in \mathbb{F}_n^{(1)}$ называется приведённой алгебраической иррациональностью порядка m , если найдётся последовательность приведённых алгебраических иррациональностей $\beta_m, \dots, \beta_1$ такая, что

$$\beta_\nu = q_\nu + \frac{1}{q_{\nu-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\alpha}}}} \quad (\nu = 1, \dots, m) \quad (35)$$

и не существует приведённой алгебраической иррациональности β_{m+1} , для которой β_m — первая остаточная дробь.

Таким образом, если для приведённой алгебраической иррациональности α не выполнено условие леммы 15, то α имеет порядок 0. Все приведённые квадратические иррациональности имеют бесконечный порядок в силу периодичности цепной дроби.

ТЕОРЕМА 9. При $n \geq 3$ всякая приведённая алгебраическая иррациональность α степени n имеет конечный порядок $m \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть найдётся последовательность приведённых алгебраических иррациональностей $\beta_m, \dots, \beta_1$ такая, что выполнены равенства (35), тогда последовательно для сопряжённых чисел $\beta_\nu^{(\mu)}$ ($\nu = m, \dots, 1$), ($\mu = 2, \dots, n$) находим

$$\begin{aligned} & -1 < \beta_m^{(\mu)} < 0, \\ & -\frac{1}{q_m} < \beta_{m-1}^{(\mu)} < -\frac{1}{q_m + 1}, \\ & -\frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}} < \beta_{m-2}^{(\mu)} < -\frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}, \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \\ & \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}} < \beta_1^{(\mu)} < -\frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}}, & m \text{ чётное} \\ -\frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}} < \beta_1^{(\mu)} < -\frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}}, & m \text{ нечётное} \end{array} \right. \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}} < \alpha^{(\mu)} < -\frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}}, \quad m \text{ нечетное} \\ -\frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}} < \alpha^{(\mu)} < -\frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}}, \quad m \text{ четное} \end{array} \right.$$

Так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}} - \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}} \right| = 0,$$

то при бесконечном порядке приведенной иррациональности α получаем $\alpha^{(2)} = \dots = \alpha^{(n)}$, что невозможно при $n \geq 3$. Теорема полностью доказана. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что каждая чисто-вещественная алгебраическая иррациональность α n -ой степени либо является приведенной алгебраической иррациональностью конечного порядка $m \geq 0$, либо эквивалентна некоторой приведенной алгебраической иррациональности конечного порядка $m \geq 0$.

8. Цепные последовательности с дробно-линейными преобразованиями

В работе [15] дано определение сходимости последовательности целочисленных матриц к числу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Говорят, что матричное разложение

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

сходится к числу α , если для матриц

$$M_n = \prod_{k=0}^n \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha.$$

В этом случае пишется

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

В работе [12] дается достаточно систематичное изложение теории матричных представлений действительных чисел. Нас сейчас будет интересовать случай, соответствующий обычным цепным дробям. Если число α разложено в цепную дробь (1), то справедливо матричное разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{\nu=0}^{\infty} \begin{pmatrix} q_{\nu} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

так как

$$M_m = \prod_{\nu=0}^m \begin{pmatrix} q_{\nu} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_m & P_{m-1} \\ Q_m & Q_{m-1} \end{pmatrix} \quad (m \geq 0)$$

и последовательность матриц M_m сходится к числу α в силу свойств подходящих дробей.

Рассмотрим произвольное дробно-линейное преобразование комплексной плоскости с матрицей M :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad w = M(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}.$$

Из равенств (2) вытекает, что иррациональное число α и остаточная дробь α_{k+1} связаны взаимнообратными дробно-линейными преобразованиями:

$$M_k = \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix}, \quad M_k^* = \begin{pmatrix} Q_{k-1} & -P_{k-1} \\ -Q_k & P_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \alpha = M_k(\alpha_{k+1}) \\ \alpha_{k+1} = M_k^*(\alpha) \end{cases}. \quad (37)$$

Анализируя формулы (7) для корней минимального многочлена $f_m(x)$, мы приходим к выводу, что они получаются из корней исходного минимального многочлена под действием дробно-линейного преобразования M_{k-1}^* .

Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть α — вещественная иррациональность. Назовем цепной последовательностью первого рода дробно-линейных преобразований для многочленов последовательность

$$\left\{ M_{\nu}(\alpha) = \begin{pmatrix} P_{\nu}(\alpha) & P_{\nu-1}(\alpha) \\ Q_{\nu}(\alpha) & Q_{\nu-1}(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \dots \right\},$$

где $P_{\nu}(\alpha)$ — числитель, а $Q_{\nu}(\alpha)$ — знаменатель подходящей дроби с номером ν к числу α .

Цепной последовательностью первого рода дробно-линейных преобразований комплексной плоскости назовем последовательность

$$\left\{ M_{\nu}^*(\alpha) = \begin{pmatrix} Q_{\nu-1}(\alpha) & -P_{\nu-1}(\alpha) \\ -Q_{\nu}(\alpha) & P_{\nu}(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \dots \right\}.$$

Чтобы лучше понять эффект концентрации алгебраически-сопряжённых чисел к остаточной дроби α_m около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ докажем следующие леммы.

ЛЕММА 16. Пусть $M^*(z)$ — произвольное дробно-линейное преобразование комплексной плоскости с унимодулярной матрицей M^* :

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}, |AD - BC| = 1, C \neq 0,$$

тогда:

внешность круга $K\left(\frac{A}{C}, 1\right) = \{z \mid |z - \frac{A}{C}| \geq 1\}$ переходит во внутренность круга $K\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$ с выколотым центром,
 окружность $C\left(\frac{A}{C}, 1\right)$ переходит в окружность $C\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$,
 внутренность круга $K\left(\frac{A}{C}, 1\right)$ с выколотым центром переходит во внешность круга $K\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$,
 любое кольцо

$$R\left(\frac{A}{C}, 1, r\right) = \left\{z \mid r < \left|z - \frac{A}{C}\right| < 1\right\} \quad (0 < r < 1)$$

переходит в кольцо $R\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{rC^2}, \frac{1}{C^2}\right)$,

точка $z = \frac{A}{C}$ — полюс дробно-линейного преобразования $M^*(z)$ с вычетом $\frac{1}{C^2}$.

Рассмотрим дробно-линейное преобразование $N^*(z)$ с матрицей

$$N^* = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C, D \in \mathbb{Z}, C \neq 0, \quad N^*(z) = \frac{Cz + D}{C} = z + \frac{D}{C}.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1^* = N^* \cdot M^* = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AD - BC \\ -C^2 & AC \end{pmatrix}$$

ЛЕММА 17. Пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} C & -D \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}, \quad C \neq 0,$$

тогда для дробно-линейного преобразования многочленов $M_1 = N \circ M$ с матрицей

$$M_1 = M \cdot N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & BC - AD \\ C^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и корней $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n)}$ многочлена $g(x) = M_1(f(x))$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g(x) &= M_1(f(x)) = C^{2n} x^n f\left(\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2 x}\right) = \\ &= C^{2n} f\left(\frac{A}{C}\right) x^n + \sum_{\nu=1}^n \frac{f^{(\nu)}\left(\frac{A}{C}\right)}{\nu!} C^{2(n-\nu)} x^{n-\nu} (BC - AD)^\nu \end{aligned} \quad (38)$$

и

$$\beta^{(\nu)} = M_1^*\left(\alpha^{(\nu)}\right) = \frac{AD - BC}{C^2\left(\frac{A}{C} - \alpha^{(\nu)}\right)} \quad (1 \leq \nu \leq n). \quad (39)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть α — вещественная иррациональность, тогда цепной последовательностью второго рода дробно-линейных преобразований для многочленов назовем последовательность

$$\left\{M_{\nu,1}(\alpha) = \begin{pmatrix} P_\nu(\alpha)Q_\nu(\alpha) & P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha) - P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha) \\ Q_\nu^2(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \mid \nu = 0, 1, \dots\right\},$$

где $P_\nu(\alpha)$ — числитель, а $Q_\nu(\alpha)$ — знаменатель подходящей дроби с номером ν к числу α .

Цепной последовательностью второго рода дробно-линейных преобразований комплексной плоскости назовем последовательность

$$\left\{M_{\nu,1}^*(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha) - P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha) \\ -Q_\nu^2(\alpha) & P_\nu(\alpha)Q_\nu(\alpha) \end{pmatrix} \mid \nu = 0, 1, \dots\right\}.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и

$$f_0(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен.

Для последовательности многочленов $g_\nu(x) = M_{\nu,1}(\alpha)(f_0(x))$ и корней

$$\beta_\nu^{(j)} = M_{\nu,1}^*(\alpha)(\alpha^{(j)}) \quad (1 \leq j \leq n)$$

справедливы соотношения

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta_\nu^{(j)} = 0 \quad (2 \leq j \leq n), \quad (40)$$

$$\beta_\nu^{(1)} = \alpha_{\nu+1} + \frac{Q_{\nu-1}(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)}. \quad (41)$$

Введём обозначения:

$$\lambda_\nu = \alpha^{(1)} - \alpha^{(\nu+1)} \quad (1 \leq \nu \leq n-1),$$

$\sigma_\nu(x_1, \dots, x_k)$ — элементарный симметрический многочлен порядка ν от $x_1, \dots, x_k$
($1 \leq \nu \leq k$).

ЛЕММА 18. Пусть выполнены условия теоремы 10, тогда справедливы предельные соотношения:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu^2(-1)^{\nu-1} \beta_\nu^{(j)} = \frac{1}{\lambda_{j-1}} \quad (2 \leq j \leq n), \quad (42)$$

при $1 \leq \mu \leq n-1$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu^{2\mu}(-1)^{(\nu-1)\mu} \sigma_\mu(\beta_\nu^{(2)}, \dots, \beta_\nu^{(n)}) = \sigma_\mu\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}}\right). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из доказательства теоремы 10 следует, что

$$Q_\nu^2(-1)^{\nu-1} \beta_\nu^{(j)} = \frac{1}{\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(j)}} = \frac{1}{\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(1)} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}}.$$

Так как

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(1)} = 0,$$

то (42) установлено.

Соотношение (43) вытекает из (42) в силу однородности элементарных симметрических многочленов и их непрерывности. $\square$

ТЕОРЕМА 11. При $1 \leq \nu \leq n$ справедливы равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) = \frac{f_0^{(\nu)}(\alpha)}{\nu! \sigma_{\nu-1} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}} \right)}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в лемме 17 $A = P_m$, $B = P_{m-1}$, $C = Q_m$, $D = Q_{m-1}$, тогда $AD - BC = (-1)^{m-1}$ и многочлен

$$g(x) = M_1(f_0(x)) = Q_m^{2n} f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) x^n + \sum_{\nu=1}^n \frac{f_0^{(\nu)} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{\nu!} Q_m^{2(n-\nu)} x^{n-\nu} (-1)^{m\nu}$$

имеет корни:

$$\beta_m^{(j)} = M_{m,1}^*(\alpha)(\alpha^{(j)}) = \frac{(-1)^{m-1}}{Q_m^2 \left(\frac{P_m}{Q_m} - \alpha^{(j)} \right)} \quad (2 \leq j \leq n), \quad (45)$$

$$\beta_m^{(1)} = \alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m}. \quad (46)$$

Обозначим через $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ элементарные симметрические функции от $\beta_m^{(2)}, \dots, \beta_m^{(n)}$, тогда по теореме Виета получим:

$$\beta_m^{(1)} + \sigma_1 = (-1)^{m-1} \frac{f'_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}, \quad (47)$$

$$\beta_m^{(1)} \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu = (-1)^{\nu(m-1)} \frac{f_0^{(\nu)} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{\nu! Q_m^{2\nu} f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)} \quad (2 \leq \nu \leq n). \quad (48)$$

Из равенства (47) следует:

$$\begin{aligned} \beta_m^{(1)} (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) + \sigma_1 (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) &= f'_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) &= f'_0(\alpha) \end{aligned}$$

и равенство (44) доказано при $\nu = 1$.

Из равенства (48) и леммы 18 следует:

$$\begin{aligned} \beta_m^{(1)} (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) Q_m^{2(\nu-1)} (-1)^{(m-1)(\nu-1)} \sigma_{\nu-1}(\beta_m^{(2)}, \dots, \beta_m^{(n)}) + \\ + Q_m^{2\nu} (-1)^{(m-1)\nu} \sigma_\nu(\beta_m^{(2)}, \dots, \beta_m^{(n)}) f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) &= \frac{f_0^{(\nu)} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{\nu!}, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) &= \frac{f_0^{(\nu)}(\alpha)}{\nu! \sigma_{\nu-1} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}} \right)} \end{aligned}$$

и равенство (44) доказано при $2 \leq \nu \leq n$. $\square$

ТЕОРЕМА 12. *Справедливо равенство*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) Q_m^2 \left| \frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right| = 1. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Тейлора получаем:

$$f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) = \sum_{\nu=1}^n \frac{f_0^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} \left(\frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right)^\nu = - \sum_{\nu=1}^n \frac{f_0^{(\nu)} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{\nu!} \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} \right)^\nu.$$

Отсюда и из равенства (47) следует:

$$\begin{aligned} & \beta_m^{(1)}(-1)^m Q_m^2 \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} + \sum_{\nu=2}^n \frac{f_0^{(\nu)}\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)}{\nu! f_0'\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)} \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} \right)^\nu \right) + \\ & + \sigma_1(-1)^{m-1} Q_m^2 \frac{f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)}{f_0'\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)} = 1, \\ & \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) (-1)^m Q_m^2 \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} \right) = 1, \end{aligned}$$

так как при $\nu \geq 2$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) Q_m^2 \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} \right)^\nu = 0$$

в силу теоремы Рота. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если утверждение теоремы 11 нетривиально, то утверждение теоремы 12 тривиально. Действительно, из равенства (3) следует, что

$$\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} = \frac{1}{Q_m |P_m - \alpha Q_m|}.$$

Поэтому

$$\left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) Q_m^2 \left| \frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right| = \frac{Q_m^2 \left| \frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right|}{Q_m |P_m - \alpha Q_m|} = 1.$$

9. Предельные соотношения с коэффициентами минимального многочлена

По теореме 5 (стр. 108)

$$f_m(x) = -f_{m-1}(q_{m-1})x^n - \frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{1!}x^{n-1} - \sum_{\nu=2}^n \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!}x^{n-\nu}. \quad (50)$$

Из формулы (50) и формул Виета следует, что

$$(-1)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} = \alpha_m^{(1)} \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

где $\sigma_0 = 1$, $\sigma_n = 0$, $\sigma_1 = \sigma_1(\alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(n)}) = \alpha_m^{(2)} + \dots + \alpha_m^{(n)}$,

$$\sigma_\nu = \sigma_\nu(\alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(n)}) = \sum_{2 \leq \mu_1 < \dots < \mu_\nu \leq n} \alpha_m^{(\mu_1)} \dots \alpha_m^{(\mu_\nu)} \quad (2 \leq \nu \leq n-1) \quad (51)$$

— элементарные симметрические многочлены от $\alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(n)}$.

Так как

$$\alpha_m^{(1)} = -\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} - \sigma_1,$$

то получаем $n - 1$ равенство

$$\begin{aligned} (-1)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} &= \left(-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} - \sigma_1 \right) \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu \quad (\nu = 2, \dots, n), \\ (-1)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} + \frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \sigma_{\nu-1} &= -\sigma_1 \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu. \end{aligned} \quad (52)$$

Далее нам потребуются следующие следствия из теорем 5 (стр. 108) и 7 (стр. 110):

$$-f_{m-1}(q_{m-1}) = Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|, \quad (53)$$

$$-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{1!} = Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2} Q_{m-1}} f'_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right), \quad (54)$$

$$\begin{aligned} -\frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!} &= Q_{m-1}^{n-\nu} Q_{m-2}^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2} Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{n-\nu} \\ &\quad (0 \leq \nu \leq n), \end{aligned} \quad (55)$$

$$-\frac{f_{m-1}^{(n)}(q_{m-1})}{n!} = -Q_{m-2}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right) \right|. \quad (56)$$

ЛЕММА 19. *Справедливо равенство*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \sigma_\nu = (-1)^\nu C_{n-1}^\nu \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно равенству (21) (стр. 109) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \alpha_m^{(\nu)} &= -1 + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1} Q_{m-2} \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(\nu)} \right)} \quad (2 \leq \nu \leq n), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \alpha_m^{(\nu)} &= -1, \\ \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \sigma_\nu &= \sum_{2 \leq \mu_1 < \dots < \mu_\nu \leq n} \prod_{j=1}^{\nu} \left(-1 + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1} Q_{m-2} \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(\mu_j)} \right)} \right), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \sigma_\nu &= \sum_{2 \leq \mu_1 < \dots < \mu_\nu \leq n} (-1)^\nu = (-1)^\nu C_{n-1}^\nu \end{aligned}$$

и лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 20. *При $\nu = 1, \dots, n$ справедливо равенство*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) \left(\left(-\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} - C_{n-1}^{\nu-1} \right) \right) = 0. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\left(-\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} - C_{n-1}^{\nu-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{2 \leq \mu_1 < \dots < \mu_{\nu-1} \leq n} \prod_{j=1}^{\nu} \left(1 - \frac{(-1)^m}{Q_{m-1} Q_{m-2} \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(\mu_j)} \right)} \right) - C_{n-1}^{\nu-1} = \\
&= O \left(\frac{1}{Q_{m-1} Q_{m-2}} \right),
\end{aligned}$$

поэтому согласно равенствам (53) и (54) получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) \left(\left(-\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} - C_{n-1}^{\nu-1} \right) = \\
&= O \left(\frac{1}{Q_{m-2}^2} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) \right) = \\
&= O \left(\frac{1}{Q_{m-2}^2} \left(\frac{Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2} Q_{m-1}} f'_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right)}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) \right) = \\
&= O \left(\frac{n}{Q_{m-1} Q_{m-2}} - \frac{f'_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{Q_{m-2}^2 Q_{m-1}^2 \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right).
\end{aligned}$$

Согласно лемме 13 (стр. 111)

$$\frac{f'_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{Q_{m-2}^2 Q_{m-1}^2 \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} = O \left(\frac{Q_{m-1}^\varepsilon}{Q_{m-2}^2} \right).$$

Предположим, что для бесконечного числа номеров m выполняется неравенство

$$Q_{m-1}^\varepsilon > c Q_{m-2}^2 > 0,$$

тогда $Q_{m-1} > c^{\frac{1}{\varepsilon}} Q_{m-2}^{\frac{2}{\varepsilon}}$. Но тогда,

$$\left| \alpha - \frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right| < \frac{1}{Q_{m-2} Q_{m-1}} < \frac{1}{c^{\frac{1}{\varepsilon}} Q_{m-2}^{1+\frac{2}{\varepsilon}}},$$

что противоречит неравенству Рота (26). Отсюда следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{m-1}^\varepsilon}{Q_{m-2}^2} = 0,$$

что доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 21. При $\nu = 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} - \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) C_{n-1}^{\nu-1} \right) = \\
= -(\nu-1) C_n^\nu.
\end{aligned} \tag{59}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно равенству (52) имеем:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} &= \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} (-1)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} - \\
&- \left(-\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \sigma_1 \right) \left((-1)^{\nu-1} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} \right) + (-1)^\nu \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \sigma_\nu.
\end{aligned}$$

Применяя леммы 19 и 20, получим

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} - \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) C_{n-1}^{\nu-1} \right) = \\ = -(n-1)C_{n-1}^{\nu-1} + C_{n-1}^\nu = -(\nu-1)C_n^\nu \end{aligned}$$

и лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 22. При $\nu = 2, \dots, n$ и $2 \leq \mu \leq \nu$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \left(\frac{Q_{m-1}^{n-\nu} Q_{m-2}^\nu f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) (Q_{m-2} Q_{m-1})^{-\mu}}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) \right) = 0. \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \left(\frac{Q_{m-1}^{n-\nu} Q_{m-2}^\nu f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) (Q_{m-2} Q_{m-1})^{-\mu}}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{(Q_{m-2} Q_{m-1})^\mu \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|}.$$

Повторяя рассуждения леммы 20, получим доказываемое утверждение. $\square$

ЛЕММА 23. При $\nu = 2, \dots, n-1$ справедливы равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2} Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{n-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) C_{n-1}^{\nu-1}}{Q_{m-2} Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = C_n^\nu, \quad (61)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{\mu=2}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2} Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{n-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = 0. \quad (62)$$

При $\nu = n$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right) \right|}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{Q_{m-2} Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = 1. \quad (63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 21, 22 и равенств (53)–(55) вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} - \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) C_{n-1}^{\nu-1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{Q_{m-1}^{n-\nu} Q_{m-2}^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right)}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) C_{n-1}^{\nu-1} \right) = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} - \right. \\
&\quad \left. - n C_{n-1}^{\nu-1} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) C_{n-1}^{\nu-1}}{Q_{m-2}Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = -(\nu-1) C_n^\nu.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) C_{n-1}^{\nu-1}}{Q_{m-2}Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = \\
&= n C_{n-1}^{\nu-1} - (\nu-1) C_n^\nu = C_n^\nu
\end{aligned}$$

и первое утверждение леммы доказано.

Далее, заметим что

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} = \frac{\sum_{\mu=2}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \\
&\quad + C_{n-1}^{m-\nu} - \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) C_{n-1}^{\nu-1}}{Q_{m-2}Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (61) следует (62).

Из равенства (56) следует, что

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} = (-1)^m f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right).$$

Так как $(-1)^m f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right) < 0$, то при $\nu = n$ из (61) следует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(- \frac{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right) \right|}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{Q_{m-2}Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = 1$$

и лемма полностью доказана. $\square$

10. Заключение

Из материалов статьи видно, что приведённые алгебраические иррациональности в случае чисто-вещественных алгебраических полей играют принципиальную роль в вопросах разложения алгебраических иррациональностей в цепную дробь. Начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными алгебраическими числами.

По-видимому, представляет интерес дальнейшее изучение явления концентрации около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ сопряжённых к остаточной дроби α_m .

Рассмотрим множество всех сопряжённых к остаточным дробям — сопряжённый спектр иррационального числа α . При $n > 2$ сопряжённый спектр является бесконечным множеством, а при $n = 2$ — конечным множеством.

Если множество всех дробей вида $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ назвать рациональным сопряжённым спектром вещественного алгебраического числа, то возникает естественный вопрос о его структуре.

В квадратичном случае имеется конечное число предельных точек для рационального сопряжённого спектра — это сопряжённый спектр. Какая ситуация имеет место в общем случае?

Из материалов статьи видно, что теория дробно-линейных преобразований многочленов параллельна теории линейных преобразований однородных бинарных форм. Последняя теория оказывается во многом более простая и доказательства большинства утверждений более короткие.

Такая связь не является случайной. По-видимому, теория дробно-линейных преобразований многочленов более связана с диофантовыми приближениями первого рода, а линейные преобразования однородных форм — с диофантовыми приближениями второго рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Г. Александров Исследование на ЭВМ непрерывных дробей // Алгоритмические исследования в комбинаторике. М.: Наука. 1978. С. 142–161, 187.
2. В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров Цепные дроби, группа $GL(2, \mathbb{Z})$ и числа Пизо // Матем. тр. 2007. Т. 10, № 1. С. 97–131.
3. А. Д. Брюно Разложение алгебраических чисел в цепные дроби // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4, № 2. С. 211–221.
4. А. Д. Брюно Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 2. С. 35–65.
5. Г. Вейль Алгебраическая теория чисел. М.: Гос. из-во И. Л. 1947. 226 с.
6. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197–391.
7. Н. М. Добровольский Гиперболическая дзета-функция решёток // Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
8. Н. М. Добровольский Квадратурные формулы на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ // Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6091–84.
9. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

10. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.
11. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. С. Полякова Дробно-линейные преобразования многочленов и линейные преобразования форм // Материалы XIII Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, Дополнительный том. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 134–149.
12. Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 1. С. 34–55.
13. Н. М. Добровольский, Е. И. Юшина О приведенных алгебраических иррациональностях // Алгебра и приложения: труды Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина, Нальчик, 6–11 сентября 2014 г. – Нальчик: из-во КБГУ. С. 44–46.
14. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, вып. 3. С. 47–52.
15. Подсыпанин В. Д. О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Материалы межвузовской научной конференции математических кафедр пединституты Центральной зоны. Тула, 1968, С. 68–70.
16. В. Д. Подсыпанин О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 43–46.
17. Е. В. Подсыпанин, Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 184–194.
18. Е. В. Подсыпанин О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 47–49.
19. В. В. Прасолов Многочлены. — 3-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2003. — 336 с.
20. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.
21. Фельдман Н. И. Приближения алгебраических чисел. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. — 200 с.
22. К. К. Фролов Оценки погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231, №. 4. С. 818–821.
23. К. К. Фролов Квадратурные формулы на классах функций: дис. ... к-та физ.-мат. наук. М: ВЦ АН СССР. 1979.
24. Е. И. Юшина О некоторых приведенных алгебраических иррациональностях // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Региональной научной студенческой конференции. Тула: ТулГУ 2015. С. 66–72.

25. Е. И. Юшина О некоторых обобщенных числах Пизо // Университет XXI века: исследования в рамках научных школ: материалы Всероссийской научно-практической конференции. Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого 2015. С. 66–72.
26. N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016, no. 2. P. 27–39.
27. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5
28. K. F. Roth Rational approximations to algebraic numbers // Mathematika. 1955. Vol. 2. P. 1–20. corrigendum: p. 168.

REFERENCES

1. Aleksandrov, A. G. 1978, "Computer investigation of continued fractions." , *Algorithmic studies in combinatorics Nauka, Moscow*, pp. 142–161, 187. (Russian)
2. Berestovskii, V. N. & Nikonorov, Yu. G. 2007, "Continued Fractions, the Group $GL(2, \mathbb{Z})$, and Pisot Numbers", *Siberian Adv. Math.*, vol. 17, no. 4, pp. 268–290.
3. Bruno, A. D. 1964, "Continued fraction expansion of algebraic numbers", *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 4, no. 2, pp. 1–15. (Russian)
4. Bruno, A. D. 2015, "Universal generalization of the continued fraction algorithm", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 16, no. 2, pp. 35–65. (Russian)
5. Weyl, Hermann 1940, "Algebraic Theory of Numbers." , *Annals of Mathematics Studies, no. 1. Princeton University Press, Princeton, N. J.*, viii+223 pp.
6. Voronoi, GF 1896, On Generalization of the Algorithm of Continued Fraction, Warsawa University.
7. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Hyperbolic Zeta function lattices." , *Dep. v VINITI* 24.08.84, №6090–84. (Russian)
8. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Quadrature formulas for classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$." , *Dep. v VINITI* 24.08.84. № 6091–84. (Russian)
9. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "About the modern problems of the theory of hyperbolic zeta-functions of lattices" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1(53), pp. 176 – 190. (Russian)
10. Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2015, "About minimal polynomial residual fractions for algebraic irrationalities" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 3(55), pp. 147–182. (Russian)
11. Dobrovol'skii, N. M., Sobolev, D. K. & Soboleva, V. N. 2013, "On the matrix decomposition of a reduced cubic irrational" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, no. 1(45), pp. 34–55. (Russian)
12. Dobrovol'skii, N. M. & Yushina, E. I. 2014, "On the reduction of algebraic irrationalities" , *Algebra and Applications: Proceedings of the International Conference on Algebra, dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaloujnine, Nalchik, 6–11 September 2014 – Nalchik: publishing house KBSU.*, pp. 44 – 46. (Russian)

13. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. & Yushina, E. I. 2012, "On a matrix form of a theorem of Galois on purely periodic continued fractions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, no. 3(43), pp. 47–52. (Russian)
14. Podsypanin, V. D. 2007, "On the expansion of irrationalities of the fourth degree in the continued fraction", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 8, no. 3(23), pp. 43–46. (Russian)
15. Podsypanin, E. V. 1977, "A generalization of the continued fraction algorithm that is related to the Viggo Brun algorithm", *Studies in number theory (LOMI)*, 4. *Zap. Nauch. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, vol. 67, pp. 184–194, 227. (Russian)
16. Podsypanin, E. V. 2007, "On the expansion of irrationalities of higher degrees in the generalized continued fraction (Materials V. D. Podsypanin) the manuscript of 1970", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 8, no. 3(23), pp. 47–49. (Russian)
17. Prasolov, V. V. 2001, "Polynomials." Translated from the 2001 Russian second edition by Dmitry Leites. *Algorithms and Computation in Mathematics*, 11. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xiv+301 pp. ISBN: 3-540-40714-6.
18. Trikolich, E. V. & Yushina, E. I. 2009, "Continued fractions for quadratic irrationalities from the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 10, no. 1(29), pp. 77–94. (Russian)
19. Frolov, K. K. 1976, "Upper bounds for the errors of quadrature formulae on classes of functions.", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* Vol. 231, no. 4, pp. 818–821. (Russian)
20. Frolov, K. K. 1979, "Kvadrurnye formuly na klassakh funktsiy.", PhD thesis. Moscow. *VTS AN SSSR*. (Russian)
21. Yushina, E. I. 2015, "About some the reduction of algebraic irrationalities", *Modern problems of mathematics, mechanics, Computer Science: Proceedings of the Regional scientific student conference. Tula: TulSU*, pp. 66–72.
22. N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii 2016, "On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities", *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, no. 2, pp. 27–39.
23. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva 2016, "Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition", *Springer International Publishing Switzerland*, V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), *Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control* 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5
24. Roth, K. F. 1955, "Rational approximations to algebraic numbers", *Mathematika.*, vol. 2, pp. 1–20. corrigendum: p. 168.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Тульский государственный университет

Московский педагогический государственный университет

Получено 02.03.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.